This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

L Soc 3061.25.3

Harvard College Library

FROM

Deposited by
Astronomical Observatory

L Soc 2061.25

KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN
-:- TE AMSTERDAM -:-

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

-:- VAN 30 MEI 1908 -:-
TOT 28 NOVEMBER 1908

DEEL XVII
(1STE GEDEELTE)

JOHANNES MÜLLER :—: AMSTERDAM
:=========: DECEMBER 1908 :=========:

L Soc 3061.25.3

Harvard College Library
Dec 17, 1909
Received in
Astronomy Observatory

BOUND JAN 27 1910

ERRATA

in „*Bijdrage tot de theorie der binaire mengsels*". XI.

Bij het bewijs, dat de gesloten kromme, meetkundige plaats der snijpunten van $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, steeds ligt bij $v < b_2$ is een mogelijk geval over het hoofd gezien. De waarde $v < b_2$ zal kunnen voorkomen, als

$$n - 1 > \sqrt{1+\varepsilon_1} + n\sqrt{\varepsilon_2}$$

zooals in het *Vervolg* zal aangetoond worden.

L Soc 3061.25.3

INHOUD.

				Blz
Verslag	Vergadering	30 Mei	1908	1
„	„	27 Juni	„	97
„	„	„	„ Bijvoegsel	163
„	„	26 September	„	181
„	„	31 October	„	281
„	„	28 November	„	409

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING van Zaterdag 30 Mei 1908.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 2.

JAN DE VRIES: „Congruenties van kubische ruimtekrommen in verband met een kubische transformatie", p. 2.

K. MARTIN: „Das Alter der Schichten von Sondé und Trinil auf Java", p. 7.

G. C. J. VOSMAER: „Poterion een boorspons", p. 16.

A. K. M. NOYONS: „Over hardheidsbepaling bij spieren". (Aangeboden door de Heeren H. ZWAARDEMAKER en C. A. PEKELHARING), p. 22. (Met één plaat).

J. BOEKE: „Over den bouw van de gangliencellen in het centrale zenuwstelsel van Branchiostoma lanceolatum" (2de mededeeling). (Aangeboden door de Heeren G. C. J. VOSMAER en L. BOLK), p. 32. (Met één plaat).

L. E. J. BROUWER: „Over differentiequotienten en differentiaalquotienten". (Aangeboden door de Heeren D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE), p. 38.

M. W. BEIJERINCK: „Binding van vrije atmospherische stikstof door Azotobacter in reinkultuur", p. 46.

H. C. PRINSEN GEERLIGS: "Snelle verandering in samenstelling van eenige tropische vruchten bij het narijpen", p. 54.

J. J. BLANKSMA: „Reductie van aromatische nitrolichamen door natriumdisulfide". (Aangeboden door de Heeren A. F. HOLLEMAN en A. P. N. FRANCHIMONT), p. 64.

C. SANDERS: „Bijdragen tot de astronomische plaatsbepaling op de Westkust van Afrika". III. (Aangeboden door de Heeren E. F. en H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN), p. 66.

C. SANDERS: „Waarneming van den overgang van Mercurius voorbij de zon op 14 November 1907 verricht te Chiloango in het Portugeesche Congogebied". (Aangeboden door de Heeren E. F. en H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN), p. 84.

H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK: „Over het meten van zeer lage temperaturen. XXI. Het vastleggen van standaardtemperaturen door middel van kookpunten van zuivere stoffen. Bepaling van de dampspanning van zuurstof", p. 86. (Met één plaat).

H. KAMERLINGH ONNES en J. CLAY: „Over het meten van zeer lage temperaturen. XXII. Het thermoelement goud-zilver bij waterstoftemperaturen", p. 94.

H. KAMERLINGH ONNES en J. CLAY: „Over de verandering van den galvanischen weerstand van zuivere metalen bij zeer lage temperaturen en den invloed, die hierop wordt geoefend door kleine hoeveelheden bijmengselen" II, p. 95.

Aanbieding eener verhandeling van den Heer J. H. F. KOHLBRUGGE: „Die Gehirnfurche maleiischer Völker verglichen mit denen der Australier und Europäer. Ein Beitrag zur Evolutionslehre", p. 96.

Aanbieding van boekgeschenken, p. 96.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Bericht van den Heer M. W. BEIJERINCK, dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen;

2°. Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 8 Mei 1908, waarbij bericht wordt dat H. M. de Koningin heeft bekrachtigd de benoeming van de Heeren HENDRIK DE VRIES te Amsterdam en K. F. WENCKEBACH te Groningen tot gewone leden en van de Heeren GEORGE H. DARWIN te Cambridge en WILLIAM RAMSAY te Londen tot Buitenlandsche Leden van de Wis- en Natuurkundige Afdeeling.

3°. Dankzegging van de Heeren H. DE VRIES, K. F. WENCKEBACH, GEORGE H. DARWIN en WILLIAM RAMSAY voor hunne benoeming respectievelijk tot gewoon en tot buitenlandsch lid.

De nieuw benoemde leden worden binnengeleid door de Heeren MARTIN en JAN DE VRIES en door den Voorzitter verwelkomd.

4°. Bericht van een Commissie tot viering van de herdenking van den 100sten geboortedag van CHARLES DARWIN op 22—24 Juni 1909, waarvan een programma later zal worden toegezonden.

5°. Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 27 Mei 1908 betreffende verhooging van het subsidie ten behoeve van het op te richten Instituut voor hersenonderzoek. In dit schrijven deelde de Minister mede, dat Z Exc. er de voorkeur aan gaf, dat het beheer van het Instituut worde overgelaten aan den te benoemen Directeur, en dat de taak der Akademie beperkt blijve tot het houden van toezicht op dat beheer. Tevens verzocht de Minister de namen te vernemen van de Commissie van Toezicht welke door de Akademie zal worden benoemd benevens van den aan te stellen directeur.

Na eenige toelichting omtrent dit schrijven stelt de Voorzitter voor als Commissie van Toezicht te benoemen de Heeren WINKLER, BOLK, MAC GILLAVRY, VAN WIJHE, ROSENBERG en den Secretaris.

Aldus wordt besloten.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES spreekt over: "*Congruenties van kubische ruimtekrommen in verband met een kubische transformatie.*"

§ 1. Zijn x_1, x_2, x_3, x_4 de coördinaten van een punt X t.o.v. een viervlak, dat tot hoekpunten heeft O_1, O_2, O_3, O_4, dan wordt door

$$x_1 x'_1 = x_2 x'_2 = x_3 x'_3 = x_4 x'_4$$

een kubische transformatie bepaald, welke de rechte

$$x_k = \lambda a_k + \mu b_k$$

omzet in de kubische ruimtekromme ω^3, aangewezen door

$$\varrho x'_k = \frac{1}{\lambda a_k + \mu b_k}.$$

De congruentie Γ der ω^3 door de vijf punten O_k $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$ wordt dus getransformeerd in de stralenschoof, die het aan O_5 toegevoegde punt O'_5 tot top heeft.

Met de bisecante b' door O'_5 naar de willekeurig door O_1, O_2, O_3, O_4 gelegde σ'^3 komt overeen een β^3 door O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, welke de rechte s tot koorde heeft.

Uit het volgende zal blijken, dat de bedoelde transformatie ons in staat stelt een aantal bekende eigenschappen van stelsels van krommen ω^3 op eenvoudige wijze af te leiden.

§ 2. Beschouwen we de krommen ω^3 der congruentie Γ welke de rechten l en m snijden. Zij worden omgezet in de rechten door O'_5, die op twee krommen λ'^3 en μ'^3 rusten. Nu hebben de kubische kegels, welke deze krommen uit O'_5 projecteeren, buiten de rechten $O'_5 O_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ nog vijf ribben gemeen, die de beelden zijn van evenzoo vele tot Γ behoorende kubische krommen.

Hieruit blijkt dat de krommen van Γ, die een gegeven rechte l snijden, een *oppervlak A^5 van den vijfden graad* vormen.

Het beeld van A^5 is de kubische kegel, die λ'^3 uit O'_5 projecteert; deze heeft de bisecante b', uit O'_5, tot dubbelribbe. Derhalve is de kromme β^3 van Γ, welke l tot bisecante heeft, een *dubbelkromme* van A^5.

Legt men de rechte m door O_1, dan is haar beeld een rechte m', die evenzeer door O_1 gaat, dus met den bovengenoemden projecteerenden kegel van λ'^3, buiten O_1, twee punten gemeen heeft. We besluiten hieruit, dat A^5 *vijf drievoudige punten* O_k heeft.

De doorsnede van A^5 met $O_k O_l O_m$ bestaat dus uit de rechten $O_k O_l$, $O_l O_m$, $O_m O_k$ en een kegelsnede door O_k, O_l, O_m, die $O_p O_q$ snijdt en met deze rechte een exemplaar van Γ vormt. Op A^5 liggen bijgevolg *elf rechten* en *tien kegelsneden.*

§ 3. De krommen ϱ^3 van Γ, die een gegeven vlak φ aanraken, worden door de transformatie omgezet in raaklijnen r' door O'_5 naar een kubisch oppervlak Φ'^3, dat kegelpunten heeft in O_k $(k = 1,2,3,4)$. Het pooloppervlak van O'^5 gaat door de vier kegelpunten O, heeft dus tot beeld een quadratisch oppervlak door die punten. De doorsnede van dit laatste met φ is het beeld van de m.pl. der punten, waarin Φ'^3 door de rechten r' wordt aangeraakt. Deze *kegelsnede* bevat dus de punten, waarin φ door krommen ϱ^3 wordt *aangeraakt.*

Door O'_5 gaan zes hoofdraaklijnen van Φ'^3; de congruentie Γ bevat dus *zes* krommen die φ *osculeeren.*

De omhullingskegel φ'^6 uit O'_5 naar Φ'^3 heeft vier dubbelribben $O'_5 O_k$; immers een vlak door $O'_5 O_k$ snijdt Φ'^3 volgens een kubische kromme met dubbelpunt O_k, die slechts vier raaklijnen naar O'_5 zendt, zoodat, in dat vlak, $O'_5 O_k$ twee kegelribben vervangt.

Met een willekeurige kubische kromme door de vier punten O_k heeft φ'^6 dus tien buiten O_k gelegen punten gemeen. Door toepassing van onze transformatie vinden we hieruit, dat de krommen van Γ die φ aanraken een *oppervlak* Φ^{10} *van den tienden graad* vormen.

Een rechte door O_1 snijdt φ'^6 nog in vier punten; op haar beeld rusten derhalve vier krommen ϱ^3, die φ aanraken. Hieruit volgt, dat Φ^{10} *vijf zesvoudige punten* O_k heeft.

De rechten $O_k O_l$ liggen dus op Φ^{10}; dat zij *dubbelrechten* zijn, kan aldus blijken. Een rechte, die op $O_1 O_2$ en $O_3 O_4$ steunt, heeft met φ'^6 zes punten gemeen; haar beeld moet dus op $O_1 O_2$ en $O_3 O_4$ vier punten met Φ^{10} gemeen hebben.

De doorsnede van Φ^{10} met $O_1 O_2 O_3$ bestaat uit de dubbel te tellen rechten $O_1 O_2$, $O_2 O_3$, $O_3 O_1$ en een kromme van den vierden graad, die dubbelpunten heeft in O_1, O_2, O_3 en in den doorgang van de dubbellijn $O_4 O_5$, dus uit twee kegelsneden is samengesteld. Deze kegelsneden vormen blijkbaar met $O_4 O_5$ twee exemplaren van Γ, die φ aanraken.

Op Φ^{10} liggen bijgevolg *tien dubbelrechten* en *twintig kegelsneden.*

Uit de beschouwing van de raakkegels uit O'_5 naar twee quadrinodale kubische oppervlakken Φ'^3 volgt gereedelijk, dat Γ *twintig* krommen bevat welke twee gegeven vlakken aanraken.

§ 4. Om te bepalen hoeveel krommen ϱ^3 door vier punten O_k kunnen gelegd worden, die de rechte b tot bisecante hebben en op de rechten c en d steunen, hebben we slechts het aantal rechten r' te zoeken, die β'^3 tweemaal, γ'^3 en δ'^3 eenmaal snijden, wanneer deze drie krommen vier punten O_k gemeen hebben.

Nu vormen de koorden van β'^3, die op een rechte l' steunen een biquadratisch regelvlak, waarop β'^3 dubbelkromme is, dat dus met γ'^3, buiten de vier punten O, nog vier punten gemeen heeft. Hieruit volgt terstond, dat de rechten, die β'^3 tweemaal en γ'^3 eenmaal snijden, ook een biquadratisch regelvlak Σ'^4 vormen. Daar de kegels, die deze krommen uit een punt van β'^3 projecteeren, twee ribben gemeen hebben, die geen der punten O bevatten, is β'^3 ook op Σ'^4 dubbelkromme. Met δ'^3 heeft dit regelvlak, buiten O_k, vier punten gemeen; op γ'^3 en δ'^3 rusten dus vier koorden van β'^3, en door toe-

passing van de transformatie vinden we, dat de krommen ρ^3 welke b tweemaal en c eenmaal snijden, een *oppervlak* Σ^4 *van den vierden graad* vormen.

Legt men d door O_1, dan heeft haar beeld d' met Σ'^4 nog twee punten gemeen; bijgevolg snijdt d het oppervlak Σ^4 in twee buiten O_1 gelegen punten, zoodat O_1 dubbelpunt is. Het oppervlak Σ^4 heeft derhalve *vier kegelpunten* O_k.

Blijkbaar is b dubbelrechte van Σ^4; immers b is het beeld van de op Σ'^4 gelegen dubbelkromme β'^3.

Door een punt S van b gaan twee krommen ρ^3; hun tweede snijpunten S' en S'' met b zijn de punten welke b nog gemeen heeft met het oppervlak A^4, bepaald door c, S en de punten O.

Daar de puntenparen S, S' een (2,2) vormen, kan men door vier punten *vier* krommen ρ^3 leggen, die een rechte *raken* en een andere rechte *snijden*.

De doorsnede van Σ^4 met het vlak $O_1O_2O_3$ heeft dubbelpunten in O_1, O_2, O_3 en in den doorgang met b; ze bestaat dus uit twee kegelsneden. Een dezer kegelsneden bevat ook den doorgang van c; ze wordt tot een ontaarde ρ^3 aangevuld door de rechte uit O_4, die op haar en op b rust. De tweede kegelsnede bevat den doorgang van de uit O_4 naar b en c getrokken transversaal, en vormt met deze rechte een ρ^3.

Op het oppervlak Σ^4 liggen dus *acht kegelsneden, negen enkelvoudige rechten en een dubbelrechte.*

§ 5. Het aantal krommen ρ^3 door O_k $(k = 1, 2, 3, 4)$, welke op de rechten a, b, c, d steunen, is blijkbaar evengroot als het aantal transversalen van vier door O_k gelegde kubische krommen $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3$. Het regelvlak (α, β, l), dat α^3, β^3 en een rechte l tot richtlijnen heeft, is van den graad 14, omdat l vijfvoudig is en elk vlak door l negen rechten bevat. Gaat l_0 door O_1 dan bevat een vlak door l_0 nog slechts vier rechten, zoodat de graad van het regelvlak (α, β, l_0) slechts 9 bedraagt. Hieruit volgt dat (α, β, l) vier vijfvoudige punten O_k bezit.

Met γ^3 heeft (α, β, l), buiten O_k, 22 punten gemeen; het regelvlak (α, β, γ), is dus van den graad 22.

Op het regelvlak (α, β, l_0) is O_1 vijfvoudig, omdat een rechte door O_1 vier beschrijvende lijnen snijdt; daarentegen zijn O_2, O_3 en O_4 drievoudige punten, want een rechte door O_2, die de vijfvoudige rechte l_0 snijdt, ontmoet nog slechts één beschrijvende lijn. Met γ^3 heeft (α, β, l_0) buiten de veelvoudige punten nog $9 \times 3 - 5 - 3 \times 3 = 13$ punten gemeen. In verband met het bovenstaande volgt hieruit dat O_1 op (α, β, γ) een negenvoudig punt is.

Van de snijpunten van (α, β, γ) met δ^3 liggen er dus 36 in O_k; bijgevolg hebben $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3$ *dertig transversalen.*

Derhalve kan men door *vier* punten *dertig* kubische krommen leggen, die op *vier* gegeven rechten rusten.

§ 6. Beschouwen we thans het oppervlak ψ^{30} gevormd door de krommen ρ^3, die op a, b en c rusten. Door een punt A van a en de punten O gaan vijf ρ^3 welke b en c snijden. Hieruit blijkt, dat a, b en c *vijfvoudige rechten* zijn.

Met een rechte m door O_k heeft het regelvlak (α, β, γ) dertien in O_k gelegen punten gemeen, haar beeld m' (rechte door O_k) snijdt ψ^{30} dus evenzeer in 13 buiten O_k gelegen punten. We besluiten hieruit, dat de vier punten O *zeventienvoudig* zijn op ψ^{30}.

De rechten $O_k O_l$ liggen dus op dit oppervlak; dat ze viervoudige rechten zijn, kan aldus blijken.

Daar O_k en O_l negenvoudig zijn op (α, β, γ) wordt $O_k O_l$, buiten die punten, door 22—18=4 transversalen der krommen α, β, γ gesneden; de beelden dezer rechten zijn kegelsneden door O_k en O_l, die rusten op $O_m O_n$, b, c en d en elk met $O_m O_n$ een ρ^3 van het stelsel vormen.

De doorsnede van ψ^{30} met O_1 O_2 O_3 kan buiten de drie viervoudige rechten nog slechts uit kegelsneden bestaan; deze zijn gemakkelijk aan te wijzen. Vooreerst kan men door O_1, O_2, O_3 een kegelsnede leggen, die b en c snijdt; zij wordt tot een ρ^3 aangevuld door elke der beide rechten uit O_4, die op haar en op d rusten. Verder bepalen de doorgangen van d en van de transversaal met O_4 naar b en c met O_1, O_2, O_3 een kegelsnede, die met de bedoelde transversaal een ρ^3 vormt. We hebben dus in O_1, O_2, O_3 drie dubbele en drie enkelvoudige kegelsneden; met de drie viervoudige rechten vormen ze een doorsnede van den graad 30.

Op ψ^{30} liggen dus 4 zeventienvoudige punten, 3 vijfvoudige, 6 viervoudige en 36 enkelvoudige rechten, 12 dubbele en 36 enkelvoudige kegelsneden.

Aardkunde. — De Heer MARTIN deed eene mededeeling, getiteld: *„Das Alter der Schichten von Sondé und Trinil auf Java."*

Vor kurzem brachte W. BRANCA einen vorläufigen Bericht über die Ergebnisse der Trinil-Expedition, welche unter Leitung von Frau SELENKA die Schichten an der Fundstätte des *Pithecanthropus erectus* und deren weiterer Umgebung einem eingehenden Studium unterworfen hat [1]). Dieser Bericht stützte sich vor allem auf Beobachtungen und Aufzeichnungen von E. CARTHAUS, welcher im Verein mit dem niederländischen Bergingenieur W. F. F. OPPENOORTH [2]) als Geologe im Dienste der Expedition tätig war und als solcher unter anderen eine grosse Anzahl fossiler Mollusken an mich zur Begutachtung nach Leiden gesandt hatte. Ich gab das Material meiner derzeitigen Assistentin, FRL. H. ICKE, zur Bestimmung und leitete aus deren Ergebniss einige Folgerungen ab, über die ich im October 1907 Herrn Dr. CARTHAUS berichtete. So bezog sich denn auch BRANCA in seiner vorsichtig abwägenden Mitteilung mehrfach auf die in Leiden gemachten Bestimmungen.

Es handelte sich dabei um Reste aus marinen Sedimenten, welche die knochenführenden Schichten von Trinil unterlagern, und um solche aus der Hauptknochenschicht selbst. Jene wurden als pliocän, diese als quartär bestimmt, und zwar gründete ich mein Urteil über das Alter der marinen Ablagerungen in erster Linie auf die Gastropodenfauna von Sondé, welche aus der Sammlung VERBEEK's herkünftig und von mir bearbeitet worden war; denn es liess sich erweisen, dass die von CARTHAUS gesandten, marinen Mollusken aus gleichwertigen Schichten stammen müssten.

Selbstredend ist die Altersbestimmung der betreffenden **Schichten von Sondé** von grösster Bedeutung für die Beurteilung des Alters des *Pithecanthropus*, und auf die Kenntniss jener Sedimente stützte sich bereits 1895 meine von den Erwägungen Anderer ganz unabhängige Ansicht, „dass die als *Pithecanthropus*-Knochen gedeuteten Funde nur entweder jungpliocän oder altpleistocän sein können".[3]) Derzeit waren mir aus dem Tertiär von Sondé 53 verschiedene, gut

---

[1]) W. BRANCA, Vorläufiger Bericht über die Ergebnisse der Trinil-Expedition der Akademischen Jubiläums-Stiftung der Stadt Berlin (Sitzungsber. der k. Preuss. Akad. d. Wiss.; Phys.-Math. Cl. 5 März 1908, XII).

[2]) OPPENOORTH veröffentlicht soeben in „De Natuur" (28ste Jaarg., 15 Mei 1908, S. 145) einen Aufsatz über „De Trinil-Expeditie", worin er die von ihm geleiteten Ausgrabungen behandelt und die Mitteilungen von CARTHAUS weiter anfüllt.

[3]) Soc. Néerland. de Zoologie. Compte-Rendu des séances du Troisième Congrès Internat. de Zoologie. Leyde 16—21 Sept. 1895. Seite 273.

bestimmbare Gastropoden bekannt, von denen 53°/₀ mit noch lebenden Arten identificiert werden konnten [1]). Als später die Anzahl der bestimmten, wohl erhaltenen Arten auf 84 stieg, blieb dieser Procentsatz unverändert [2]). Inzwischen ist wiederum eine Anzahl von Gastropoden aus diesen pliocänen Ablagerungen von mir beschrieben [3]); doch hat eine Zusammenstellung der gesammten, bis jetzt bekannten Fauna noch nicht stattgefunden. Ich lasse sie hier folgen:

Liste der von Sondé bekannten Gastropoden. [4])

Bulla cylindrica Hebl (?)
Terebra Cumingii Desh.
Conus menengtenganus Mart. †
Conus sulcatus Hwass *var.*
Conus sinensis Sow. *var.*
Conus sondeianus Mart. †
Conus longurionis Kien.
Conus vimineus Reeve
Conus socialis Mart. †
Conus Loroisii Kien.
Conus ngavianus Mart. †
Conus cinereus Hwass
Conus traversianus Smith
Pleurotoma gendinganensis Mart. †
Pleurotoma tigrina Lam. *var.*
Pleurotoma sondeiana Mart. †
Pleurotoma carinata Gray *var.*
Pleurotoma flavidula Lam. *var.*
Pleurotoma bataviana Mart. †
Pleurotoma madiunensis Mart. †
Cancellaria asperella Lam.
Oliva sondeiana Mart. †
Oliva tricincta Mart. †
Oliva rufula Duclos
Oliva ispidula Lin.
Oliva australis Duclos *var.*
Ancillaria Junghuhni Mart. †
Ancillaria Vernedei Sow.
Ancillaria cinnamomea Lam.
Harpa spec. indet.
Marginella quinqueplicata Lam. *var.*
Voluta gendinganensis Mart. †
Mitra adusta Lam. (?)
Mitra flammea Quoy
Mitra circula Kien.
Turricula bataviana Mart. †
Turricula lyrata Lam.
Turricula costellaris Lam.
Turricula plicaria Lin.
Turricula obeliscus Reeve
Turricula (?) gendinganensis Mart. †
Fusus Verbeeki Mart. †
Latirus madiunensis Mart. †
Latirus acaulis Mart. †
Phos Woodwardianus Mart. †
Tritonidea sondeiana Mart. †
Nassa coronata Brug. *var.*
Nassa Kieneri Desh. *var.*
Nassa ngaviana Mart. †
Nassa Verbeeki Mart. †
Nassa thersites Brug.
Nassa sondeiana Mart. †
Nassa sertula Adams *var.*
Nassa madiunensis Mart. †

---

[1]) Sammlg. d. Geol. R. Mus. Leiden 1ste Serie, Bd. V, Seite 35; 1895.

[2]) Daselbst Bd. VI, Seite 149; 1900.

[3]) Die Fossilien von Java, Bd I, Seite 222 u. ff. (Sammlg. Geol. R. Mus. Leiden; Neue Folge, Bd I).

[4]) † = ausgestorbene Art.; *var.* = ausgestorbene Varietät.

Columbella bandongensis Mart. †
Columbella gracillima Mart. †
Murex Verbeeki Mart. †
Murex sondeianus Mart. †
Metula Boettgeri Mart. †
Hindsia gendinganensis Mart. †.
Hindsia tambacana Mart. †
Purpura mancinella Lin. *var.*
Pentadactylus rhombiformis Mart.†
Triton distortus Schub. et Wagn.
Triton pseudopyrum Mart. †
Persona reticulata Lin.
Ranella subgranosa Beck.
Ranella nobilis Reeve
Ranella bitubercularis Lam.
Cassis pila Reeve *var.*
Cassis Herklotsi Mart. †
Morio striata Lam.
Ovula javana Mart. †
Cypraea insculpta Mart. (?) †
Cypraea gendinganensis Mart. †
Cypraea sondeiana Mart. †
Cypraea erosa Lin.
Strombus Fennemai Mart. †
Strombus minimus Lin.
Strombus madiunensis Mart. †
Strombus isabella Lam. *var.*
Strombus gendinganensis Mart. †
Strombus dentatus Lin. *var.*
Strombus sondeianus Mart. †
Rostellaria Powisii Petit *var.*
Terebellum punctatum Chemn.
Cerithium tuberculatum Lin. var.
Cerithium gendinganense Mart. †
Cerithium aluco Lin.
Cerithium obeliscus Brug.
Potamides Jenkinsi Mart. var. †
Planaxis sondeianus Mart. †
Planaxis decollatus Quoy et Gaim.
Vermetus javanus Mart. †
Melania gendinganensis Mart. †
Melania sondeiana Mart. †
Melania testudinaria v. d. Busch
Melania tuberculata Müller
Melania Woodwardi Mart. †
Melania scabra Müller
Melania madiunensis Mart. †
Melania tjariangensis Mart. †
Melania tornatella Lea
Solarium perspectivum Lin.
Solarium maximum Philippi
Xenophora calculifera Reeve
Natica sondeiana Mart. †
Natica zebra Lam.
Natica rufa Born.
Natica vitellus Lin.
Natica gendinganensis Mart. †
Natica ampla Philippi
Natica sulcifera Mart. †
Natica mamilla Lin.
Natica aurantia Lam.
Natica powisiana Recluz
Natica Jukesii Reeve
Natica melanostoma Gmelin
Sigaretus papilla Chemn.
Eulima sondeiana Mart. †
Pyramidella reticulata Mart. †
Nerita chamaeleon Lin. var.
Neritina brevispina Lam.
Turbo petholatus Lin.
Turbo sondeianus Mart. †
Turbo versicolor Gmel.
Trochus sondeianus Mart. †

Die Liste enthält 126 bestimmte, manchmal mit deutlichen Farbenresten versehene Arten, worunter 3 fragliche Vorkommnisse. Unter den übrigen 123 Species befinden sich 67 noch heute lebende, d. i. reichlich 54 %. Freilich sind 15 derselben nur in ausgestorbenen

Varietäten vertreten; doch habe ich bei allen Bestimmungen den Artbegriff eng gefasst und versucht, bei der Trennung der Formen den bei der Bearbeitung recenter Conchylien üblichen Maasstab anzulegen. Somit wird die gefundene Procentzahl schwerlich zu hoch sein und könnte man die betreffenden Schichten nach den für Europa geltenden Erfahrungen ohne weiteres ins Pliocän versetzen.

Aber auch für die Tropen, in denen die Umprägung der Arten minder rasch erfolgte [1]), ist dieser berechnete Procentsatz für ein pliocänes Alter nicht zu niedrig. Das ergiebt sich namentlich durch den Vergleich mit den als miocän bestimmten Sedimenten, welche 30°/₀ recenter Species geliefert haben und auf die ich gleich noch zurückkommen werde. In beiden Fällen bleibt der gefundene Procentsatz notwendigerweise hinter dem wirklichen zurück, da die tropische Fauna noch stets unvollkommen bekannt und es zudem unmöglich ist, jede einzelne, schon beschriebene, recente Art zum Vergleiche heranzuziehen. Die Arbeit eines Einzelnen bleibt hier stets lückenhaft.

Eine gewisse Handhabe zur Beurteilung des letzterwähnten Umstandes bieten die Schichten von Kajoe ragi auf Celebes, welche fast frisch erhaltene Molluskenschalen und Krebsreste führen und die, nach dem ganzen Erhaltungszustande zu urteilen, der allerjüngsten Vergangenheit angehören müssen. Es befinden sich darunter Schalen, welche den Eindruck machen, als ob sie soeben am Strande aufgelesen wären; trotzdem musste eine ganze Reihe von Formen als neu beschrieben werden [2]). SCHEPMAN bestimmte 214 Arten von Mollusken; darunter waren derzeit 20 neu und 5 bislang nur fossil gefunden; somit waren nur 189 Species aus der heutigen Fauna bekannt. Das ergiebt 88°/₀, während man nahezu 100°/₀ erwarten sollte [3]). Weit wichtiger für die Beurteilung der Schichten von Sondé ist aber der Vergleich mit den älteren tertiären Schichten von Java, deren Fauna mit denselben Hilfsmitteln und unter Anlegung desselben Maasstabes für die Trennung der Arten bearbeitet worden ist.

Die Kalksteine mit *Lepidocyclina* und *Cycloclypeus annulatus*, welche ein tiefliegendes Glied der Javagruppe darstellen, werden jetzt allgemein als älteres Miocän aufgefasst [4]). Schichten von Rembang,

---

1) K. MARTIN, Die Tertiärschichten auf Java; Allg. Th., Seite 24.

2) J. G. DE MAN, Beschrbg. einiger brachyurer Krebse aus posttertiären Schichten der Minahassa, Celebes (Sammlg. 1ste Ser., Band VII, Seite 254). — M. M. SCHEPMAN, Mollusken aus posttertiären Schichten von Celebes (das. Bd. VIII, Seite 153).

3) BOETTGER fand in quartären Korallenkalken von West-Timor unter 13 Arten 11 (84.6°/₀) noch lebende Formen (VERBEEK, Molukken-Verslag, Seite 671).

4) Sammlg. Ser. I, Bd. VIII, Seite 149.

welche ebenfalls *Cycloclypeus annulatus* und daneben eine eigenartige, von derjenigen der jüngeren Schichten verschiedene Fauna führen, enthalten höchstens 15°/₀ recenter Arten. [1]) Die Schichten vom Tji Lanang und Tji Tangkil, dem klassischen Fundorte *O* von JUNGHUHN in den Preanger-Regentschaften, welche ihrer Lagerung nach unstreitig jünger sind als die ersterwähnten Kalke, enthalten dagegen 30°/₀ noch lebender Species. [2]) NOETLING berechnete für das Miocän von Burma ebenfalls 30°/₀. [3]) Wir gelangen somit zu folgenden Zahlen: Altmiocän von Rembang 15°/₀; Jungmiocän der Preanger-Regentschaften 30°/₀; die Schichten von Sondé 54°/₀; jüngstes Quartär von Celebes 88°/₀. Demnach können die marinen Sedimente von Sondé nicht älter als pliocän sein; aber es muss unentschieden bleiben, ob sie dem älteren oder dem jüngeren Pliocän angehören. [4])

Diese ausführliche Begründung des Alters der Schichten von Sondé war erforderlich, weil DUBOIS dieselben für miocän erklärt hat. Er sagt: „Enthält die Schicht von Sondé wirklich, so wie Prof. Martin annimmt, nur ungefähr 53°/₀ noch lebender Arten, so muss man die indische Ablagerung wohl für miocän halten, wenn man bedenkt, dass das so sorgfältig untersuchte englische älteste marine Pliocän einen solchen Procentsatz noch lebender Arten besitzt". [5]) Dieser Maasstab ist nach obiger Darlegung unzulässig; denn es liegt auf der Hand, dass es sich bei der Feststellung des Niveau's in erster Linie um das Verhältniss der Schichten von Sondé zu den übrigen Sedimenten von Java und benachbarten Gebieten handeln muss.[6])

---

[1]) Daselbst Seite 147.

[2]) Daselbst Bd. VI, Seite 158.

[3]) The Fauna of the Miocene Beds of Burma; Palaeontologia Indica, New Series, Vol. I, 3, Seite 98.

[4]) Selbstredend beziehe ich mich hier nur auf die mir bekannten palaeontologischen Tatsachen. Nach JOH. ELBERT sind diese Schichten als unteres Pliocän aufzufassen, während auch oberpliocäne Tuff-und Conglomeratbreccien im Liegenden der Kendengschichten vorkommen. (De nieuwste onderzoekingen over het Pithecanthropus-vraagstuk. Natuurkundig Tijdschr. v. Ned. Indië, Deel LXVII, 1907, Seite 125 ff.)

[5]) EUG. DUBOIS, Eenige van Nederlandschen kant verkregen uitkomsten met betrekking tot de kennis der Kendeng-Fauna (Fauna van Trinil). (Tijdschr. v. h. Kon. Nederl. Aardrijkskdg. Genootsch., 2e Ser., Dl. XXIV, 1907, Afl. 3, Mededeelingen, Seite 456).

[6]) Erst nachdem ich Obiges niedergeschrieben, gelangte ich in den Besitz der Arbeit von VERBEEK: Molukken-Verslag (Jaarboek v. h. Mijnwezen in Ned. Oost-Indië, 37ste Jaarg. 1908, Wetensch. gedeelte). VERBEEK schliesst sich darin der Ansicht von DUBOIS an. Er giebt zwar zu, dass in den von mir als pliocän

Gründet sich die Folgerung eines pliocänen Alters auf das Material der VERBEEK'schen Sammlung, so liess sich andererseits leicht erweisen, dass CARTHAUS seine marinen Fossilien, die unter den Fundortsangaben „Sondé" und „Padas Malang" nach Leiden gesandt wurden, aus denselben Schichten aufgelesen hat.

Da von Sondé bislang nur Gastropoden untersucht und beschrieben sind, so konnte es sich bei dieser Frage vorläufig auch nur um die Bestimmung der Arten dieser Gruppe handeln. Es wurden deswegen von meiner derzeitigen Assistentin sämmtliche von Java bekannten Gastropoden verglichen und es gelang ihr die folgenden Arten zu identificieren **Von Sondé**: *Conus socialis Mart. (h), C. sinensis Sow., Pleurotoma gendinganensis Mart., P. carinata Gray var. Woodwardi Mart. (h), P. sondeiana Mart. (s), P. flavidula Lam. mut. (s), Marginella quinqueplicata Lam. mut. minor Mart. (h), Phos Woodwardianus Mart., Nassa Verbeeki Mart. (h), Columbella gracillima Mart. (s), Triton pseudopyrum Mart., Ranella nobilis Reeve, Cassis Herklotsi Mart. (h), C pila Reeve var. (h), Melania madiunensis Mart. (s), Solarium maximum Phil., Xenophora calculifera Reeve (s), Natica vitellus Linn. (h), N. zebra Lam. (h), N. powisiana Recluz (h), Nerita chamaeleon Linn., var. squamulata Le Guill. (s).* **Von Padas Malang**: *Pleurotoma carinata Gray var. Woodwardi Mart. (h), P. gendinganensis Mart., Oliva rufula Duclos (h), Marginella quinquepticata Lam. mut. minor Mart. (h), Turricula bataviana Mart., Hindsia tambacana Mart., Nassa Verbeeki Mart. (h), Murex Verbeeki Mart. (h), Ranella subgranosa Beck., Cassis Herklotsi Mart (h), Natica powisiana Recluz (h), N. gendinganensis Mart (s), N. vitellus Linn. (h), N. rufa Born. (h), N. zebra Lam. (h.)*

---

bestimmten Mergeln, unter anderen in denjenigen von Sondé, keine *Lepidocyclinen* vorkommen; aber es sind nach ihm weitere Untersuchungen und viel mehr Fossilien, sowohl Mollusken als Foraminiferen, nötig, um das Alter endgiltig festzustellen. Dem Wunsche nach weiteren Fossilien dürfte durch die obige Liste nun wohl genügend entsprochen sein, und der gegenüber älteren Untersuchungen fast unverändert gebliebene Procentsatz recenter Arten dürfte auch zu Gunsten der von mir befolgten, von VERBEEK heftig bestrittenen Methode sprechen. Nach VERBEEK werden ferner die Schichten von Sondé durch pliocäne Süsswasserbildungen diskordant bedeckt. (Es sind mit diesen pliocänen Bildungen die vertebratenführenden Schichten gemeint, welche *in diesem Verbande* sicher nicht als Beweis herangezogen werden dürfen. Vgl. VERBEEK a. a. O., Seite 782 u. die Anmerkung am Schluss dieser Abhandlung) und ist es deswegen „vielleicht besser die marinen Schichten noch zum Obermiocän zu stellen" (Seite 500). Später werden diese Sedimente denn auch zum Obermiocän gerechnet (Seite 670) „selbst wenn der Procentsatz lebender Arten in Wirklichkeit etwas höher sein sollte als 53%" (Seite 782). Ich finde keine Veranlassung, auf Grund der Arbeit VERBEEK's die in dieser Abhandlung niedergelegten Auffassungen abzuändern.

Obwohl nun eine Anzahl von Gastropoden der CARTHAUS'schen Sendung unbestimmt blieb, weil sie von Java bis dahin nicht bekannt waren, und sich unter diesen sowohl recente als ausgestorbene, noch neue Species befinden dürften, so ist doch jede der identificierten Arten in der VERBEEK'schen Sammlung von Sondé vertreten. Die mit *h* bezeichneten Fossilien gehören zu den häufigeren Vorkommnissen unter dem früher bearbeiteten Materiale; die mit *s* bezeichneten sind überhaupt nur von Sondé bekannt. Wenn man obige Bestimmungen einer Procentberechnung noch lebender Arten zugrunde legen will, so ergiebt dies 57 und 53 %. Eine grössere Uebereinstimmung kann man überhaupt nicht erwarten.

Die marinen, pliocänen Thonmergel, welche die ältesten Sedimente des von CARTHAUS entworfenen Profils darstellen,[1]) müssen nun in unmittelbarer Nähe des Landes in seichtem Wasser gebildet sein, wie die obenstehende Liste von Gastropoden sogleich erkennen lässt. Bezeichnend ist u. a. die in zwei Arten vertretene Gattung *Planaxis*, welche an den Küsten noch weiter aufwärts steigt als *Patella*[2]). Dazu kommt, dass *Melania* in diesen Schichten nicht nur in einer beträchtlichen Anzahl von Arten, sondern zugleich in hunderten von Schalen angetroffen wird. Gleich der fluviatilen *Neritina brevispina* zeigen sie deutlich an, dass die Sedimente in nächster Nähe einer Flussmündung zum Absatz gelangten, und dieser Fluss kann wohl nur der Solo gewesen sein. Der von CARTHAUS hervorgehobene Umstand, dass beide Klappen der Muscheln, welche in diesen marinen Ablagerungen vorkommen, „fast stets mehr oder weniger geschlossen sind"[3]), dürfte sich durch die Zufuhr von reichlichem Schlamm bei hohem Wasserstande erklären lassen. Weist doch auch die Einschwemmung der zahlreichen Süsswasserbewohner darauf hin.

Die **„Süsswasser-bez. terrestrischen Schichten"**, welche die pliocänen marinen Sedimente nach CARTHAUS concordant überlagern, und zu denen auch die Hauptknochenschicht gehört, sind bereits von VOLZ aus geologischen Gründen für Quartärbildungen erklärt[4]). Es lassen sich aber noch andere geologische Gründe für diese Altersbestimmung anführen.

Die Gegend von **Trinil** muss bald nach der Bildung des marinen

---

[1]) BRANCA a. a. O., Seite 9.

[2]) P. FISCHER, Manuel de Conchyliologie, Seite 687.

[3]) BRANCA a. a. O., Seite 7.

[4]) W. VOLZ, Das geologische Alter der Pithecanthropus-Schichten bei Trinil Ost-Java (Neues Jahrb. f. Min. etc. Festband 1907, Seite 256.

Pliocäns Land geworden sein, während nachweislich das östliche Java in quartärer Periode eine negative Strandverschiebung erfahren hat [1]) und das wenig flussabwärts von Trinil gelegene Ngawi nach VERBEEK und FENNEMA nur 46 M. Meereshöhe erreicht. [2]) Es gewinnt somit einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit, dass die Trockenlegung des niedrigen Landstrichs bei Trinil mit der quartären Strandverschiebung zusammenfiel und nicht etwa in die pliocäne Periode zurückreicht. Allerdings giebt es im westlichen Java auch kaum über den Meeresspiegel hinausgerückte pliocäne Sedimente [3]), so dass obige Schlussfolgerung bei der geringen geologischen Bekanntheit der Insel nur einen bedingten Wert beanspruchen darf.

Die Süsswasser-Gastropoden, welche aus der Hauptknochenschicht stammen, wurden bereits von BRANCA namhaft gemacht [4]), doch mögen sie des Vergleiches mit der pliocänen Fauna wegen hier nochmals angeführt werden. Es sind die folgenden Arten: *Melania testudinaria v. d. Busch var.*, *M. verrucosa Hinds*, *M. granum v. d. Busch*, *M. infracostata Mousson*, *M. Savinieri Brot*, *Paludina javanica v. d. Busch*, *Ampullaria ampullacea Linn.* Dazu gesellt sich als einzige Landschnecke die noch auf Java lebende Art *Bulimus citrinus Brug.*, welche in einer sehr gut erhaltenen Schale vertreten ist, wie denn überhaupt alle angeführten Fossilien in gutem Zustande überliefert sind. Drei für eine Bestimmung ungenügend erhaltene Schalen von Gastropoden blieben unberücksichtigt. Die beiden erstgenannten Arten von *Melania* gehören zu den häufigeren Vorkommnissen, und die Bestimmung der *M. testudinaria* wurde derzeit durch Frl. ICKE handschriftlich in folgender Weise begründet: „Die vorliegenden Formen unterscheiden sich von den lebenden durch das häufige Auftreten eines deutlichen Spiralwinkels und kräftiger Spiralen. Es variiren aber beide Merkmale, und unter den Fossilien befinden sich Formen, die weder von einzelnen recenten noch von den Versteinerungen zu unterscheiden sind, die MARTIN als *M. testudinaria* von Sondé beschrieben hat (Fossilien von Java S. 236, Taf. 36. Fig. 558—561)."

Im Pliocän von Sondé kommen nach obiger Liste neun Melanien vor, unter denen sich noch fünf ausgestorbene Arten befinden. Während von den recenten Species *M. testudinaria* (in gleicher, von der heutigen etwas abweichenden Ausbildung) von den marinen in die Süsswasser — Ablagerungen hinaufsteigt, sind ausgestorbene

---

[1]) Sammlg Geol. R. Mus. Leiden, Ser. I, Bd. V, Seite 28; Bd. VI, Seite 242.

[2]) Geol. Beschrijving van Java en Madoera, Seite 249; Bijl. X, Profil XI.

[3]) Sammlg. a. a. O., Bd. VI. Seite 183.

[4]) Seite 10.

Schnecken in letzteren überhaupt nicht nachgewiesen, so dass sie ganz erheblich jünger sein müssen. Demnach kann die Hauptknochenschicht nur eine posttertiäre Bildung sein. Befinden sich aber die Knochen dieser quartären Ablagerung auf primärer Lagerstätte?

Schon Branca hat diese Frage berührt, aber nicht entschieden. Denn während die geringe Mächtigkeit der Hauptknochenschicht (0,40—1 M) auf eine Zusammenschwemmung von Tieren durch einen einzigen Akt hinweist, sind doch die Knochen nicht in zusammengehörenden Skeletten überliefert. Sie sind andererseits nach Carthaus an allen Ecken und Kanten so gut erhalten, dass sie keinen weiten Transport erlitten haben können [1]). Mir scheint, als ob die Erklärung an der Hand der jetzt bekannten Tatsachen in folgender Weise möglich ist:

In der Nähe von Trinil befand sich in pliocäner Zeit die Mündung des Solo-Flusses; am Strande gelangten derzeit die marinen Thonmergel zur Ablagerung, denen die zahlreichen Mollusken von Sondé und Umgegend entnommen sind. Bald nach ihrer Bildung wurde das Land gehoben; die Mündung des Stromes verlegte sich ostwärts und der Solo floss nun durch ein niedriges Gelände, dessen Boden leicht umgelagert werden konnte [2]). Es mussten sich notwendigerweise auch Stromschlingen bilden. Nun enthalten bereits die „Conglomeratschichten" im Liegenden der „Hauptknochenschicht" einige Knochenreste. Nimmt man an, dass der Fluss bei der Verlegung seines Laufes Sedimente angeschnitten habe, welche gleich jenen Conglomeraten Knochen führten, so konnte durch Auswaschen eine Anreicherung an Skelettresten stattfinden; während der Solo seine Windungen vergrösserte und den Schlamm fortführte, sanken in seinem ausgeebneten Bette die Knochen zu Boden. Sie blieben fast an gleicher Stelle liegen, weil in grossen Stromschlingen die transportierende Kraft der Gewässer eine sehr geringe ist, um nachträglich wiederum von vulkanischen Aschen und Lapilli bedeckt zu werden. So erklärt sich auch das Vorkommen der wohlerhaltenen Süsswassermollusken, die doch in beträchtlicher Zahl vorhanden sind, sowie dasjenige des *Bulimus*, der nur aus unmittelbarster Nähe vom Ufer in die Knochenschicht gelangt sein kann; denn es fehlt jegliche Spur von Transport. [3]).

---

[1]) Branca, a. a. O., Seite 12.

[2]) Vgl. hierzu Elbert, a.a. O., Seite 129.

[3]) Oppenoorth teilte mit, dass auch heute fossile Knochen an verschiedenen Punkten längs des Flusses bei sehr niedrigem Wasserstande ausgespült werden. Die Knochenschicht besteht aus vulkanischem Tuff. „Von oben nach unten geht

Ist der hier gegebene Erklärungsversuch richtig, so wird es sich darum handeln, die Skelettreste der Hauptknochenschicht sorgfältig mit denjenigen zu vergleichen, welche sich sowohl im Hangenden als im Liegenden vorfinden. Bestehen hier keine wesentlichen Unterschiede [1]) und darf man den ganzen Schichtencomplex im Hangenden der pliocänen Sedimente als nahezu gleichalterig betrachten, so kann derselbe und mit ihm der Pithecanthropus nur diluvial sein, selbst wenn letzterer sich auf sekundärer Lagerstätte befinden sollte. Dies näher zu untersuchen, muss ich denjenigen überlassen, welche sich mit der Bearbeitung des Materiales befassen und die Gegend aus eigener Anschauung kennen. [2])

Dierkunde. — De Heer G. C. J. Vosmaer biedt een opstel aan: *„Poterion een boorspons."*

In 1822 deed Hardwicke [3]) een korte mededeeling in de Asiatic Researches over een merkwaardige „Zoophyte, commonly found about the Coasts of Singapore Island." Hardwicke zag, dat het voorwerp behoorde tot de sponzen, en noemde het *„Spongia patera."* Klaarblijkelijk onbekend met dit stuk stelde Schlegel in 1858 [4]) voor,

---

die feinkörnige Schicht in eine grobkörnige über und letztere enthält auch einige Lavabomben, von Dezimetern Grösse". Das Material ist somit innerhalb der Knochenschicht gesichtet. Nach Oppennoorth deutet das Schichtenprofil durchaus auf eine Flussablagerung.

[1]) Oppenoorth sagt, dass sich die Fossilien aus dem Liegenden der Knochenschicht nicht herauspraeparieren liessen; es waren ausserdem nur Bruchstücke. Der Erhaltungszustand war ein anderer, denn die Fossilien aus der Knochenschicht sind dunkler gefärbt.

[2]) Volz hat bekanntlich a.a.O. den *Pithecanthropus* bereits für diluvial, vermutlich mitteldiluvial, erklärt; Elbert hält ihn für altdiluvial. Diese Bestimmungen sind unabhängig von einander und von meiner Beweisführung gemacht. Ich enthalte mich indessen der weiteren Erörterung aller auf diese Frage bezüglicher Einzelheiten, da es mir nur darauf ankam, dasjenige mitzuteilen, wozu das mir selber vorliegende Material Anlass gab. Deswegen zog sich auch die von Elbert in den Ausläufern des Pandangebirges gemachten Entdeckungen (a.a. O., Seite 139) nicht ins Bereich dieser Betrachtungen. Verbeek, welcher früher die Vertebraten führenden Schichten dem Quartär anreihte (Verbeek en Fennema, Geolog. Beschrijv. van Java en Madoera, I, Seite 251), betrachtet sie nun auf Grund ihres Lagerungsverhältnisses als pliocän; er hält die Gründe, welche Volz, Elbert und auch Frech (Lethaea geognostica, Theil. III, Band 2, Seite 31; 1903) für ein quartäres Alter beigebracht haben, für „wenig überzeugend" (Molukken-Verslag, Seite 781). Ich vermag indessen der Beweisführung Verbeek's nicht zu folgen.

[3]) Asiatic Researches XIV, p. 180.

[4]) Handleid. Dierkunde II, p. 542.

den naam *Poterion neptuni* te geven aan een spons, welke men thans algemeen als identiek beschouwd met de door HARDWICKE beschreven en afgebeelde spons. Volgens de regels der nomenclatuur zou het dier dus *Poterion patera* (HARDW.) moeten heeten, zooals door SOLLAS [1]) het eerst is aangetoond.

HARDWICKE zoowel als SCHLEGEL geven op, dat de spons vrij algemeen voorkomt. Geen wonder, dat het voorwerp dat er uitziet als een reusachtige beker, meer dan 1 M. hoog en 30 cm. of veel meer in doorsnede, de aandacht heeft getrokken van zeevarenden. De musea te Leiden, Utrecht, Amsterdam e. a. bezitten fraaie exemplaren, te zamen meer dan 30. Dit rijke materiaal gaf HARTING in der tijd aanleiding de spons te bestudeeren, voor zooverre dit aan gedroogde exemplaren kon geschieden. HARTING gaf in 1870 zijn bekende „Mémoire sur le Genre Potérion" [2]) uit, als vrucht van studie van 27 exemplaren. Sinds dien tijd vindt men *Poterion* nauwelijks in de literatuur vermeld. Het lijkt inderdaad vreemd, dat sedert SCHLEGEL's stuk — een halve eeuw geleden — de reuzen-bekers, die blijkbaar alles behalve zeldzaam waren, nooit of bijkans nooit meer naar eenig museum zijn gezonden, en dat geen der vele expeditie's uit den laatsten tijd ooit een exemplaar heeft meêgebracht. Zoover ik kan nagaan maakt de Siboga-expeditie zelfs geen uitzondering. Mijn verzoek aan verschillende onderzoekers in O-Indië, die daarvoor in aanmerking kwamen, bleef onbeantwoord, totdat verleden jaar Dr. P. N. VAN KAMPEN, assistent aan het Zoölogisch Museum te Buitenzorg mij schreef, dat in zijn tegenwoordigheid drie exemplaren van *Poterion* werden opgehaald tusschen de noordkust van Bantam en Poeloe Babi, uit een diepte van ca. 25 M. Zoo is dus eindelijk de spons weder teruggevonden.

Dr. VAN KAMPEN was zoo vriendelijk mij in alcohol gefixeerde fragmenten te zenden, die dus nader konden worden onderzocht. Sedert schreef hij mij nog meer dan eens wanneer exemplaren gedregd werden; tot nu toe zijn reeds 15 stuks bijeen, alleen uit de Java-Zee, tusschen Banka en Batavia. Poterion is dus thans evenmin zeldzaam als vroeger.

Aangezien van de anatomie der weeke deelen van *Poterion* uit den aard niets bekend was, prikkelde het mij eenigszins mikroskopische doorsneden te kunnen bestudeeren. Reeds dadelijk trof het mij dat de mikroskopisch-anatomische bouw van *Poterion* in karakter geheel overeenkwam met die van de zgn. *Osculina polystomella O. S.*,

[1]) Ann. en Mag. Nat. Hist. (5) VI, p. 441 (1880).

[2]) Natuurk. Verhandel. Prov. Utr. Gen.

waarvan ik sinds jaren beschrijving en teekeningen in portefeuille heb. [1])

Nu is deze *Osculina polystomella O. S.* gebleken niets anders te zijn dan de zgn. vrije toestand van een boorspons, zooals het eerst (1870) door CARTER [2]) is aangetoond; LENDENFELD [3]) identificeerde later (1895) *O. polystomella* met *Vioa viridis O. S.* Onafhankelijk van LENDENFELD ben ik tot ongeveer dezelfde slotsom gekomen.

Het lag derhalve voor de hand te vermoeden, dat *Poterion patera* misschien ook de „vrije vorm" was van een boorspons. Ik verzocht Dr. VAN KAMPEN er op te letten of op de plaatsen waar *Poterion* gevonden werd, ook schelpen, kalksteen, koralen of dergelijke voorkwamen, aangetast door boorsponzen. Middelerwijl onderwierp ik de exemplaren in het museum te Leiden aan een her-onderzoek. Dr. JENTINK was zoo vriendelijk mij toe te staan een der fraaie exemplaren voor nadere studie door te zagen. Ik heb dat gedaan met een exemplaar, waaraan ik het volgnummer 338 heb gegeven. Aan de verbreede basis van de spons vond ik tusschen de „wortels" veel zand en kiezelsteenen, maar ook een aantal schelpen en hoorns. Daaronder is een *Voluta scapha* Gmel. ongeveer 5 bij 10 cm.; deze schelp vertoont aan de oppervlakte talrijke gaten van een boorspons, welke de schelp gedeeltelijk heeft doorboord terwijl een deel van de oppervlakte reeds geheel is verwoest. De spons-massa aan de oppervlakte gaat direkt over in die van *Poterion*; mikroskopisch onderzoek van het drooge sponsweefsel op en in de *Voluta* toonde aan, dat de spicula met die van *Poterion* overeenkomen. Hiermede is mijn veronderstelling, dat de laatste de vrije toestand zou zijn van een boorspons bewezen juist te zijn.

Op het oogenblik durf ik nog niet te zeggen in hoeverre *Poterion* identiek is met een der talrijke soorten beschreven van *Cliona* of verwante genéra. Ik hoop dat in een uitvoerig stuk te doen, en dan tevens den vermoedelijken gang van zaken te bespreken hoe de eene vorm uit den anderen is ontstaan.

Wat aangaat de anatomie, zoover ik die nu aan spiritus-materiaal heb kunnen nagaan, zoo moge het volgende dienen.

Een longitudinale doorsnede door den wand van den beker, iets meer nabij de basis dan den rand, waar deze ongeveer 25 mm. dik is, doet zien dat er een duidelijke cortex aanwezig is, die aan beide

[1]) M. S. voor de Fauna and Flora of the Bay of Naples. Door onvoorziene omstandigheden moest ik de uitgave steeds weder uitstellen. Met genoegen kan ik thans echter zeggen, dat het persklaar maken van het omvangrijke M. S. vordert, en ik hoop, dat geen nieuwe onderbrekingen andermaal tot uitstel aanleiding zullen geven.

[2]) Ann. d. Mag. Nat. Hist. (4) V.

[3]) Zool. Anzeig. p. 150.

zijden ongeveer even dik is, nl. 1.5 mm. In het parenchym ziet men groote in- en uitstroomingskanalen, beide soorten omgeven door een min of meer doorschijnend weefsel, dat scherp afsteekt bij de rest van het parenchym. De grootere instroomingskanalen hebben een doorsnede van 0.5 mm., de grootere uitstroomingskanalen 0.5—1 mm. Met het omringende doorschijnende weefsel zijn de eerste gemiddeld 3 mm., de laatste 5 mm. in doorsnede. Beide soorten van kanalen loopen vrij diep, recht naar binnen; de eerste 15—20 mm., de laatste 10—15 mm. Reeds met het bloote oog is het te zien, dat die kanalen ronde openingen hebben, de mondingen van secundaire kanalen. De overige massa van het parenchym heeft het bekende voorkomen van een snede brood; daarin onderscheidt men verder de trabeculae, die het skelet vormen. Met uitzondering misschien van den rand van den beker liggen de instroomings-openingen, stomions, alleen aan de buitenzijde van den beker. Zij liggen in groepen, die een niet scherp begrensden omtrek hebben; toch zijn de „pore-area's" duidelijk waarneembaar als bruinachtige vlekken, donker afstekend van een geel-bruin frond. De area's hebben een gemiddelde doorsnede van ruim 1 mm. en liggen op ongeveer dezen zelfden afstand van elkander.

Somtijds zijn de area's wat ingezonken; dat is nog meer het geval in gedroogde exemplaren. De openingen zelf heb ik bij beschouwing van de spons-oppervlakte niet kunnen zien; zij zijn blijkbaar geheel of grootendeels gesloten. Mikroskopische doorsneden toonen echter dat zij in rijen liggen die uit een gemeenschappelijk middelpunt ontspringen. De stomions zijn de openingen van korte, nauwe kanaaltjes, die zich uitstorten in de juist onder de dermis gelegen kanalen waarvan er gemiddeld 5 of 6 in een gemeenschappelijk centrum samenkomen, zooals boven aangeduid, en welke reeds door HARTING zijn waargenomen. Tangentiëele sneden toonen duidelijk aan, dat deze kanalen soms vertakt zijn. Daar waar deze corticale kanalen samenkomen, zetten zij zich in één kanaal voort, dat de cortex geheel doorloopt in een richting ongeveer loodrecht op de spons-oppervlakte. Het is duidelijk, dat dit geheele corticale stelsel equivalent is met de chonae [1]) der Tetraxonia en dan ook met dien naam moge aangeduid worden.

---

[1]) Het behoeft nauwelijks gezegd te worden, dat ik de term *chona* gebruik in den zin van SOLLAS, en niet in dien van LENDENFELD. Deze laatste toch gebruikt voortdurend chona ongeveer als synonym met sphincter, wat natuurlijk niet te verdedigen is. SOLLAS schreef in 1880 (Ann. & Mag. Nat. Hist. (5) v. p. 135): "The cortex is traversed by the" intermaginal cavities of Bowerbank, or, as I shall term them, the "cortical funnels" or "chonae". They consist essentially of a

De instroomings-chonae leiden in de primaire instroomings-kanalen; sommige dezer loopen, als boven gezegd, over een lengte van 15—20 mm. min of meer recht door, in een richting loodrecht op de spons-oppervlakte; dan buigen zij om en loopen ongeveer evenwijdig aan de oppervlakte. Gedurende hun loop geven zij takken af, welke zich op hun beurt vertakken en ten slotte eindigen tusschen een groep mastichorions. Deze zijn ellipsoïdisch van vorm en monden met wijde apopyle in uitstroomingsvaten; het stelsel is dus eurypyl. Een zeker aantal uitstroomingskanalen vloeit samen en loopt dan uit in de bovenvermelde grootere kanalen, die ten slotte de cortex evenzeer met chonae doorboren, welke aan de binnenzijde van den beker naar buiten monden met een proct.

Het weeke weefsel, dat de groote vaten omringt, heeft een zeer merkwaardigen bouw. Ik heb dit soort weefsel bij vele sponzen aangetroffen; maar zeer duidelijk ontwikkeld juist in de zgn. *Osculina polystomella*. LENDENFELD heeft dit weefsel ook gezien en zegt, in zijn beschrijving van "*Papillella suberea*" (l.c. p. 104—105): "Das hyaline Gewebe, welches die Hauptkanäle umgiebt . . . . . besteht aus einer glashellen Grundsubstanz, in welcher zahlreiche multipolare und auch bipolare Zellen liegen, deren lange und schlanke, verzweigte Ausläufer überall mit einander anastomosiren, so dass hier ein engmaschiges, spongiöses Netz zu Stande kommt. In einigen der Knotenpunkte dieses Fadennetzes liegen die Zellleiber mit ihrem kugligen Kern, in anderen trifft man nur unbedeutende Plasmaanhäufungen an." In mijn m.s. beschrijving van dit weefsel in Clionidae heb ik een eenigszins andere voorstelling van de zaak gegeven; in *Poterion* vind ik hetzelfde soort weefsel, alleen zoo mogelijk nog duidelijker. Het reticulum wordt n.l. niet eenvoudig gevormd door anastomoseerende draadvormige uitloopers der cellen. Door zorgvuldige beweging met de mikrometerschroef komt duidelijk aan het licht, dat een aantal schijnbaar draadvormige uitloopers in werke-

tube divided by a sphincter into a shorter proximal and a longer distal part, the "ectochone" and "endochone" respectively". Afgezien van den klaarblijkelijken lapsus, dat in SOLLAS' zinsnede de woorden ecto- en endochone op de verkeerde plaats staan, laat SOLLAS's bedoeling aan helderheid niets te wenschen over. Dat is dan ook algemeen erkend. LENDENFELD heeft intusschen een andere meening. Zoo schrijft hij bijv. in 1897 (Die Clavulina der Adria, p. 102—103): "In halber Höhe der Rinde . . . . . vereinigen sich diese Sammelkanäle zu vertikalen Stammkanälen . . . . ." En verder: "Oben ganz dünn, verdickt sich diese schlauchförmige Einfassung des Stammkanales . . . . . nach unten hin sehr beträchtlich und bildet proximal, in der Umgebung der erwähnten Verengung, mächtig verdickt einen starken Sphincter, der als eine Chone aufzufassen ist". Ik wensch de zaak hier niet in extenso te bespreken; de vermelde aanhalingen zijn voldoende en laten geen plaats tot misverstand open.

lijkheid de optische doorsneden zijn van dunne vliezen. In *Poterion* hebben deze vliezen somwijlen een groote uitgebreidheid, meer nog dan bij *Osculina* (*Cliona*) het geval is. Het weefsel herinnert in veel opzichten zeer aan het lymphoïde of reticulair bindweefsel. Tegenover de oude voorstelling plaatsen BIZZOZERO en RANVIER die, volgens welke het reticulum zou bestaan uit bindweefseldraden bekleed met zeer platte cellen, een meening, die ook PEKELHARING (Voordrachten over weefselleer) toegedaan is. Of nu ook bij *Poterion* fibrillen voorkomen waartegen zich platte cellen aanleggen, durf ik nog niet met zekerheid zeggen. Ik geloof het wél. Ik heb de preparaten op zeer verschillende wijzen gekleurd; vat ik de verschillende beelden samen dan meen ik gladde draden te kunnen onderscheiden — de vermoedelijke fibrillen, resp. bundels van fibrillen — en min of meer korrelige — de uitloopers der cellen. De bewuste vliezen zouden dan vliesvormige verbreedingen dier laatste uitloopers zijn.

Wat het skelet van *Poterion* aangaat, zoo bestaat dit uit een samenhangend, zeer stevig, trabeculair netwerk, waarvan elk balkje uit een groot aantal dicht op elkaar gepakte spicula bestaat. Bij *Osculina* vond ik, dat sommige spicula door een, zij het ook geringe, hoeveelheid spongine worden samengehouden. Bij *Poterion* is meer spongine; intusschen wordt het uitsluitend aangetroffen bij die spicula, welke in het asgedeelte der balkjes liggen. Daaromheen is dan dus een mantel van niet door spongine verbonden spicula. De spicula van *Poterion* zijn tylostyli; de spicula welke ik [1]) spinispirae heb genoemd, heb ik tot nog toe bij geen *Poterion* gevonden. Wij weten echter, vooral door de onderzoekingen van TOPSENT, dat in het genus *Cliona* zelf spinispirae dikwerf zeer zeldzaam zijn of ontbreken, vooral juist in het zgn. vrije stadium. Ik houd dan ook *Papillina suberea O.S.* voor identiek met *Osculina polystomella O.S.* en evenzeer met *Papillina nigricam O.S.* en *Viva viridis O.S.* Zij zijn allen, zooals ik later nader hoop te staven, niets anders dan gewijzigde vormen van de zeer variable *Cliona celata*. LENDENFELD (1897 l.c. p. 99) houdt *Papillina suberea O.S.* voor iets anders dan *Papillina nigricans O.S.* Dat is voornamelijk op grond van de afwezigheid van spinispirae in de eerste, in een origineel exemplaar van welke LENDENFELD deze spicula niet kon aantoonen. Nu heb ik echter in de verzameling van het Zoölogisch Station te Napels een spons gevonden door SCHMIDT zelf als *P. suberea* gedetermineerd; in dàt exemplaar vond ik wèl spinispirae. Ik vond ze ook in sommige der exemplaren, die ik indertijd in Triëst verzamelde. Ik kan daarom *nigricans* en *suberea*

[1]) Over den vorm van sommige Kiezelspicula bij sponzen (Zittingsversl. Kon. Akad. Wetensch. 1902).

niet als twee verschillende species beschouwen. En derhalve kan, m.i. uit de afwezigheid van spinispirae geen grond geput worden om *Poterion* in een andere groep te brengen dan *Cliona*, waar de eerste in alle andere opzichten geheel met „*Osculina*" in bouw overeenkomt.

Leiden, 14 Mei 1908.

Physiologie. — De Heer ZWAARDEMAKER biedt eene mededeeling aan van den Heer A. K. M. NOYONS, Adsistent bij het Physiol. Lab. te Utrecht: „*Over hardheidsbepaling bij spieren.*"

(Mede aangeboden door den Heer C. A. PEKELHARING).

Bij een onderzoek naar de oorzaken en eigenschappen van den autotonus trof het hoe eene spier harder scheen te worden, naarmate haar autotonus toenam. De hardheid eener spier werd tot dusverre immer schattenderwijs bepaald door digitaal betasten. Het bovengenoemde feit deed omzien naar middelen om nader in maat en getal dergelijke hardheidsveranderingen uit te drukken, daar men hierbij met eene approximatieve bepaling niet kan volstaan.

Een aanleiding tot afzonderlijke beschrijving mijner onderzoekingen omtrent de hardheidsbepaling bij spieren vind ik in eene mededeeling door J. VON UEXKÜLL [1]) van 18 April j.l.: „Die Verdichtung der Muskeln", waarin hij zegt: „wir besitzen zwar kein geeignetes Instrument, um das Hartwerden der Muskeln zu messen", terwijl hij eindigt: „Ich habe geglaubt, auf diese wichtige aber allzusehr vernachlässigte Eigenschaft der Muskeln hinzuweisen, in der Hoffnung dass sich jemand findet der einen brauchbaren Apparat konstruiert, um die Muskelverdichtung unabhängig von der Muskelverdickung zu registrieren."

In de mineralogie zijn hardheidsbepalingen reeds sinds tientallen van jaren uitgevoerd, waarbij tal van methoden in gebruik werden genomen, die in den daar aangegeven vorm evenwel niet op levende objecten kunnen worden toegepast. Alleen brengt de litteratuur voor het begrip „hardheid" in het algemeen gegevens bijeen, waarvoor ik ter nadere kennisname naar eenige schrijvers verwijs [2]). In het kort zij echter hier het volgende medegedeeld.

---

[1]) J. v. UEXKÜLL. Die Verdichtung der Muskeln. Originalmitteilung. Zentralblatt für Physiologie. Bd. XXII N°. 2.

[2]) H. ROSENBUSCH und E. A. WÜLFING. Physiographie Allgemeiner Teil. Stuttgart 1904.

G. TSCHERMAK. Lehrbuch der Mineralogie. Wien 1905.

EGON MÜLLER. Ueber Härtebestimmung Inaug. Dissert. Jena 1906.

Hardheid is een collectief begrip, omvattend en typeerend een som van eigenschappen: cohaesie, elasticiteit, plasticiteit, glijding, splijtbaarheid en breuk. Juist van de waarde, die in een concreet geval aan een der genoemde eigenschappen meer in het bijzonder wordt toegedeeld, hangt het af welke algemeene definitie van hardheid zal gegeven worden. Voor levende objecten vallen de glijding, splijtbaarheid en breuk weg. Van een meer gedetailleerde beschrijving der drie overblijvende eigenschappen: de cohaesie, elasticiteit en plasticiteit, afzonderlijk, zie ik af. Doch indien men acht geeft op deze drie kwaliteiten, zal men zich zeer goed kunnen vereenigen met AUERBACH's [1]) definitie van hardheid: „Härte ist eine Art von Festigkeit, nämlich der Widerstand gegen die Bildung von Unstetigkeiten oder dauernden Deformationen beim Drucke zweier sphärischer Oberflächen gegen einander, und kann Eindringungsfestigkeit genannt werden... Sie ist quantitativ durch den Grenzeinheitsdruck im Mittelpunkte der Druckfläche bestimmt."

De bepaling der hardheid kan absolute of relatieve waarden leveren. Onder de methoden der relatieve bepaling bleek die van THOULET [2]) bruikbaar gemaakt te kunnen worden tot betrekkelijke hardheidsbepaling van levende objecten.

THOULET onderzocht de elasticiteit van gesteenten en vond punten van vergelijking daarvoor in het aantal terugkaatsingen en in den hoek van terugkaatsing van een opgehangen, slingerenden bal. Inderdaad, indien men een hard, doch elastisch voorwerp laat vallen op een ander object, zal het onder meer van de hardheid der getroffen vlakte afhangen, hoe vaak en hoe ver de terugkaatsing zal geschieden. Indien men nu dit beginsel in toepassing brengt bij een veel weeker object gelijk de spier, zullen deze terugkaatsingen, hoewel in mindere mate, toch op dezelfde wijs kunnen plaats vinden, hetgeen de ervaring dan ook bevestigd heeft.

De hoek van terugkaatsing van een vallend bolletje, respectievelijk het aantal waarneembare tikken of terugkaatsingen daarvan hangt af:

1°. van de cohaesie, elasticiteit en plasticiteit van het vallend bolletje

2°. van de cohaesie, elasticiteit en plasticiteit van het getroffen voorwerp, in casu de spier.

Daar nu juist bij vergelijkende bepalingen sub 1°. constant blijft, zal sub 2°. de eenige veranderlijke, bepalende factor wezen.

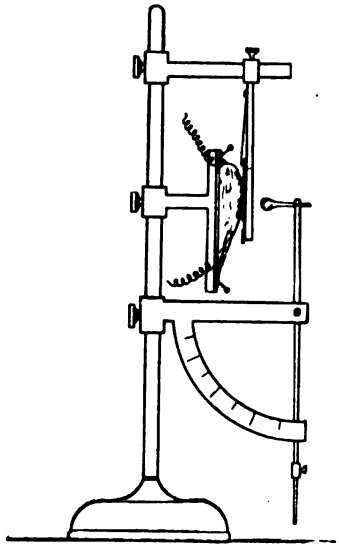
Het onderzoek heeft als volgt plaats met een apparaat dat ik

---

[1]) F. AUERBACH. Kanon der Physik pag. 119. Leipzig 1899.

M. J. THOULET. Recherches sur l'élasticité des mineraux et des roches. Comptes rendues de l'Academie des sciences. Paris. Tome 96. 1883.

physiologische sclerometer noem. Een kleine slinger, met vast draaipunt, waarvan de korte hefboomsarm, 6 cM. lang, omhoog wijst,



Physiologische Sclerometer. Schematische teekening.
Figuur 1.

draagt op den kop van dien korten arm een gesteelde glastraan, terwijl de andere, langste arm, 15 cM. lang, een verschuifbaar gewichtje bezit, waardoor het moment van dien hefboomsarm veranderlijk is en wisselende waarden kan doorloopen bij gelijkblijvend moment van den korten hefboomsarm. Hierdoor kan de kracht variabel worden gemaakt, waarmede de kop van de glastraan het object treft. Om de levende kracht van het vallend voorwerp te vergrooten kan men den slinger verschillende begin-amplituden geven. Op een gradenboog, waarlangs de langste hefboom zich beweegt, wordt deze valhoogte in hoekmaat uitgedrukt.

De te onderzoeken spier wordt door hare beide pezen met kleine speldjes op een ietwat ruwe oppervlakte, in casu een hard kurkplaatje, bevestigd, om verschuiving der spier door den val van het kloppend voorwerp te voorkomen. Men verrichte op deze wijs de hardheidsbepaling bij eene spier onder isometrische verhoudingen, want, wanneer men de spier onder isotonische condities onderzoekt, worden de gegevens veel minder betrouwbaar, resp. onduidelijk, daar: 1°. bij verkorting der spier het te treffen punt door de verkorting van plaats veranderd is en alleen teruggevonden kan worden door het van te voren met een kleurstof te merken; 2°. het voor de rekking benoodigd gewicht de hardheidsverschillen kleiner schijnt te maken.

Men bepaalt hetzij langs acustischen weg, hetzij langs photogra-

phischen weg, het aantal malen dat de glastraan teruggekaatst wordt op de spier alvorens in rust te komen. De photographische registratie heeft het voordeel, dat men tevens de uitslagwijdte der terugkaatsingen kan volgen.

De photographische registratie geschiedt aldus: het licht van een booglamp van 220 volt bij 10 ampère wordt door een condensor. min of meer samengedrongen tot een stralenbundel, die zijn brandpunt in een diaphragma heeft. Dit brandpunt geldt op zijn beurt als lichtbron en verschaft door middel van een biconvexe lens den uitgezonden parallellen stralenbundel. Deze bundel bereikt de verstelbare spleet van een klein kastje, dat in zijn tegenoverliggenden wand een cylinderlens van GARTEN draagt. Het licht, door de spleet binnengetreden, wordt door de cylinderlens, die een verdeeling bezit, samengeknepen tot een horizontale lichtlijn, welke door een andere spleet in een tweede, grooter kastje valt op een roteerenden trommel, waarop gevoelig broomzilverpapier van Dr. SCHÄEFELEN bevestigd wordt. Deze trommel, lichtdicht daarin besloten door middel van lichtvrije assen, wordt voortbewogen door een uurwerk, zooals men bij de telegraphische Morse-apparaten bezigt. Tusschen cylinderlens en het groote kastje wordt de lange hefboomsarm van den sclerometer geplaatst, die bij zijn bewegingen een schaduwbeeld doet verplaatsen op het gevoelig broomzilverpapier.

Op deze wijze geschiedde de volgende proef: de M. sartorius van Rana temporaria wordt afwisselend doorstroomd door een electrischen stroom, ontstaande door een potentiaal verschil van 1.4 volt. Hiertoe waren in de kurken onderlaag van de spier twee koperen plaatjes verzonken, die als electroden voor den stroom dienst doen, terwijl door een wip de stroomrichting veranderd kan worden. Aan de distale pees bevindt zich bij het begin van het experiment de anode; later wordt de stroom omgekeerd, om te eindigen met de oude stroomrichting. In onderstaande tabel komen de uitslagbreedten der eerste 4 terugkaatsingen voor in mM.

Terugkaatsing	Anode aan de distale pees		Kathode aan de distale pees				Anode aan de distale pees	
I	52.5mM.	52mM.	54mM.	53 mM.	54mM.	53mM.	50 mM.	50 mM.
II	29.5	29	31	30	31	31	29.5	29
III	21	21	23	22.5	22	22	20.5	21
IV	16	16	18	17	17	17	16	15.5

De volgende tabel geeft het verschil tusschen een galvanisch doorstroomden en niet doorstroomden M. sartorius van Rana temporaria.

Terug-kaatsing	Niet doorstroomde spier			Electrisch doorstroomde spier Anode aan de distale pees			
I	40 mM.	40.5mM.	40.5mM.	45 mM.	43 mM.	43 mM.	43 mM.
II	24.5	25	25	28	26.5	26	27
III	16.5	17	17	18	17.5	17	17.5
IV	11	11	11	12	11.5	11.5	12

Dat bevloeiing eener spier met onderling aequimoleculaire zoutsoluties, waarvan de effecten op den autotonus antagonistisch zijn, de hardheid wijzigen kan, blijkt uit het volgende, mede voor den M. sartorius van Rana temporaria geldend.

Terug-kaatsing	Bevloeiing met kaliumchloride				Bevloeiing met natriumchloride					Bevloeiing met kaliumchloride			
	mM.	mM.	mM.	mM.	mM.	mM.	mM.	mM.	mM.	mM.	mM.	mM.	mM.
I	48	42.5	41	40.5	40	37	33	38	38	38	38	38	39
II	33	25.5	25.5	26.5	25.5	24.5	22.5	24	23.5	23	22	22	23
III	24	17	16.5	17	16.5	17.5	16.5	16	15	15	14	14.5	14.5
IV	17 5	11	10.5	11.5	12	12.5	12	10	10	9.5	9	9	9.5
V	12.5	8.5	8	8	9	9	9	7.5	8	8	8	8	8
VI	9	7	7 5	7.5	7.5	8	8	7	7	7	7	7	7

Voor een platte spier met parallelen vezelloop, gelijk de M. sartorius van Rana bezit, eigent zich de boven beschreven methode vrij goed, doch niet in alle opzichten. Met de verkorting toch gaat een dikker worden van de spier gepaard, waardoor de afstand tusschen spier en glastraan een klein weinig gewijzigd wordt. Dit is niet van groot belang voor den dunnen M. sartorius, doch wanneer men experimenteert met spieren als M. gastrocnemius, wordt dit verschil veel aanzienlijker, zoodat er rekening mee dient gehouden. Daarbij komt, dat de eigenaardige ronding van de spieroppervlakte de plaats van bekloppen allicht eenigszins kan veranderen en ten slotte blijft de glastraan, wanneer men met een kleine belasting van den langen hefsboomsarm werkt, soms lichtelijk kleven aan de spier.

Om deze en dergelijke bezwaren te ondervangen werden nog de

volgende wijzigingen aangebracht. Tusschen spier en kloppende glastraan wordt een dun glazen plaatje ingeschoven dat de tikken opvangt en aan de spier overdraagt. Onder deze omstandigheden is de hoek van terugkaatsing respectievelijk, het aantal botsingen afhankelijk van:

1°) de cohaesie, elasticiteit, plasticiteit van den kloppenden glastraan,

2°) de cohaesie, elasticiteit, plasticiteit van het tusschen geschoven glazen plaatje,

3°) de cohaesie, elasticiteit, plasticiteit van het te onderzoeken object.

Daar sub 1°) en sub 2°) constant blijven, is sub 3°) de eenige veranderlijke.

Om een bepaling te kunnen doen, dienen de volgende technische voorzorgen in acht genomen te worden. Het glasplaatje, een dekglaasje, is licht bewegelijk opgehangen aan een tweetal tamelijk stugge paardenharen. De spier drukt nu dit glazen plaatje tegen een metalen onbeweeglijke vork, zoodat het glazen plaatje alleen bewegingen kan uitvoeren in één richting nl. naar de spier toe, zoodra het glasplaatje door den kloppenden glastraan wordt getroffen. Bij elke aanraking aan het dekglaasje geeft het glazen bolletje een duidelijk hoorbaren tik. Het aantal tikken is gemakkelijk te tellen en is een vrij nauwkeurige maat voor het aantal feitelijke bewegingen van het glaasje, zonder daarmede numeriek over een te stemmen. Naarmate het dekglaasje meer tegen de vork wordt gedrukt door een hardere spiermassa, naar die mate zullen de slingeringen van het hefboompje langer een wijdere amplitudo behouden en zullen ze ook frequenter voorkomen.

De valhoogte is van groot belang voor het te verkrijgen effect, in de eerste plaats op aantal en uitslag der slingeringen.

Wanneer men bij verschillende valhoogten het daarmede overeenstemmend aantal hoorbare tikken opneemt voor een zelfde spier, kan men deze in kromme brengen, waarbij de ordinaat het aantal hoorbare tikken aangeeft en de abscis de valhoogte in hoekwaarde. De aldus verkregen kromme vertoont een eigenaardig beloop.

De hierboven beschreven proef werd genomen bij een doode spier om zooveel mogelijk alle veranderlijke factoren van het levend object te ontwijken. Deze doen zich namelijk gelden, zooals aan den dag kwam door proeven, waarbij eerst een kromme ontworpen werd van waarnemingen bij een levende spier en den volgenden dag een tweede kromme kon gevormd worden uit waarnemingen bij de onderwijl afgestorven spier, die onder een stolp met verzadigden waterdamp en thymol-damp, respectievelijk voor uitdrogen en rotten werd bewaard. De in kromme gebrachte waarden zijn gemiddelden

uit minstens 5 waarnemingen telkens, die niet noemenswaard van elkaar afweken.

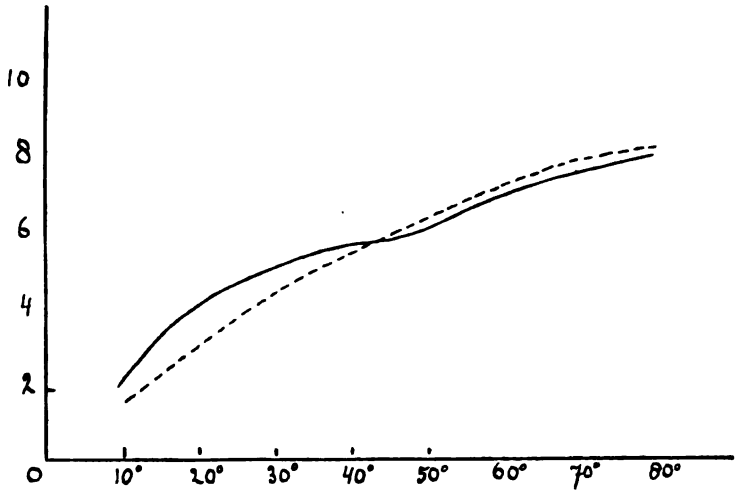


Fig. 2.
Hardheid ten opzichte van verschillende valhoogten bij een spier in dooden en levenden toestand.
——— = levende spier. ------ = doode spier.

De ordinaat geeft het aantal hoorbare tikken aan en de abscis de begin-valhoogte in hoekwaarde.

Op verschillende wijzen kan men de hardheid eener spier veranderingen doen ondergaan, die òf blijvend zijn, òf voldoende lang voortbestaan voor het bepalend onderzoek:

1°. door galvanische doorstrooming van een spier;

2°. door bevloeiïng met aequimoleculaire zoutsoluties;

3°. door faradische prikkeling, hetzij direct, hetzij indirect, zoodat de spier in tetanus komt;

4°. door verwarming, respectievelijk afkoeling.

Een voorbeeld van de twee eerstgenoemde manieren werd reeds vroeger gegeven, van de beide andere wijzen volge er thans eene: een spier wordt door indirecte prikkeling met een faradischen stroom afwisselend tot tetanus gebracht. Op daarmede overeenkomstige momenten hebben de hardheidsbepalingen plaats. De onderstaande tabel bevat telkens de uitslagbreedte der eerste 8 terugkaatsingen, die photographisch waren opgenomen; tevens werd de duur dier 8 terugkaatsingen berekend.

Hieruit blijkt dat bij vergelijking der eerste 8 terugkaatsingen de amplitudo niet alleen verandert, maar dat ook de tijd, waarin deze slingeringen plaats vinden, op en neer gaat met de meerdere of

M. gastrocnemius van Rana temporaria.

	Normale spier	Geprikkeld tot tetanus	Niet geprikkeld	Geprikkeld tot tetanus	Niet geprikkeld	Geprikkeld na rust
I	56 mM.	61 mM.	56 mM.	57 mM.	56 mM.	59 mM.
II	38	45	39	43	40	44.5
III	29	35	29	33	31	33
IV	22	28	22.5	26	23.5	26
V	17	22.5	17.5	21	18	21.5
VI	13	18.5	13	16.5	14	17
VII	11	15.5	11.5	13.5	12	13.5
VIII	9.5	12.5	10	11.5	10	11.5
	Totale duur der eerste acht terugkaatsingen.					
	4.4 sec.	4 sec.	4.3 sec.	4 sec.	4.3 sec.	4 sec.

geringere hardheid van de spier. Naar mate het experiment voortschrijdt, kan men in de tabel opmerken dat de hoogten der terugkaatsingen grooter worden, ook op de tijdstippen, waarop de spier jeu geprikkeld wordt. Dit moet in verband gebracht worden met de veranderingen in den voortdurenden contractietoestand (tonus), welke bij elke vermoeide spier ontstaan. Dat de spier werkelijk vermoeid werd, daarvoor pleit: 1°. dat de spier zichtbaar zich minder contraheert; 2°. dat veranderingen in duur en hoogte der terugkaatsingen na herhaalde prikkeling geringer uitvallen; 3°. dat na de rust het prikkeleffect weer in overeenstemming is met wat in het begin van het experiment werd waargenomen.

Nog worde gegeven het tabellarisch overzicht eener proef, waarbij de spier aan het eind van het experiment volkomen onprikkelbaar was geworden, blijkens het uitblijven van zichtbare contracties, zoowel voor indirecte als directe faradische prikkeling, terwijl toch nog kleine veranderingen in hardheid waarneembaar bleken.

Wordt een dwarsgestreepte spier verwarmd, dan verkort zij zich; hiermede gaan hardheidsveranderingen blijkens de proeven gepaard. Om dit na te gaan, werd de spier in den sclerometer, in plaats van op een kurkplaatje bevestigd op den dunwandigen, roodkoperen bodem van een temperator, die nu als rustvlakte dienst doet. Door dezen temperator, zooals THUNBERG dien aangaf voor het onderzoek der

M. gastrocnemius van Rana temporaria
onprikkelbaar wordend naar het gewone spraakgebruik.

	Normale spier	Geprikkeld	Niet geprikkeld	Geprikkeld	Niet geprikkeld	Geprikkeld
I	53 mM.	60 mM.	48 mM.	52 mM.	48 mM.	50 mM.
II	40	50	35	38	35	36
III	28	36	24.5	26	24.5	26.5
VI	21	27	17.5	18	17.5	19
V	15	21.5	13	14	13	15
VI	12.5	17	12	12.5	12	12.5
VII	10.5	13.5	11	11	11	11.5
VIII	10	11.5	10	10	10	10
	Totale duur der eerste acht terugkaatsingen.					
	5.4 sec.	5.2 sec.	5.2 sec	5 sec.	4.4 sec.	4.8 sec.

M. gastrocnemius van Rana temporaria.

	Temperatuur in temperator			
	12.5° Celsius		56° Celsius	
I	49 mM.	49 mM.	50 mM.	50 mM.
II	38	39	41	41
III	27	27.5	31	30.5
IV	19.5	20	25	24.5
V	16	16	21	21
VI	13.5	14	18	18
VII	13	13	16	16
VIII	12	12.5	14.5	14.5
	Hoorbare tikken			
	7	7	10	10
	Totale duur der eerste acht terugkaatsingen in abscis-lengte			
	3.6 cM.	3.8 cM.	3.2 cM.	3 cM.

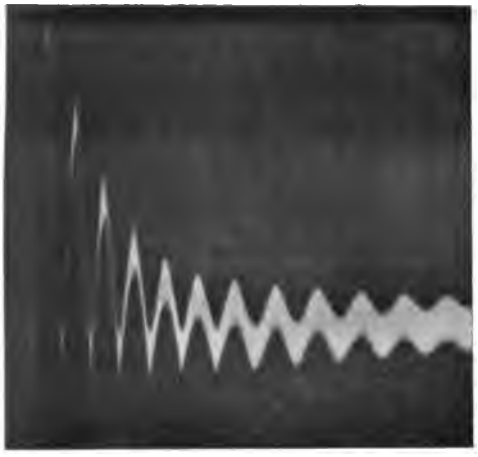


Fig. 3.
bij 12,5° Celsius.

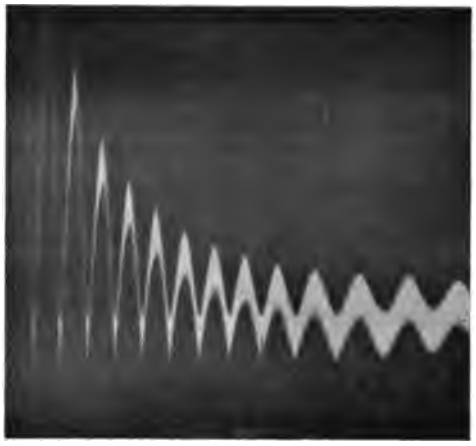


Fig. 4.
bij 56° Celsius.

Sclerometrische opnamen der hardheid van M. gastrocnemius van Rana temporaria.

kou- en warmtepunten van de huid, kon men afwisselend en naar verkiezen warm en koud water laten stroomen. De koperen bodem draagt de warmte over aan de spier; de temperatuur in den temperator en die, welke de spier verkrijgt, zal niet zoo spoedig dezelfde zijn, maar staat toch in nauwe betrekking telkens daarmede.

Ter demonstratie geef ik hier een tweetal photographische opnamen van de slingeringen van den sclerometerarm, gelijk ze vervaardigd werden en waaruit onder andere de bovenstaande tabel gedeeltelijk werd samengesteld. Figuur 3 geeft de sclerometrische opname der hardheid van een spier bij een temperatuur van 12.5° Celsius in den temperator, terwijl figuur 4 de opname laat zien bij verwarming dier zelfde spier tot 56° Celsius. Zie de figuren 3 en 4.

Wanneer men de spier niet al te hoog verwarmt, treedt na afkoeling weer een vermindering der hardheid op, al bereikt ook de spier niet volkomen haar oorspronkelijken hardheidsgraad.

De onderstaande tabel maakt zulks duidelijk.

M. gastrocnemius van Rana temporaria.

	Temperatuur in temperator						
	13° Celsius		61° Celsius			11° Celsius	
I	49 mM.	49 mM.	50 mM.	50 mM.	50 mM.	49 mM.	49 mM.
II	37	38	42	41	41	38	39
III	28	30	34	33	33	30	30
IV	24	24.5	29	28	28	25	25
V	20	20	25	25	24	21.5	22
VI	17	17.5	22	22	21.5	18.5	19
VII	14	15	20	19.5	19	16.5	17
VIII	12.5	12.5	18	17.5	17.5	14.5	15
	Hoorbare tikken						
	10	10	15	16	16	13	13

Men kan eene dergelijke verwarming en afkoeling eenige malen herhalen, terwijl daarmede evenredig het aantal terugkaatsingen blijft varieeren, mits men slechts zorg drage dat niet gedurende te langen tijd een te hooge temperatuur inwerkt op de spier, daar er dan een duidelijk merkbare, permanente hardheid achterblijft.

Dierkunde. — De Heer VOSMAER biedt eene mededeeling aan van den Heer J. BOEKE: „*Over den bouw van de ganglicencellen in het centrale zenuwstelsel van Branchiostoma lanceolatum.*" (2e mededeeling).

(Mede aangeboden door den Heer L. BOLK).

a. *Het infundibulairorgaan.*

Eene van den in de vorige mededeeling[1]) voor de overige cellen beschreven bouw geheel afwijkende structuur vertoonen de cellen van het eenige jaren geleden door mij in deze verslagen beschreven[2]) gedifferentieerde gedeelte van den ventralen hersenwand van Branchiostoma, dat naar de plaats, waar het voorkwam en de vermoedelijke homologie, die zich daaraan liet vastknoopen, het *infundibulairorgaan* werd genoemd.

Van de schrijvers, die zich na 1902 met het onderzoek van het centraal zenuwstelsel van amphioxus hebben bezig gehouden, neemt KUPFFER[3]) de in bovengenoemd opstel gegeven beschrijving over en spreekt slechts van een uit lange cylindercellen gebouwd orgaan, met gebogen trilharen en protoplasma, dat een hyalien karakter vertoont. KUPFFER homologiseert het orgaan met het tuberculum posterius der cranioten-embryonen. JOSEPH[4]) noemt het orgaan slechts terloops, en voegt aan de beschrijving niets toe. EDINGER[5]) die preparaten, volgens de methode van BIELSCHOWSKY vervaardigd, onderzocht, spreekt van „das aus grossen Flimmer- und Sinneszellen bestehende Infundibularorgan", zonder aan te geven waarop deze bewering, dat het uit twee celsoorten zou bestaan, berust. In zijne afbeeldingen is er niets van te zien. WOLFF[6]) meent, het orgaan vertoont veel overeenkomst met het uit het centrale zenuwstelsel van hoogere vertebraten bekende gelatineuse weefsel, doch heeft blijkbaar van de werkelijke samenstellende deelen er van niet veel gezien. Verdere opgaven zijn in de litteratuur niet te vinden; een nauwkeurige beschrijving van dit gedeelte van den hersenwand is dus niet overbodig. Hiertoe zijn in de eerste plaats noodig zeer dunne (3μ), juist georiënteerde mediane doorsneden door de hersenmassa, verder frontale en dwarsdoorsneden, terwijl de opgaven van EDINGER nog het bestudeeren

---

1) Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. Wis- en Nat. Afd. 1907.
2) Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. Wis- en Nat. Afd. 1902, p. 856.
3) Handbuch der Entwickelingslehre (HERTWIG), Bd. 2, 3de deel.
4) Verhandl. d. Anat. Gesellsch. 18. Vers. 1904.
5) Anat. Anzeiger, Bd. 28, 1906.
6) Biol. Centralblatt. Bd. 27, 1907.

van een aantal BIELSCHOWSKY-preparaten noodzakelijk maakten, voór een juist oordeel kon worden verkregen. Vandaar de lange duur van het onderzoek.

Dat het inf. orgaan een voor het dier belangrijke functie moet uitoefenen, blijkt uit het zeer vroeg optreden en het constante voorkomen er van. Reeds bij larven met nog slechts 3 primaire kieuwspleten is het gedifferentieerde epithelium duidelijk te zien. Juist op de plaats, waar het enge centraalkanaal in de verwijding van den hersenventrikel overgaat, zien wij de ventrale begrenzingslijn van het centraalkanaal zich verheffen om dadelijk daarna weer tot het vorige niveau te dalen. Deze verheffing wordt veroorzaakt door de verlenging van de cellen van den ventralen wand, die tot lange cylindervormige, regelmatig naast elkaar liggende elementen uitgroeien, elk van een trilhaar voorzien.

Voor de ontwikkeling van het orgaan niet zonder belang is, dat deze verlenging van de cellen zich eerst aan de linkerzijde van de mediaanlijn vertoont; daarna zijn de palissadenvormige cellen ook aan de rechterzijde te zien. Eerst veel later wordt het geheel tot een enkelvoudig, zich met het midden in het mediaan vlak bevindend complex van cellen. In verband met nog aan het volwassen orgaan op te merken eigenaardigheden in het verloop van de uit de cellen van het orgaan ontspringende zenuwvezels wijst dit op een oorspronkelijk bilateralen oorsprong van het orgaan.

Het verlengen van de cellen tot cylindrische elementen is de eenige vormverandering, die zich vertoont. Van eene instulping van den wand vóór het orgaan blijkt niets.

Aan goed gefixeerde en gekleurde preparaten is daarbij reeds bij zoo jonge dieren te zien, dat de cilien van de cellen van het infundibulairorgaan boogvormig naar achteren gericht zijn, terwijl de cilien van alle cellen er om heen naar voren, naar den neuroporus, zijn gericht.

Bij oudere exemplaren blijft het beeld gedurende geruimen tijd hetzelfde. Slechts groeien de cellen nog meer in de lengte uit, terwijl de kern klein en kogelrond wordt, en geheel aan de basale zijde van de cel komt te liggen. De cellen zelf zijn alle naar achteren gericht, d. w. z. het vrije uiteinde ziet naar voren. (fig. 8).

Wat de topographie van het orgaan betreft, zoo kan ik volstaan met hiervoor naar mijne vorige mededeeling te verwijzen.

Slechts zij hier vermeld, dat ook in latere stadien van ontwikkeling noch van een tweede soort van cellen, noch van een instulping van den ventrikelwand vóór het inf. orgaan (KUPFFER) een spoor te vinden is. De mediane doorsnede door het volwassen orgaan is in

fig. 1 afgebeeld. Men ziet daaruit, dat de cellen nu niet langer schuin liggen, doch loodrecht staan op de lengte-as van het lichaam. Bij iets jongere dieren vindt men de cellen dikwijls zoo, dat de uiteinden naar het centraalkanaal gekeerd, reeds deze richting hebben aangenomen, doch het grootste deel van het cellichaam nog gebogen is. (fig. 4*a*). Vormveranderingen van de geheele hersenmassa, waarbij de oorspronkelijk vrij sterk in de lengte uitgerekte hersenblaas voor een korteren meer gedrongen vorm plaats maakt, spelen hierbij eene rol.

Zooals reeds werd aangestipt, dragen de cellen van het infundibulairorgaan een lang trilhaar, dat naar achteren omgebogen is. Alle trilharen tezamen vormen een soort van pluim, die caudaalwaarts gericht tot in het zich vernauwende centraalkanaal reikt. De cilien der omliggende cellen zijn alle naar voren, naar den neuroporus, gericht. Bij jonge dieren, die levend onder het mikroskoop gebracht, door de doorzichtigheid van het weefsel in de omgeving nog een duidelijk beeld van den hersenventrikel vertoonen, geeft dit een eigenaardig beeld. Alle cilien blijken dan strakke recht loopende haren te zijn, die in een dichten bundel gericht zijn naar den voorsten neuroporus en, zoolang deze nog open is, tot in de opening vervolgd kunnen worden. Aan dunne doorsneden is dit feit gemakkelijk te controleeren. Het achtereinde van dezen cilienbundel wordt door de trilharen van de cellen van het inf. orgaan gekruist.

Ook bij volwassen individuen kon ik nooit een tweede soort van cellen in het orgaan vinden (Edinger), hoewel een groot aantal exemplaren werd onderzocht. Het inf. orgaan bestaat slechts uit ééne soort van elementen, de boven beschreven en in fig. 4 afgebeelde lange palissadenvormige cellen.

De reeds in mijn vorig opstel beschreven neurofibrillaire differentiatie in het protoplasma dezer cellen, het neurofibrillennetwerk om de kern en het uittreden der fibril uit de cel is in fig. 3 duidelijk weergegeven. Den loop van de neurofibrillen nadat zij het cellichaam hebben verlaten, kon ik niet met zekerheid nagaan. De celuitloopers schijnen alle naar achteren (caudaalwaarts) om te buigen, doch hun verderen loop kon ik in het vlechtwerk van vezelen niet verder vervolgen. Uit frontale doorsneden kon worden opgemaakt, dat de uitloopers in twee aan weerszijden van de mediaanlijn gelegen bundels naar achteren uitstralen, die dan zich evenwel ook in het vlechtwerk van de omgeving oplosten en niet verder te vervolgen waren.

Een uitstulping van den ventralen hersenwand vóór het infundibulairorgaan, zooals zij door Kupffer beschreven wordt, kon ik, niettegenstaande een groot aantal seriën van dunne doorsneden werden onderzocht, in geen enkel geval vinden. Wel bestaat er dikwijls,

zooals ik reeds vroeger beschreef, voor en achter het orgaan eene ietwat sterkere ophooping van kernen, en in enkele gevallen scheen de rangschikking dier kernen het vermoeden van eene zij het dan ook massieve uitstulping te wettigen. Nauwkeurig onderzoek overtuigde mij echter telkens, dat dit slechts schijnbaar was, en dat geen werkelijke uitstulping (infundibulum) voorhanden was. Hoe voorzichtig men ook moet zijn, met uit enkele serien conclusies te trekken, bleek mij uit eene mediane doorsnede door het infundibulairorgaan van een Branchiostoma van 47 mM. lengte. Hier zou men meenen, achter het orgaan een sleufvormige uitstulping van den hersenventrikel te zien, terwijl aan de voorzijde geen spoor er van te zien is. Het schijnt mij dan ook gevaarlijk, daarop een homologie op te bouwen, en vooralsnog houd ik mij aan den naam infundibulairorgaan, daar bouw en ontwikkeling er van meer overeenkomst vertoonen met het met denzelfden naam aangeduide epithelium in den saccus vasculosus der ichthyopsiden dan met het tuberculum posterius.

b. vorm en ontwikkeling van de hersenblaas.

Slechts die bijzonderheden mogen hier nu in het kort worden aangestipt, die belangrijk zijn voor de vergelijking van de hersenen van Branchiostoma met die van de cranioten en voor de beantwoording der vraag, of niet het infundibulairorgaan met het tuberculum posterius moet worden gehomologiseerd.

Dit zou nl. oogenschijnlijk volgen uit de door Kupffer in 1894 en in 1902 gepubliceerde teekening van de mediane doorsnede door de hersenen van een amphioxus van ongeveer 2 c.M. lengte, doch het schijnt mij toe, dat deze teekening niet de normale verhoudingen weergeeft. Noch zorgvuldig georienteerde mediane doorsneden (fig. 8) noch reconstructies van de mediane doorsnede uit dwarsdoorsneden (fig. 7) gaven mij ooit een dergelijk beeld.

En toch schijnt mij juist hier de reconstructie-methode volkomen zekere resultaten op te leveren. De bijna bij elk individu voorkomende deviaties in de hersenholte van de door de lengteas van het dier aangegeven richting worden dan ontweken en gecorrigeerd, en bij den eenvoudigen vorm van de hersenblaas krijgt men dan een volkomen zuiver beeld van de mediane doorsnede, waaraan zeer zeker de groote waarde is toe te kennen, die door Kupffer in 't algemeen er aan wordt gehecht, tezamen met een duidelijk beeld van de uitbreiding van de holte in dwarse richting. Van dergelijke reconstructies geef ik hier drie, een van een jonge larve van 3,4 mM. lengte (fig. 5), een van een jongen Amphioxus van 10 mM. lengte (fig. 6) en een derde van een exemplaar van 21 mM. lengte (fig. 7),

alle uit serien van dwarse doorsneden van 5 μ bij sterke vergrooting gereconstrueerd en daarna photographisch verkleind. Bij figuur 5 heb ik de afbeeldingen van de dwarse doorsneden gevoegd, die op de door de letters a, b, c en d boven de mediane doorsnede aangewezen plaats behooren, om de zijdelingsche uitbreiding van de holten te toonen, in fig. 8 heb ik de werkelijke mediane doorsnede door een ongeveer even oud exemplaar als dat, waarvan de reconstructie van fig. 7 werd gemaakt, afgebeeld om te doen zien, hoe groot de overeenkomst tusschen beide in werkelijkheid is.

Wij zien nu, dat reeds bij zoo jonge larven (larven van 1,5—2 mm. geven nog nagenoeg hetzelfde beeld), waarbij de hersenmassa nog wel degelijk grooteren omvang heeft dan het daarachter gelegen ruggemerg, een dorsale verwijding van den hersenventrikel voorkomt, die met den 4^{den} ventrikel van cranioten-embryonen kan worden vergeleken (fig. 5, 6, *VQ*). Deze stelt een dorsale verwijding van het centraalkanaal voor, zooals uit de figuur blijkt, die door een nauwer gedeelte met den blaasvormig verwijden voorsten ventrikel verbonden is. In tegenstelling met de bekende waarnemingen van HATSCHEK, dat deze ventriculus quartus niet in verbinding staat met den voorsten ventrikel, kon ik overal, ook bij zeer jonge larven, ook bij oudere dieren, deze verbinding duidelijk aantoonen. Eerst in het achtergedeelte van de dorsale verwijding (fig. 5, *d*) is het middenstuk van het spleetvormige centraalkanaal geobliteereerd, zoodat dat gedeelte van den vierden ventrikel gescheiden is van het altijd open blijvende ventrale centraalkanaal. Deze obliteratie schrijdt bij oudere dieren craniaalwaarts verder voort. De bovenwand van den vierden ventrikel is zeer dun, bestaat slechts uit eene laag platte cellen, doch is ook bij zeer jonge larven, mits zij slechts goed gefixeerd zijn, altijd duidelijk waarneembaar.

Ook bij veel oudere dieren, die de metamorphose reeds lang achter den rug hebben (fig. 6), is de vierde ventrikel nog steeds duidelijk aan te toonen en staat nog altijd door een nauwe dorsale passage met de voorste ventrikelruimte in verbinding. De dorsale wand is hier nog altijd dun en vliezig. De groote dorsale gangliencellen (zie mijne vorige mededeeling) die hier reeds tot een zekere ontwikkeling zijn gekomen, liggen nog alle terzijde van de mediaanlijn. Eerst later ontwikkelt zich deze eigenaardige groep van cellen zoo sterk (fig. 8, 7), dat zij ook het in de mediaanlijn gelegen gedeelte van de hersenmassa daar ter plaatse inneemt, en dan worden derhalve deze cellen ook in de mediaanlijn zichtbaar (fig. 7, 8). Daardoor wordt dan de eerst zoo duidelijke vierde ventrikel onduidelijk, onregelmatig van vorm, platgedrukt en verdwijnt deze zelfs hier en daar. Dan ver-

toonen zich de eigenaardige dwarse uitstulpingen van het centraalkanaal, die door KUPFFER als „quere Schenkel" en „blasenförmige Erweiterungen" beschreven zijn. Deze hebben evenwel slechts een secundaire en ondergeschikte beteekenis, en kunnen niet direct met bepaalde gedeelten van de hersenen van cranioten-embryonen worden vergeleken.

Dit wat het achterste gedeelte van de hersenmassa aangaat. Wat het rostrale gedeelte betreft, nog enkele woorden. Een frontaalorgaan (EDINGER) kon ik evenmin als WOLFF aantoonen. Men vindt, ook bij zeer nauwkeurig onderzoek, in het rostrale gedeelte van het lichaam slechts de dikwijls wat grillig gevormde slijmkanalen, die nooit met de epidermis in verbinding treden, doch die alle fijne zenuwtakjes uit de eerste hersenzenuw ontvangen.

Een zenuwverbinding tusschen de reukgroeve van KÖLLIKER en de hersenen, door EDINGER geloochend, bestaat m.i. zeer stellig. Wat dit betreft, kan ik de nauwkeurige waarnemingen van DOGIEL (1903)[1]) volkomen bevestigen, en evenzoo wat het voorkomen in de reukgroeve van typische zintuigcellen aangaat.

Aan het dorsale gedeelte van de hersenblaas is een duidelijk commissurensysteem waar te nemen, waarvan bundels zenuwvezelen naar achteren ombuigen (juist als bijv. de fasciculus retroflexus der commissura posterior bij de cranioten) en enkele vezeltjes zich naar voren craniaalwaarts ombuigen. Ook verder zijn een aantal vezelsystemen, hoewel in zeer rudimentairen vorm, in de hersenblaas te zien. Daarop kan ik hier ter plaatse niet verder ingaan, doch als men dit alles in het oog vat, dan mag men m.i. de hersenblaas van amphioxus niet beschouwen als een archencephalon, dat op een zeer vroeg ontwikkelingsstadium is blijven staan, doch moet men haar opvatten als een rudimentair geworden, sterk gedegenereerd hersensysteem, dat in groote trekken met de hersenen der ichthyopsiden overeenstemt, doch waarbij, vooral ten gevolge van het geheel ontbreken van de organen van het zijlijnsysteem (ooglens, gehoorblaas, zijlinie) en de geringe ontwikkeling van den kop, een aantal systemen niet zijn aangelegd of rudimentair geworden zijn, en waarbij mede ten gevolge daarvan de krommingen ten eenenmale ontbreken. Zelfs een plica ventralis (KUPFFER) bestaat niet; ook het inf. orgaan blijft in het niveau van den hersenwand liggen.

Leiden. Histologische Afd. van het Anatomisch Kabinet

---

[1]) Anatomische Hefte 21. Bd. 1903.

grootheid ε, hoe klein ook, er een grootheid σ is aan te wijzen, zoodat in een willekeurig interval ter grootte σ geen van de functies der verzameling schommelingen grooter dan ε ondergaat. Betreffende oneindige gelijkmatig continue functieverzamelingen bestaat de stelling, dat ze, zoo ze *begrensd* zijn (d. w. z. zoo er een maximum- en een minimumwaarde zijn aan te geven, waartusschen alle functies zich bewegen), *minstens één* continue limietkromme bezitten, waartoe gelijkmatig geconvergeerd wordt[1]).

We zullen aantoonen, dat voor de functieverzameling der differentiequotienten eener eindige continue functie, zoo ze gelijkmatig continu is, daaruit volgt vooreerst de begrensdheid, en verder voor onbepaalde afname der x-aangroeiing het bestaan van slechts één enkele limietkromme, zoodat geldt:

Stelling 1. Heeft een eindige continue functie $f(x)$ een gelijkmatig continue verzameling van differentiequotienten, dan bezit ze een eindig continu differentiaalquotient.[2])

Om dit te bewijzen, noemen we ${}_{\delta}\varepsilon_{\Delta}(x)$ de grootte van het schommelingsgebied tusschen x en $x+\Delta$ van het differentiequotient voor een x-aangroeiing δ. Laten we δ achtereenvolgens alle positieve waarden doorloopen, dan volgt uit de onderstelde gelijkmatige continuiteit, dat men Δ altijd zoo klein kan kiezen, dat alle waarden ${}_{\delta}\varepsilon_{\Delta}(x)$ blijven beneden een zeker zoo klein als men wil te stellen bedrag. Noemen we dus $\varepsilon_{\Delta}(x)$ het maximum der waarden ${}_{\delta}\varepsilon_{\Delta}(x)$ voor bepaalde x en Δ, dan nadert $\varepsilon_{\Delta}(x)$ met Δ gelijkmatig tot 0.

Verder hebben we, als $\frac{p}{n}$ een echte breuk is:

$$\varphi_{\Delta}(x) = \frac{1}{n}\varphi_{\frac{\Delta}{n}}(x) + \frac{1}{n}\varphi_{\frac{\Delta}{n}}\left(x+\frac{1}{n}\Delta\right) + \dots + \frac{1}{n}\varphi_{\frac{\Delta}{n}}\left(x+\frac{n-1}{n}\Delta\right) \quad (1)$$

$$\varphi_{\frac{p}{n}\Delta}(x) = \frac{1}{p}\varphi_{\frac{\Delta}{n}}(x) + \frac{1}{p}\varphi_{\frac{\Delta}{n}}\left(x+\frac{1}{n}\Delta\right) + \dots + \frac{1}{p}\varphi_{\frac{\Delta}{n}}\left(x+\frac{p-1}{n}\Delta\right). \quad (2)$$

Splitsen we elk der n termen van het tweede lid van (1) in p gelijke deelen, en elk der p termen van het tweede lid van (2) in n gelijke deelen, dan splitst zich het verschil dier beide tweede leden in pn termen, die elk in absolute waarde kleiner blijven dan $\frac{1}{pn}\cdot\varepsilon_{\Delta}(x)$, zoodat het verschil van $\varphi_{\Delta}(x)$ en $\varphi_{\frac{p}{n}\Delta}(x)$ in absolute waarde kleiner blijft dan $\varepsilon_{\Delta}(x)$.

---

[1]) Vgl. Arzelà, „*Sulle funzioni di linee*", Memorie della Accademia di Bologna, serie 5, V, p. 225.

[2]) We denken de functie gegeven in een zeker interval van waarden der onafhankelijk veranderlijke x.

Beschouwen we dus telkens voor een bepaalde x alle differentiequotienten wier x-aangroeiing gelijk is aan een echte breuk maal Δ, dan is de grootte $\tau_\Delta(x)$ van hun schommelingsgebied kleiner dan $2\varepsilon_\Delta(x)$. Hetzelfde geldt van het schommelingsgebied van *alle* differentiequotienten voor bepaalde x, wier x-aangroeiing kleiner is dan Δ, omdat deze wegens de continuiteit van f door de vorige te benaderen zijn.

Laten we dus Δ onbepaald afnemen, dan neemt ook $\tau_\Delta(x)$ onbepaald af; daar verder met het kleiner worden van Δ elk volgend schommelingsgebied een deel van het voorgaande is, is de limiet van het schommelingsgebied voor elke x een enkele bepaalde waarde, waartoe gelijkmatig geconvergeerd wordt, de limiet der differentiequotienten, het *differentiaalquotient.*

Dat dit (voorwaartsche) differentiaalquotient geen discontinuiteiten kan vertoonen, blijkt aldus: Was er een discontinuiteit, dan was er een grootheid σ, die daar voor elk interval door de schommelingen van het differentiaalquotient zou kunnen worden overschreden; maar verschilt de waarde van het differentiaalquotient in twee punten meer dan σ, dan is er ook een differentiequotient, waarvan de waarden in die twee punten meer dan σ verschillen; er was dus voor elk interval, dat de bedoelde discontinuiteit zou bevatten, een differentiequotient met een schommelingsgebied grooter dan σ, m.a w. de functieverzameling der differentiequotienten was niet gelijkmatig continu.

Uit de continuiteit van het voorwaartsche differentiaalquotient volgt tevens dat het voorwaartsche en het achterwaartsche differentiaalquotient gelijk zijn.

Analoog als voor een discontinuiteitspunt, blijkt dat ook een oneindigheidspunt bij het differentiaalquotient de gelijkmatige continuiteit der differentiequotienten zou storen; hierin is tegelijk de begrensdheid der differentiequotienten besloten, immers die zouden anders wegens de eindigheid van f het oneindige alleen kunnen naderen voor onbepaald afnemende x-aangroeiing, maar dat zou een oneindigheidspunt in het differentiaalquotient geven.

Stelling 2. Van een functie met eindig continu differentiaalquotient zijn de differentiequotienten gelijkmatig continu.

Zij n.l. ε een bepaalde, zoo klein als men wil te kiezen, grootheid. We kunnen dan om elke x een interval groot i leggen zóó, dat de schommelingen van het differentiaalquotient binnen elk dier intervallen kleiner dan $^1/_2\,\varepsilon$ blijven. Wegens de uit de formule $\varphi_\Delta(x) = f'(x + \vartheta\Delta)$ blijkende gelijkmatige convergentie is er een Δ' aan te wijzen zóó, dat alle φ_Δ, waarvoor $\Delta < \Delta'$, over hun geheele beloop minder dan $^1/_4\,\varepsilon$ van het differentiaalquotient verschillen, dus in de genoemde intervallen

slechts schommelingen beneden ε vertoonen. Wegens de gelijkmatige continuiteit van f kan verder om elke x een interval groot i' gelegd worden zóó, dat voor alle $\Delta \geqq \Delta'$ de overeenkomstige φ_Δ binnen die intervallen slechts schommelingen beneden ε vertoonen: daartoe behoeft men n.l. i' slechts zoo te kiezen, dat de schommelingen van f binnen de intervallen blijven beneden $^1/_2\, \varepsilon\, \Delta'$. Is dus i'' de kleinste der beide grootheden i en i', dan kunnen we om elke x een interval groot i'' leggen zóó, dat de schommelingen van *alle* differentiequotienten daarbinnen onder ε blijven, waarmee de gelijkmatige continuiteit der differentiequotienten is aangetoond.

Stelling 3. Is onder de differentiequotienten eener eindige continue functie een gelijkmatig continue fundamentaalreeks met onbepaald afnemende x-aangroeiingen, dan bestaat een eindig continu differentiaalquotient.

Zij n. l. $\varphi_{\Delta'}(x), \varphi_{\Delta''}(x), \ldots$ de bedoelde fundamentaalreeks van functies, dan is voor elke grootheid ε een grootheid σ aan te wijzen zóó, dat $\varphi_{\Delta^{(\nu)}}(x+h) - \varphi_{\Delta^{(\nu)}}(x) < \varepsilon$ voor elke x, elke $h < \sigma$, en elke ν. Was nu niet de verzameling van *alle* differentiequotienten gelijkmatig continu, dan zou het moeten kunnen voorkomen, dat voor een niet tot de fundamentaalreeks behoorende Δ°: $\varphi_{\Delta^\circ}(x+h) - \varphi_{\Delta^\circ}(x) > \varepsilon$. Benaderen we nu Δ° door een reeks $a_1\Delta', a_2\Delta'', \ldots$, waarin de a's geheele getallen voorstellen zóó, dat $a_p\Delta^{(p)} < \Delta^\circ < a_{p+1}\Delta^{(p)}$, dan wordt ook $\varphi_{\Delta^\circ}(x+h) - \varphi_{\Delta^\circ}(x)$ benaderd door $\varphi_{a_p\Delta^{(p)}}(x+h) - \varphi_{a_p\Delta^{(p)}}(x)$, welke laatste uitdrukking, hoe groot p ook wordt, $< \varepsilon$ blijft, zoodat $\varphi_{\Delta^\circ}(x+h) - \varphi_{\Delta^\circ}(x)$ niet $> \varepsilon$ kan zijn, dus de verzameling van *alle* differentiequotienten gelijkmatig continu is, en er een eindig continu differentiaalquotient bestaat.

Van het voorgaande is stelling 1 van toepassing bij den opbouw van de theorie der continue groepen uit de leer der verzamelingen, waarbij men onafhankelijk blijft van de postulaten van Lie. Men krijgt daarbij te maken met in zeker gebied eindige en continue functies van een of meer veranderlijken, wier differentiequotienten in zeker coördinatenstelsel alle lineaire functies van de functies zelf zijn[1]). Daar wegens de eindigheid der functies zelf er geen gebied mag zijn, waarbinnen elke grootheid door eenzelfde differentiequotient overal zou kunnen worden overschreden, blijven de coëfficienten der

[1]) Vgl. L. E. J. Brouwer, „*Die Theorie der endlichen continuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von* Lie", Atti del IV° Congresso Internazionale dei Matematici. Het is de differentieerbaarheid in éénzelfde coördinatenstelsel van alle de verschillende infinitesimaaltransformaties eener groep bepalende functies, die op deze wijze wordt aangetoond.

genoemde lineaire functies binnen eindige grenzen, is het systeem der differentiequotienten gelijkmatig continu, en bestaan de differentiaalquotienten.

Stelling 4. Is aan de voorwaarden van stelling 1 voldaan, en vormt het systeem van alle tweede differentiequotienten (waarvan elk door twee onafhankelijke x-aangroeiingen bepaald is) een gelijkmatig continu systeem, dan bestaat een eindig continu „tweede differentiaalquotient", dat zoowel de eenige limiet der bovengenoemde functieverzameling, als beide x-aangroeiingen onbepaald afnemen, als het differentiaalquotient van het (eerste) differentiaalquotient is.

Noemen we, om dit te bewijzen, $\varepsilon'_\Delta(x)$ de maximumgrootte der schommelingsgebieden van de verschillende tweede differentiequotienten tusschen x en $x+\Delta$, dan nadert weer $\varepsilon'_\Delta(x)$ met Δ gelijkmatig tot 0.

Stellen we het differentiequotient van $\varphi_{\Delta_1}(x)$ voor een x-aangroeiing Δ_2 voor door $\varphi_{\Delta_1\Delta_2}(x)$, en zijn $\frac{p_1}{n_1}$ en $\frac{p_2}{n_2}$ echte breuken, dan hebben we:

$$\varphi_{\Delta_1\Delta_2}(x) = \frac{1}{n_1 n_2}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\varphi_{\frac{\Delta_1}{n_1}\frac{\Delta_2}{n_2}}\left(x+k_1\frac{\Delta_1}{n_1}+k_2\frac{\Delta_2}{n_2}\right). \quad . \quad (1)$$

$$\varphi_{\frac{p_1\Delta_1}{n_1}\frac{p_2\Delta_2}{n_2}}(x) = \frac{1}{p_1 p_2}\sum_{k_1=0}^{p_1-1}\sum_{k_2=0}^{p_2-1}\varphi_{\frac{\Delta_1}{n_1}\frac{\Delta_2}{n_2}}\left(x+k_1\frac{\Delta_1}{n_1}+k_2\frac{\Delta_2}{n_2}\right). \quad . \quad (2)$$

Splitsen we elk der $n_1 n_2$ termen van het tweede lid van (1) in $p_1 p_2$ gelijke deelen, en elk der $p_1 p_2$ termen van het tweede lid van (2) in $n_1 n_2$ gelijke deelen, dan splitst zich het verschil dier tweede leden in $p_1 p_2 n_1 n_1$ termen, die elk in absolute waarde kleiner blijven dan $\frac{1}{p_1 p_2 n_1 n_2}\varepsilon'_{\Delta_1+\Delta_2}(x)$, zoodat het verschil van $\varphi_{\Delta_1\Delta_2}(x)$ en $\varphi_{\frac{p_1\Delta_1}{n_1}\frac{p_2\Delta_2}{n_2}}(x)$ in absolute waarde kleiner blijft dan $\varepsilon'_{\Delta_1+\Delta_2}(x)$.

Beschouwen we dus telkens voor een bepaalde x alle differentiequotienten wier x-aangroeiingen gelijk zijn aan echte breuken maal Δ_1 en Δ_2, dan is de grootte $\tau_{\Delta_1\Delta_2}(x)$ van hun schommelingsgebied kleiner $2\varepsilon'_{\Delta_1+\Delta_2}(x)$, waaruit we als boven bij het bewijs van stelling 1 het bestaan van één enkele limiet, waartoe gelijkmatig geconvergeerd wordt, en die eindig en continu is, afleiden.

Beschouwen we nu het differentiequotient voor x-aangroeiing Δ_2, zoowel van de verschillende φ_Δ's, waarvoor $\Delta < \Delta_1$, als van het (eerste) differentiaalquotient, dan verschillen de eerste alle minder dan $\varepsilon'_{\Delta_1+\Delta_2}(x)$ van de zoo even afgeleide limietfunctie, dus ook het laatste, dat uit de eerste is te benaderen. Dit geldt onafhankelijk van Δ_1; het differentiequotient voor x-aangroeiing Δ_2 van het (eerste)

differentiaalquotient kan dus niet meer dan $\varepsilon'_{\Delta_2}(x)$ van de zooeven afgeleide limietfunctie verschillen, die dus differentiaalquotient van het (eerste) differentiaalquotient of tweede differentiaalquotient is.

Stelling 5. Bezit een functie een eindig continu tweede differentiaalquotient, dan is het systeem der eerste en tweede differentiequotienten gelijkmatig continu.

Om n.l. een intervalgrootte i'' te vinden, die de schommelingen van alle tweede differentiequotienten overal $< \varepsilon$ houdt, kiezen we eerst de intervalgrootte i, die de schommelingen van het tweede differentiaalquotient overal $< \frac{1}{2}\varepsilon$ houdt; vervolgens een Δ'_1 en een Δ'_2 zóó, dat alle $\varphi_{\Delta_1 \Delta_2}$, waarvoor $\Delta_1 < \Delta'_1$ en $\Delta_2 < \Delta'_2$ over hun geheele beloop minder dan $^1/_4\varepsilon$ van het tweede differentiaalquotient verschillen[1]); ten slotte een interval-grootte i', die de schommelingen der functie f overal $< {}^1/_4\, \varepsilon \Delta'_1 \Delta'_2$ houdt. Voor i'' nemen we dan de kleinste der beide grootheden i en i'.

Stelling 6. Is onder de tweede differentiequotienten eener eindige continue functie met eindig continu differentiaalquotient een gelijkmatig continue fundamentaalreeks, waarin beide x-aangroeiingen onbepaald afnemen, dan bestaat een eindig continu tweede differentiaalquotient.

Zij n.l. $\varphi_{\Delta_1'\Delta_2'}(x)$, $\varphi_{\Delta_1''\Delta_2''}(x)$ . . . . . de bedoelde fundamentaalreeks, dan is voor elke grootheid ε een grootheid σ aan te wijzen zóó, dat $\varphi_{\Delta_1^{(\nu)}\Delta_2^{(\nu)}}(x+h) - \varphi_{\Delta_1^{(\nu)}\Delta_2^{(\nu)}}(x) < \varepsilon$ voor elke x, elke $h < \sigma$, en elke ν. Was nu niet de verzameling van *alle* tweede differentiequotienten gelijkmatig continu, dan zou het moeten kunnen voorkomen, dat voor een zekere Δ_1° en Δ_2°, die niet tot de fundamentaalreeks behooren, $\varphi_{\Delta_1^\circ \Delta_2^\circ}(x+h) - \varphi_{\Delta_1^\circ \Delta_2^\circ}(x) > \varepsilon$. Benaderen we nu Δ_1° door een reeks $\alpha_1\Delta_1'$, $\alpha_2\Delta_1''$, ... en Δ_2° door een reeks $\beta_1\Delta_2'$, $\beta_2\Delta_2''$, ... waarin de α's en β's geheele getallen voorstellen zóó, dat

$$\alpha_\mu\Delta_1^{(\mu)} < \Delta_1' < (\alpha_\mu + 1)\,\Delta_1^{(\mu)} \text{ en } \beta_\mu\Delta_2^{(\mu)} < \Delta_2' < (\beta_\mu + 1)\,\Delta_2^{(\mu)},$$

dan wordt ook $\varphi_{\Delta_1^\circ \Delta_2^\circ}(x+h) - \varphi_{\Delta_1^\circ \Delta_2^\circ}(x)$ benaderd door

$$\varphi_{\alpha_\mu\Delta_1^{(\mu)},\beta_\mu\Delta_2^{(\mu)}}(x+h) - \varphi_{\alpha_\mu\Delta_1^{(\mu)},\beta_\mu\Delta_2^{(\mu)}}(x),$$

---

[1]) De gelijkmatige convergentie aller differentiequotienten blijkt uit die der differentiequotienten, waarvoor $\Delta_1 = \Delta_2$ (uit deze zijn de andere te benaderen op de wijze, als in het bewijs van stelling 6 is aangegeven); de laatste blijkt door ontwikkeling der termen van $f(x+2\Delta) - 2f(x+\Delta) + f(x)$ volgens de reeks van TAYLOR, waarbij we het tweede differentiaalquotient den restterm laten vormen; de aan den restterm voorafgaande termen vallen dan tegen elkander weg.

welke laatste uitdrukking, hoe groot p ook wordt, $< \varepsilon$ blijft, zoodat ook de eerste niet $> \varepsilon$ kan zijn, dus de verzameling van *alle* tweede differentiequotienten is gelijkmatig continu, en er bestaat een eindig continu tweede differentiaalquotient.

Stelling 7. Is onder de tweede differentiequotienten eener eindige continue functie een gelijkmatig continue fundamentaalreeks, waarin beide x-aangroeiingen onbepaald afnemen, dan bezit de functie eindige en continue eerste en tweede differentiaalquotienten.

Immers volgens het boven gegeven bewijs van stelling 6 blijkt het geheele systeem der tweede differentiequotienten gelijkmatig continu te zijn, en volgens het boven gegeven bewijs van stelling 4 blijkt dit systeem voor onbepaalde afname der beide x-aangroeiingen één enkele eindige continue limietfunctie, $f''(x)$, waartoe gelijkmatig geconvergeerd wordt, te bezitten. Zij τ' de maximum-afwijking van deze limietfunctie voor tweede differentiequotienten, wier x-aangroeiingen kleiner dan Δ'_1 en Δ'_2 zijn, en beschouwen we het systeem ζ van alle $\varphi_\Delta(x)$, wier $\Delta < \Delta'_1$, dan liggen alle differentiequotienten met x-aangroeiing $< \Delta'_2$ van het systeem ζ tusschen $f''(x) + \tau'$ en $f''(x) - \tau'$, waaruit licht is af te leiden, dat het systeem ζ gelijkmatig continu is, zoodat nu vooreerst volgens het bewijs van stelling 1 een eindig continu eerste differentiaalquotient en vervolgens volgens het bewijs van stelling 4 een eindig continu tweede differentiaalquotient bestaat.

Door analogie met het voorgaande zijn nu licht de bewijzen te leveren van de volgende algemeenere stellingen:

Stelling 8. Is onder de n^{de} differentiequotienten eener eindige continue functie een gelijkmatig continue fundamentaalreeks, waarin alle x-aangroeiingen onbepaald afnemen, dan bezit de functie eindige en continue eerste tot en met n^{de} differentiaalquotienten; elk p^{de} differentiaalquotient is hier vooreerst de eenige limiet voor onbepaald afnemende x-aangroeiingen der p^{de} differentiequotienten, tot welke limiet gelijkmatig wordt geconvergeerd, en verder differentiaalquotient van het $(p-1)^{de}$ differentiaalquotient.

Stelling 9. Bezit een functie een eindig continu n^{de} differentiaalquotient, dan is het systeem der eerste tot en met n^{de} differentiequotienten gelijkmatig continu [1]).

[1]) Om hier de gelijkmatige convergentie der n^{de} differentiequotienten voor gelijke onafhankelijke x-aangroeiingen te bewijzen, breekt men analoog als bij stelling 5 de Taylorsche ontwikkeling af bij den n^{den} term, en past toe de formule:

$$n^a - \binom{1}{n}(n-1)^a + \binom{2}{n}(n-2)^a \ldots\ldots = 0$$

(n en a geheel; $a < n$).

Stelling 10. Is $n_1, n_2, n_3 \ldots$ een oneindige reeks aangroeiende geheele getallen, en zijn van een eindige continue functie de systemen der n_1^{de}, der $n_2^{de} \ldots$ differentiequotienten gelijkmatig continu, dan bezit de functie alle differentiaalquotienten, en deze zijn alle eindig en continu.

Stelling 11. Een eindige continue functie van meer veranderlijken, onder wier differentiequotienten der n^{de} orde voor elke soort een gelijkmatig continue fundamentaalreeks bestaat, waarin alle aangroeiingen der onafhankelijk veranderlijken onbepaald afnemen, bezit alle differentiaalquotienten van de 1ste tot en met n^{de} orde; deze eindige en continue differentiaalquotienten zijn vooreerst op de door hun vorm uitgedrukte wijze elkaars differentiaalquotienten, waarbij de volgorde der differentieeringen onverschillig blijkt, en verder is elk differentiaalquotient de eenige limiet der overeenkomstige differentiequotienten voor onbepaald afnemende aangroeiingen der onafhankelijk veranderlijken, tot welke limiet gelijkmatig wordt geconvergeerd.

Stelling 12. Bezit een functie van meer veranderlijken alle n^{de} differentiaalquotienten, en zijn deze eindig en continu, dan is het systeem der 1ste tot en met n^{de} differentiequotienten gelijkmatig continu [1]).

Ten slotte de opmerking, dat het hier behandelde de onbepaalde differentieerbaarheid terugvoert op een continuiteit in meer uitgebreiden zin, wat misschien eenigszins verklaart, dat men zoo lang alle eindige continue functies onbepaald differentieerbaar onderstelde, en misschien eenigszins rechtvaardigt, dat zoo velen zich in de natuurwetenschap tot onbepaald differentieerbare functiés willen beperken.

---

[1]) Om hier de gelijkmatige convergentie der n^{de} differentiequotienten met gelijke onafhankelijke aangroeiingen Δ (deze Δ onbepaald afnemend) te bewijzen, ontwikkelen we de elementen van zulk een differentiequotient volgens de reeks van Taylor, waarbij we de n^{de} differentiaalquotienten de resttermen laten vormen. De aan de resttermen voorafgaande termen vallen dan weg, en van de resttermen convergeert één gelijkmatig tot het met het onderzochte differentiequotient overeenkomstige differentiaalquotient, en convergeeren de andere gelijkmatig tot nul.

Mikrobiologie. — De Heer BEIJERINCK biedt eene mededeeling aan over: „*Binding van vrije atmospherische stikstof door Azotobacter in rein-kultuur. Verspreiding dezer bacterie.*"

Bij het gebruik van koolhydraten als koolstofbron in *Azotobacter*-kulturen bestond tot nu toe twijfel of de daarin plaats hebbende binding van de vrije stikstof oorspronkelijk door *Azotobacter* zelve of door andere, met *Azotobacter* samenlevende bacteriën geschiedt, omdat het niet gelukt het genoemde bacteriëngeslacht in reinkultuur met koolhydraten en vrije stikstof als eenige stikstofbron tot belangrijke vermeerdering te brengen. Vroeger meende ik daarom te moeten aannemen, dat in zoodanige kulturen een met de bacteriën der Papilionaceen na verwante soort, *Bacillus radiobacter*, die in de ruwe ophoopingen van *Azotobacter* nooit ontbreekt, het primaire agens der stikstofbinding zou wezen [1]).

Voortgezette onderzoekingen maakten die onderstelling echter meer en meer onwaarschijnlijk, en de feiten, die thans zullen worden medegedeeld hebben het bewijs geleverd, dat het genoemde vermogen wel degelijk aan *Azotobacter* zelve eigen is.

Deze feiten hebben betrekking op de zeer eigenaardige verhouding tusschen *Azotobacter* en de zouten der organische zuren en in het bijzonder tot het calciummalaat.

1. *Calciummalaat als koolstofbron.*

Indien men in een ruime ERLENMEYER-kolf een voedingsvloeistof brengt van de samenstelling: 100 leidingswater, 2 calciummalaat, 0.05 K^2HPO^4, hieraan toevoegt eenige, bijv. 10 of 20 cM^3 grachtwater, of even zooveel grond voor infektie, zorg draagt, dat de vloeistoflaag in de kolf niet dikker is dan 2 à 5 cM. en kultiveert in een thermostaat bij 30° C., dan ziet men gewoonlijk [2]) na 2 of 3 dagen een drijvende *Azotobacter*-huid ontstaan, die uit sterk bewegelijke individuen is gevormd, en die betrekkelijk spoedig een aanzienlijke dikte bereikt. Hierbij wordt zooveel calciumcarbonaat gevormd, dat dit een gesloten laag, een deksel als het ware, op de oppervlakte van de vloeistof vormt.

Ent men een weinig van deze huid in een andere kolf over, die dezelfde kultuurvloeistof bevat, dan ziet men bij gelijke kultuurvoorwaarden overeenkomstige verschijnsefen. Men kan er niet aan twij-

---

[1]) Deze verslagen 25 Febr. 1908. Centr.bl. f. Bact. 2te Abt Bd. 9 pg. 1, 1902. Archives Néerl. (2) T. 8 pag. 190 en 319, 1903.

[2]) Vooral in het voorjaar en den herfst slagen de proeven goed. 's Zomers en 's winters schijnt *Azotobacter* wel eens afwezig te zijn in de genoemde waterhoeveelheid.

felen, dat onder deze omstandigheden binding van belangrijke hoeveelheden vrije stikstof moet plaats hebben, en de chemische analyse leert, dat dit ook werkelijk het geval is.

Het mikroskopische beeld van de *Azotobacter*-kultuur in het malaat, vertoont kleinere individuen van grooter bewegelijkheid dan de vroeger beschreven vormen, die in de manniet-oplossingen worden verkregen. De eigenschappen houden nagenoeg het midden tusschen die van *A. chroococcum* en *A. agilis*, en doen sterk denken aan een in Amerika gevonden varieteit, waaraan de naam van *A vinlandi* is gegeven. De plaatkulturen van zulk een malaatophooping blijken weder niet rein te zijn maar uit het gewone mengsel van niet sporenvormende soorten te bestaan. Zij kunnen het best vervaardigd worden op een voedingsbodem van de samenstelling: 100 leidingswater, 1 calciummalaat, 0.05 KH^2PO^4, 1 à 2 agar, waarop de *Azotobacter*-koloniën door bijzonder snelle vorming van calciumcarbonaat reeds na 24 uur bij 30° C zichtbaar worden, wat bij geen enkele andere mij bekende mikrobensoort het geval is. Daar deze platen eenigszins troebel zijn door het afgescheiden calciumphosphaat en het niet volledig opgeloste malaat, is het wenschelijk de menging der bestanddeelen op de volgende wijze te doen plaats hebben. In een reageerbuis worden eerst eenige droppels eener neutrale, geconcentreerde oplossing van kaliummalaat gedaan en hierin wordt zoowel het calciummalaat als het kaliumphosphaat opgelost, waarbij wel met wat water verdund moet worden, maar met de kleinst mogelijk hoeveelheid, omdat de oplossende werking van het kaliummalaat veel grooter is in de geconcentreerde dan in de verdunde oplossing. Eerst nadat deze vóórbewerking geeindigd is, mengt men den inhoud van de reageerbuis met de agaroplossing.

De op deze wijze verkregen malaatplaten zijn gebleken voor de ontwikkeling van de *Azotobacter*-kiemen beter geschikt te zijn dan de vroeger beschreven manniet- en glukoseplaten, zoodat van een zeker aantal kiemen, meer op de eerste dan op de laatste tot koloniën uitgroeien. Hierdoor is het tevens mogelijk geworden het aantal individuen onzer soort, die in een bepaald grondmonster aanwezig zijn, nauwkeuriger te bepalen dan dit vroeger kon geschieden en waarop beneden nog zal worden teruggekomen.

Alvorens verder te gaan wensch ik aangaande de waarde van andere zouten van organische zuren als koolstofvoedsel van *Azotobacter* nog het volgende op te merken.

Behalve met calcium-malaat kon alleen met calciumlactaat, calciumacetaat en calciumpropionaat bij gebruik van ruw *grachtwater als entmateriaal* in de meeste gevallen een belangrijke of matige

groei verkregen worden. Merkwaardiger wijze bleek hierbij, dat de overenting alleen van malaat in lactaat bijna evengoed gelukt als van malaat in malaat, terwijl zelfs betrekkelijk rijke kulturen in propionaat- of acetaatoplossingen bij overenting in gelijksoortige vloeistoffen nauwelijks of in het geheel niet meer voortgroeien. Dit feit is vooral opmerkelijk in verband met de waarneming, dat bij overenting van een malaathuid in propionaat- of acetaat even rijke of nog rijkere kulturen verkregen worden dan in de genoemde ruwkulturen met het grachtwater zelve als entmateriaal. Maar ook deze overentingen verdragen voortgezet overenten niet. Men ziet hieruit, dat de voorafgaande kultuurvoorwaarden, waaraan het entmateriaal onderworpen is geweest, volstrekt niet onverschillig zijn ten opzichte van de groeikracht der volgende generaties, die blijkbaar zeer gemakkelijk verzwakt kunnen worden, en daarbij het vermogen der stikstofbinding bijna geheel verliezen. Van dit feit kan de belangrijkheid niet worden ontkend, en het verdient voorzeker een nader onderzoek.

Met calciumcitraat, calciumtartraat en calciumsuccinaat, is zoowel met tuinaarde als met grachtwater als entmateriaal slechts een zeer matig ontwikkelde bacteriënhuid op de kultuurvloeistoffen ontstaan, die echter langdurig ofschoon uiterst langzaam is voortgegroeid. De huid op het citraat was rijk aan spirillen en de *Azotobacter*vorm, die daarin voorkomt wijkt in verschillende opzichten van de gewone vormen af. In al deze gevallen is na 2 à 3 weken de gevormde hoeveelheid bacteriën materiaal te gering om een stikstofbepaling noodzakelijk te maken en kon bij ruwe vergelijking met vroegere bepalingen geschat worden op enkele tiende miligrammen N gebonden per gram van het opgeloste kalkzout. Na langen tijd is de stikstofbinding echter ook met deze zouten belangrijk.

Met calciumglycolaat kon, bij afwezigheid van gebonden stikstof, geen mikrobengroei worden waargenomen.

2. *Hoeveelheid der gebonden stikstof.*

Afgezien van het vluchtige zuur, waarop beneden nog wordt teruggekomen, wordt de analyse der vloeistof als volgt ingericht.

De geheele hoeveelheid van de in de kultuurkolf aanwezige vloeistof, waarin het door oxydatie uit het malaat gevormde calciumcarbonaat, alsmede het nog niet ontleede malaat, het zout van het vluchtige zuur en de bacteriën voorkomen, wordt met een bekende hoeveelheid normaal zoutzuur behandeld, waardoor het koolzuur bij verwarming wordt uitgedreven, en dan wordt terug getitreerd met normaal kali en phenolphtaleine als indicator, waardoor het gevormde

N⁰ der proef en kultuurtijd	Kultuur-vloeistof. Bestanddeelen in grammen	Infektie-materiaal	Gevormd calciumcarbonaat in grammen	Vluch in gr
1 24 Febr.—10 April	4 gr. Calc. Mal. 0,05 K^2HPO^4, 200 cM^3. leidingswater.	1e overenting ruwe kultuur grachtwater in zelfde vloeistof.	1.57	0
2 26 Febr.—4 April	2 gr. Calc. Mal. 0,05 K^2HPO^4, 200 cM^3. leidingswater.	2e overenting van voorgaand.		
3 13 Maart—4 April	2 gr. Calc. Mal. 0,05 K^2HPO^4, 100 cM^3. leidingswater.	3e overenting van voorgaand.	0.872	
4 26 Maart—29 April	12 gr. Calc. Mal. 0.05 K^2HPO^4, 200 cM^3. leidingswater.	4e overenting van voorgaand.	5.7	0
5 6 April—23 April	4 gr. Calc. Mal. 0,05 K^2HPO^4, 100 cM^3. leidingswater.	Reinkultuur *Azotobacter*	0.552	0
6 4 April—29 April	4 gr. Calc. Mal. 0,05 K^2HPO^4, 100 cM^3. leidingswater.	Reincultuur *Azotobacter*		
7 7 April—2 Mei	4 gr. Calc. Mal. 0,05 K^2HPO^4, 100 cM^3. leidingswater	Reincultuur *Azotobacter*	0.494	0
8 13 Mei—29 Mei	2 gr. Calc, Mal. 0.05 K^2KPO^4, 100 cM^3 leidingswater.	Reinkultuur *Azotobacter*	0.8103	0.
9 6 April—23 April	4 gr. Calc. Lactaat 0,05 K^2HPO^4, 100 cM^3. leidingswater, 1 gr. krijt.	Ruw-kultuur uit 1	0.576	0.
10 16 Maart—29 April	1 gr. Calc. Acetaat, 0,05 K^2HPO^4, 100 cM^3. leidingswater.	Ruw-kultuur uit 1		
11 16 Maart—8 Mei	1 gr. Calc. Propionaat, 0.05 K^2HPO^4, 100 cM^3 leidingswater.	Ruw-kultuur	0.494	

g zuur mmen	Totaal verdwenen organisch kalkzout in grammen	Stikstof gevonden volgens KJELDAHL in milligrammen	Stikstof gebonden per gram geoxydeerd calciumzout	Opmerkingen
03	3.3	8.1	2.5	
	2	5.2	2.6	
32	10.7	18.1	1.8	
12	1.1	1.6	1.5	Mikrosk. zichtbare infektie
	2.2	5.9	1.7	Mikrosk. zichtbare infektie
12	0.89	1.5	1.7	Geen mikrosk. zichtbare infektie
36	1.39	2.49	1.8	Mikrosk. en Bacteriologisch rein.
1		1.8	1.8	
	1	2.8	2.8	
	1	4.7	4.7	

calciumcarbonaat en dus het geoxydeerde calciumzout bij benadering bekend worden.

De vloeistof wordt dan na toevoeging van een weinig zwavelzuur tot droog ingedampt en volgens KJELDAHL op stikstof onderzocht terwijl van alle gebruikte materialen afzonderlijk het stikstofgehalte wordt vastgesteld [1]). Het van MERCK, Darmstadt, betrokken calciummalaat bleek nagenoeg stikstofvrij te zijn.

Ik laat thans een tabel volgen van eenige analysen, die een denkbeeld geven van de hoeveelheid stikstof, welke door *Azotobacter* bij het gebruik van organische zouten als koolstofbron in gebonden toestand overgaat. (Zie tabel).

Uit de getallen blijkt dat de hoeveelheid stikstof, welke in de ruwe kultuur gebonden kan worden, hoogstens 4,9 en 2,8 m.g. per gram van het geoxydeerde calciumzout bedraagt, welke getallen met het calciumpropionaat en calciumacetaat zijn verkregen (proef 10 en 11) terwijl per gram malaat omstreeks 2,6 (proef 2) en per gram laktaat 1,8 m.g. (proef 9) werd gebonden. Naar het schijnt is de binding sneller bij het begin dan bij het latere verloop der proefneming, waaruit volgt, dat bij het gebruik van weinig van het betrokken zout naar verhouding meer stikstof in binding gaat dan met veel daarvan, hetgeen in aanmerking moet genomen worden bij de beoordeeling van het gunstige rendement met het propionaat en het acetaat verkregen, omdat hierbij van een oplossing met slechts 1°/₀ van het zout gebruik is gemaakt. Ten opzichte van deze zouten is gebleken, dat zij over het algemeen een ongunstige koolstofbron voor *Azotobacter* zijn en alleen dan een belangrijken groei kunnen veroorzaken, wanneer voor de infektie krachtige ruwkulturen in malaatoplossingen gebruikt worden, waarin een bepaalde variëteit onzer soort aanwezig is. Maar ook dan, zooals boven reeds is opgemerkt, houdt bij de eerste overenting van acetaat in acetaat de groei bijna geheel op. Reinkulturen van *Azotobacter* groeien in oplossingen van calciumacetaat en natriumacetaat bijna in het geheel niet [2]) welke ook de voorafgaande levensvoorwaarden zijn waaraan deze kulturen onderworpen worden. Het propionaat verdient nader onderzoek.

Van het calciummalaat is met zekerheid gebleken, dat het geschikt is, niet alleen om de ruwe kulturen ook bij overenting blijvend in stand te houden en vrije stikstof te doen binden, maar dat dit eveneens geldt ten aanzien van de reinkulturen van *Azoto-*

[1]) De uitvoering dezer bepalingen heb ik te danken aan den heer H. C. MINKMAN, assistent bij mijn laboratorium.

[2]) De verschillende variëteiten gedragen zich echter verschillend en sommige beginnen te groeien, maar die groei eindigt spoedig.

bacter. Voor mij is dit het eerste voorbeeld van dien aard, waarbij ik mij met zekerheid overtuigen kon, dat andere mikroben, noch in de kultuurvloeistof, noch in de voor de infektie gebruikte materialen aanwezig behoeven te zijn om de genoemde verschijnselen te doen plaats hebben. Wel is door verschillende schrijvers de binding van vrije stikstof in reinkulturen van *Azotobacter* reeds herhaaldelijk beschreven, zoo weer onlangs ten opzichte van het acetaat, maar nimmer had ik de juistheid dier mededeelingen kunnen bevestigen, voor ik tot een stelselmatig onderzoek met het calciummalaat was overgegaan, dat is juist van een zout, dat nog door niemand vroeger voor dit doel was toegepast, niettegenstaande ik reeds in mijn stukken van 1902 er op had gewezen, dat het als een voortreffelijke koolstofbron van *Azotobacter* is te beschouwen.

Wel is waar is de hoeveelheid stikstof, die in deze reinkulturen gebonden wordt niet groot, namelijk omstreeks 1.5 milligr. voor elk gram geoxydeerd malaat, maar wellicht zal ook hier een vermeerdering van het rendement waarneembaar zijn, indien de nog zeer jonge kulturen alleen onderzocht worden, waarbij dan echter nog slechts weinig van het zout kan geoxydeerd zijn en de absolute hoeveelheden dus betrekkelijk klein zullen wezen.

Het schijnt niet overbodig er hier nog op te wijzen, dat het volstrekt niet het zelfde is of een bepaalde hoeveelheid calciummalaat van uit een verdunde oplossing of wel uit een meer geconcentreerde wordt opgenomen, want in het laatste geval zal het malaat gemakkelijker voor de *Azotobacter*-cellen bereikbaar zijn, waardoor de mogelijkheid voor sterker oxydatie en meerder zuurstofverbruik in gelijke tijden ontstaan, zoodat de zuurstofspanning in de vloeistof op een lager peil zal blijven, dan in de meer verdunde oplossingen. Daar de groei van *Azotobacter* door deze lagere spanning eenigszins begunstigd schijnt te worden, en in elk geval een vrij hooge concentratie van het koolstofvoedsel voor het proces der stikstofbinding gunstig blijkt te zijn, is daarvan bij alle proeven gebruik gemaakt en ook volstrekt niet altijd het oogenblik afgewacht, waarop het malaat uit de kultuurvloeistof was verdwenen, maar deze veelal reeds veel vroeger aan de analyse onderworpen.

De waarneming, dat het calciummalaat wel, de glukose, de rietsuiker en de manniet daarentegen niet het uitgangspunt voor de stikstofbinding door *Azotobacter* in reinkultuur kunnen vormen, terwijl toch de genoemde koolhydraten zich in de ruwkulturen als veel produktiever toonen, en zelfs *N*-winsten van 7 milligr. per gram verdwenen suiker kunnen geven, doen vermoeden, dat deze koolhydraten vooraf door andere bacteriën in organische zuren moeten omgezet

worden, en dat het dan deze zijn, die eerst het toegevoegd krijt in kalkzouten veranderen en dan als koolstofbron voor *Azotobacter* dienen en tot stikstofbinding aanleiding geven.

Natuurlijk kan het niet het appelzuur zijn, dat hierbij uit de suiker ontstaat, maar de belangrijke groei van *Azotobacter*, waartoe ook de propionaten en de laktaten kunnen aanleiding geven, doen de vraag rijzen of wellicht het propionzuur of het melkzuur, na neutralisatie, de stoffen zijn, die bij het gebruik van de koolhydraten in de stikstofbindingen het proces beheerschen.

In dit verband moet er ook op gewezen worden, dat zoowel in de malaat- als in de laktaatkulturen kleine hoeveelheden van een vluchtig zuur voorkomen, dat wellicht azijnzuur zal blijken te zijn ofschoon het niet gelukt is dit door middel van de uranyla-natrium-acetaat reaktie van BEHRENS overtuigend aan te toonen. Belangrijk is het, dat dit vluchtige zuur niet alleen in de ruwkulturen maar ook in de reinkulturen van *Azotobacter* is gevonden, zoodat het zeker een bijproduct van den stofwissel dezer soort zelve is. Ten einde de hoeveelheid van dit vluchtige zuur bij benadering te kunnen beoordeelen is in de tabel aangenomen, dat het uit het malaat aldus zou ontstaan:

$$2C^4H^4O^5Ca + 2O^2 = C^4H^6O^4Ca + CaCO^3 + 3CO^2 + H^2O$$

Calciummalaat Calciumacetaat.

Maar men kan ook aannemen dat het zonder zuurstof toetreding wordt gevormd. Het vluchtige zuur is aangetoond door een deel der kultuurvloeistof met zwavelzuur en zilversulfaat te distilleeren en in het distillaat met kali het zuur te titreeren.

Uit de tabel ziet men, dat in de ruwkulturen zonder twijfel met calciumacetaat als koolstofbron stikstof gebonden kan worden, Wel is waar is het niet gelukt dit ook in reinkultuur te bewerken, maar nu het vaststaat dat *Azotobacter* alleen, met malaat als koolstofbron stikstof binden kan, moet aangenomen worden, dat dit ook in de acetaatkulturen het geval is, al is het ook niet duidelijk, waarin de hulp bestaat, die andere bacteriën noodzakelijkerwijze daarbij moeten verleenen. Bovendien moet worden opgemerkt, dat de stikstofbinding in de reinkultuur, ook bij het gebruik van malaat als koolstofvoedsel, minder belangrijk is dan wanneer ook andere bacteriën zich ten koste dezer stof kunnen voeden.

Wellicht dus wordt de stikstofbinding door koolhydraten voorafgegaan door melkzuur- of azijnzuurvorming.

3. *Verspreiding van Azotobacter in den grond.*

Reeds vroeger heb ik er op gewezen, dat het mogelijk is uit vruchtbaren tuingrond (bij uitzaaing op manniet-kalium-phosphaat

platen) enkele *Azotobacter*kolonien te vinden onder de duizenden koloniën van andere soorten. Het gebruik van calciummalaat in plaats van suiker is gebleken ook voor het grondonderzoek in deze richting belangrijk te zijn. Vooraf moet echter opgemerkt worden, dat het niet gelukt is een vasten of vloeibaren kultuurbodem [1]) te vinden, waarop alle uitgezaaide kiemen van *Azotobacter* ook werkelijk tot koloniën uitgroeien. Zoo werden bij het uitzaaien van omstreeks 2400 kiemen (door mikroskopisch tellen bepaald) op verschillende kultuurplaten 50, 12, 1, 30, 8, 20, 10, 20 en 75 kolonien verkregen, zoodat ontwikkeld waren in procenten slechts 2, 0.6, 0.5, 0.3, 0.3, 0.8, 0.4, 0.8 en 0.3. Bij een andere proef werden van 10.000 uitgezaaide kiemen 20, 25 en 48°/₀ op glucose-calcium-malaat platen, 32.5, 36 en 65°/₀ op calcium-kaliummalaatplaten verkregen. Bij andere uitzaaisels op platen met malaat alleen was het resultaat echter veel gunstiger. De kiemen waren in steriel leidingswater of in malaatoplossingen opgeschud waarvan 1 cM³ op de oppervlakte van de platen werd uitgespreid, terwijl er zorg voor was gedragen, dat dit water geheel en al in de agar introk, hetgeen gemakkelijk kan bereikt worden door de plaat voor het gebruik zacht te verwarmen, zoodat er wat water uit verdampt.

Men ziet uit deze getallen, dat *meestal* slechts een klein deel van het uitgezaaide tot ontwikkeling komt. Of hierbij wellicht reeds het verdeelen in het water doodelijk op sommige individuen werkt, of dat het afsterven eerst het gevolg is van den overgang op den vasten kultuurbodem, kon door opzettelijke proeven nog niet uitgemaakt worden. Ofschoon er dus reden is om aan te nemen, dat er in een voor het onderzoek gebruikte grondsoort meer kiemen voorkomen, dan daarin worden aangetoond, bestaat er tevens kans dat bij voortgezet onderzoek een inrichting der proef te vinden zal zijn, waarbij die bron van fouten is uitgesloten.

Maar trots de onzekerheid der onderzoekingsmethode kon toch reeds het volgende worden vastgesteld. Bij het onderzoek van kleine hoeveelheden tuingrond door uitzaaien op calciummalaat kaliumphosphaat-agar, waarbij het agargehalte laag gehouden werd, namelijk tusschen ½ en 1 °/₀, werd bij kultuur van 24 uren op 30° het volgende waargenomen. Een matig aantal vochtige koloniën van omstreeks 1 mm. middellijn trekken het eerst de aandacht door hun grootte en blijken te bestaan uit verschillende variëteiten van *Bacillus megatherium*; zij bevatten, na den genoemden tijd bijna niets geen sporen

[1]) Het gebruik van dunne lagen van voedingsvloeistoffen voor koloniën-kultuur van mikroben is beschreven in Centralblatt f. Bacteriologie 2de Abt. Bd 20, 1908 pag. 641.

en zij hebben zich blijkbaar met groote snelheid ontwikkeld. Een duidelijke oxydatie van het malaat vindt daardoor niet plaats en daar de koloniën na den 2en dag niet meer groeien, ontwikkelen zij zich blijkbaar ten koste van de sporen van stikstofverbindingen, die in de platen aanvankelijk aanwezig zijn. Verder ziet men van af den 2en dag een verbazend groot aantal koloniën van *Streptothrix alba* tot ontwikkelng komen. Deze mikrobe komt in alle onderzochte grondsoorten zoo talrijk voor, dat aan de beteekenis daarvan, ten goede of ten kwade, voor de vruchtbaarheid wel niet getwijfeld kan worden, maar waarin die beteekenis bestaat is nog geheel onbekend. Zij oxydeeren het malaat zwak.

Verder bedekt zich de oppervlakte van de plaat met talrijke betrekkelijk kleine bacteriënkoloniën, waarvan een paar soorten zoowel door hun grootte als algemeenheid onmiddellijk in het oog vallen.

De oxydatie van het malaat door al deze mikroben is gering, zoodat men zelfs na weken nog maar weinig afgescheiden calciumcarbonaat in de platen vindt, dat bijna geheel blijkt gevormd te zijn door de genoemde grootere koloniën en door *Streptothrix*, terwijl de gewone soorten naar het schijnt in het geheel niet oxydeeren, of wellicht juister gezegd, in het geheel niet meer oxydeeren, zoodra de laatste sporen gebonden stikstof zijn opgebruikt. Wat *Streptothrix* betreft, volgt uit het betrekkelijk krachtig oxydeerend vermogen, volstrekt niet, dat dit gepaard zou moeten gaan met stikstofbinding; het is waarschijnlijk, dat dit geslacht daartoe niet in staat is.

Doet men het onderzoek in plaats van met gewonen grond met grond geschud tusschen de wortels van tuinplanten uit, die geen Papilionaceen zijn, dan is de uitslag vrijwel dezelfde, wellicht is het getal der genoemde oxydeerende vormen iets aanzienlijker, maar dit is nog twijfelachtig.

Anders evenwel is het resultaat als men den grond onderzoekt, die aan klaver-, erwt- of boonenwortels blijft zitten als men deze planten voorzichtig opgraaft. Wrijft men zoodanige wortels met den aanhangenden grond fijn en zaait men daarvan na verdunning met water een weinig op een malaatplaat uit, dan ziet men na een kultuurtijd van 2 dagen bij 30° C. vooreerst dat de genoemde oxydeerende koloniën bijzonder krachtig tot ontwikkeling zijn gekomen. Maar bovendien liggen hier en daar tusschen deze koloniën verspreid veel grootere, die ook zeer veel krachtiger oxydeeren en die tot *Azotobacter* blijken te behooren, zoodat er een duidelijk verband bestaat tusschen de verspreiding van *Azotobacter* en van de genoemde Papilionaceen. Of dit verband algemeen zal blijken te zijn, en welke daarvan de beteekenis is zullen verdere proeven moeten leeren.

Scheikunde. — De Heer PRINSEN GEERLIGS biedt eene mededeeling aan: *„Snelle verandering in samenstelling van eenige tropische vruchten bij het narijpen."*

Eenige tropische vruchten, die gewoonlijk in groenen en oneetbaren toestand geplukt worden en dan worden bewaard, rijpen zoo spoedig na, dat zij reeds na eenige dagen zacht, geurig en eetbaar zijn geworden en bieden daardoor een goede gelegenheid aan om het nog eenigszins geheimzinnige proces van het narijpen van vruchten op den voet te volgen.

I. Verschijnselen bij het narijpen.

a. Pisang (Musa).

Gewoonlijk snijdt men de trossen pisang, waaraan vruchten in verschillende stadiën van rijpheid voorkomen in hun geheel af, als alle vruchten nog groen zijn en hangt ze ter rijpwording op. Bij het plukken zijn ze oneetbaar, hard, zonder geur of smaak, de schil is dik, bevat veel melksap en looizuur en laat niet van het vruchtvleesch los; na enkele dagen wordt de schil dun en geel en laat gemakkelijk los, het vruchtvleesch wordt geel, zacht, geurig en zoet en na nog eenige dagen is de vrucht overrijp, breiachtig en daardoor weer oneetbaar geworden.

Gedurende dit narijpen heeft er een belangrijk gewichtsverlies plaats, zooals uit onderstaande opgaaf blijkt.

Van een tros pisangs werden 20 vruchten groen afgebroken en op een betrekkelijk koele plaats (28° C.) neergelegd en iederen dag gewogen.

Het gemiddelde gewicht bedroeg na:

0	1	2	3	4	5	6	7	dagen
145	143	142.5	142	141	139	138	137	Gram

verder werden 10 vruchten onder een glazen klok gelegd en daarover een koolzuurvrije luchtstroom gevoerd, die door een droogbuisje en een koolzuurapparaatje streek, dat iederen dag gewogen werd.

De vruchten wogen vóór de proef 502.5 gram
Na 4 dagen . . . . . 487.0 „
dus hadden in 4 dagen verloren 15.5 gram

Het koolzuurapparaatje was toegenomen

den eersten dag 0.065 gram
den tweeden dag 1.455 „
den derden dag 0.540 „
den vierden dag 0.240 „
te samen 2.300 gram

zoodat in 4 dagen 2.300 gram of 0.44 % koolzuur is uitgeademd.

Van een tros pisangs, die groen afgeplukt was, werd iederen dag één vrucht van dezelfde rij, die dus onderling vrij wel dezelfde rijpte vertoonden, afgenomen en het vruchtvleesch onderzocht. Daartoe werd de vrucht van de schil ontdaan en in een mortier fijngewreven. In 10 gram der verkregen brei werd door indrogen tot constant gewicht het watergehalte bepaald. Verder werden 100 gram der brei met sterken alcohol uitgetrokken en het residu gedroogd en gewogen. De alcoholische oplossing werd ingedampt, na ter neutralisatie der zuren met een weinig koolzure kalk te zijn bedeeld, het restant in water opgenomen, een weinig neutraal loodacetaatoplossing toegevoegd en het geheel tot 100 cM³ aangevuld om de suikersoorten in de vloeistof in dezelfde concentratie te hebben als waarin zij in de vrucht voorkomen. In deze oplossing werden polarisatie en reduceerende suiker zoowel vóór als na inversie bepaald en uit de aldus verkregen cijfers werden de gehalten aan saccharose, glucose en fructose berekend, nadat er geconstateerd was, dat er geene andere suikersoorten dan deze in de vloeistof aanwezig waren.

De in alcohol onoplosbare stof, die reeds gewogen was, werd fijngewreven, en een deel daarvan koud met water uitgetrokken, dit werd afgefiltreerd en met alcohol neergeslagen. Het neerslag werd op een gewogen, aschvrij filter verzameld, gedroogd, verbrand en de verbrande organische stof als dextrine genoteerd, nadat ik vooraf in een oplossing van zulk een neerslag geconstateerd had, dat het met iodiumoplossing een roode verkleuring vertoonde.

Eene andere hoeveelheid werd onder druk met zoutzuur geïnverteerd en de verkregen hoeveelheid glucose op zetmeel omgerekend; op de bekende manier werd de asch en het stikstofgehalte bepaald, welk laatste door vermenigvuldiging met den factor 6·25 op stikstofhoudende stof werd omgerekend. De bij de analyse verkregen cijfers volgen hierachter in de tabel.

De schil bevatte veel caoutchouc, verder vezelstof en ook eenig oplosbaar koolhydraat en hare samenstelling, op 100 deelen droge stof omgerekend, verschilde niet veel in den rijpen en in den onrijpen toestand. Het watergehalte nam bij het rijpen aanzienlijk af, zoodat de volumevermindering der schil hoofdzakelijk aan waterverlies toe te schrijven is.

Het vruchtvleesch vertoonde bij het narijpen groote verschillen, doordat het zetmeel plotseling op groote schaal in saccharose werd omgezet.

Dat op deze wijze uit zetmeel verkregen suiker werkelijk saccharose was werd daardoor bewezen, dat de uit rijpe pisangs verkregen

Datum van onderzoek	17 April	19 April	20 April	22 April	23 April	24 April
Staat van rijpheid	Onrijp de schil laat niet los	Onrijp de schil laat los	Begint te rijpen	Bijna rijp	Rijp	Over-rijp
% schil	45	44	43	39	37.8	36.2
% vruchtvleesch	55	56	57	61	62.2	63 8
Analyse van het vruchtvleesch						
Water	58.24	59 21	59.48	59.86	60.88	61.12
Vaste stof	41.76	40.79	40.52	40.14	39.02	38 88
Onoplosbaar in alcohol	39.41	34.06	29.58	20.98	15.30	13 00
Oplosbaar in alcohol	2 35	6.73	10 94	19.16	23.72	25.88
Saccharose	0.86	4.43	6.53	10.50	13.68	10.36
Glucose	0.25	0.96	1.80	3.18	4.72	6.1
Fructose		0.90	1.53	2.70	3.61	4.8
Dextrine	spoor	0.52	0.59	0.69	0.65	0 65
Zetmeel	30.98	24.98	20.52	13.89	9.59	7 68
Stikstofhoudende stof	2.65	2.60	2.60	2.58	2.58	2.55
Asch	0.94	0.96	0.97	0.95	1.00	1.01

alcoholische extractie-vloeistof tot kristalliseeren gebracht werd en daarbij kristallen afzette, die door mij volgens velerlei reacties onderzocht, saccharose bleken te zijn. Later werd de saccharose weer ten deele geïnverteerd en ten deele als zoodanig of in hare inversieproducten verademd, welk laatste daarom zeer waarschijnlijk is, doordat vooreerst bij het narijpen veel koolzuur gevormd wordt en ten tweede de fructose in één geval in mindere hoeveelheid voorkomt dan de glucose, en dus niet te zamen daarmede als saccharose maar na de inversie ieder voor zich en dan de fructose in sterkere mate dan de glucose verademd is.

Bij de versuikering wordt ook nog een weinig dextrine gevormd.

b. Mangga (Mangifera).

De manggavruchten worden ook in den regel groen afgeplukt, ze zijn dan van binnen wit, hard, zuur en zonder geur en ook hier loopt het proces, waarbij zij zacht, geel of oranjekleurig, zoet en geurig

worden binnen enkele dagen af; zeer kort daarop volgt dan weer het stadium van overrijpheid en bederf.

Van een soort mangga, die bij rijpheid zeer zoete en geurige vruchten oplevert, werden eenige groen geplukte vruchten op een koele plaats van 28° C. neergelegd en dag voor dag gewogen met het gevolg,

N°.	29September	1 October	2 October	4 October
I	247 Gram	243 Gram	241 Gram	240 Gram
II	229	226	224	223
III	227	223	222	219.5
IV	249	247	246	244

5 groene manggavruchten werden gewogen en onder een klok geplaatst, waardoor een koolzuurvrije luchtstroom werd gevoerd, die later door een kaliapparaatje stroomde.

Dit werd iederen dag gewogen, terwijl de 5 vruchten na afloop der proef eveneens gewogen werden.

De 5 vruchten wogen vóór de proef	1139.3 gram.
Na 3 dagen	1121.3 „
zij verloren dus in 3 dagen	18.0 gram.

Het kaliapparaatje nam in gewicht toe

den eersten dag	1.712 gram
den tweeden dag	1.276 „
den derden dag	1.570 „
In drie dagen	4.558 gram

zoodat in drie dagen 4.558 gram of 0.40% koolzuur is uitgeademd.

Er werden weer op dezelfde wijze als bij de pisang eenige vruchten dag voor dag onderzocht en het onderzoek werd uitgebreid met eene bepaling van het vrije en het totale citroenzuurgehalte. Vooraf werd geconstateerd, dat het zuur uitsluitend citroenzuur was en dat geen ander plantenzuur in deze vruchten voorkwam.

Het vrije citroenzuur werd bepaald door titratie met 1/10 normaal alkali van de gekookte vrucht, terwijl het totale citroenzuur bepaald werd door de gekookte vrucht met alcohol te extraheeren, in de alcoholische oplossing het citroenzuur met bariumacetaat neer te slaan,

het neerslag te verbranden en daarin het koolzuur te bepalen, dat dan als equivalent met het citroenzuurgehalte werd gerekend. De resultaten zijn in deze tabel vermeld.

Datum van het onderzoek.	29September	1 October	2 October	4 October
Staat van rijpheid	Onrijp	Bijna rijp	Rijp	Overrijp
Water	83.34	82.95	81.95	83.20
Vaste stof	16.66	17.05	18.05	16.80
Oplosbaar in alcohol	6.36	15.18	15.54	14.70
Onoplosbaar in alcohol	10.30	1.87	2.51	2.10
Saccharose	2.57	10.50	12.27	9.31
Glucose	0.60	1.53	1.30	2.10
Fructose	1.90	2.10	2.01	2.60
Zetmeel	8.53	0.55	0	0
Vrij citoenzuur	1.36	0.34	0.25	0.10
Totaal citroenzuur	1.31	0.37	0.21	0.10
Asch	0.42	0.44	0.41	0.43
Stikstofhoudende stof	0.80	0.80	0.75	0.73

De gele kleurstof, die gedurende het rijpen te voorschijn komt, gaf dezelfde reacties als het o. a. in wortelen voorkomende carotine en bleek daarmede dan ook spectroscopisch overeen te komen.

Bij het narijpen gaat het zetmeel over in saccharose, welke suikersoort bij het tijdstip der overrijpheid weer in glucose en fructose wordt gesplitst: de vrucht verliest eerst water, maar door de verbranding der koolhydraten bij de ademing neemt dat later weer toe. Het citroenzuur wordt ook krachtig ontleed en de vermindering van den zuren smaak bij het narijpen is niet toe te schrijven aan een verhooging van het suikergehalte noch aan eene neutralisatie van het zuur, maar aan eene verbranding en dus vernietiging van het plantenzuur.

C. Tamarinde (Tamarindus).

De vruchten van de tamarinde blijven aan den boom hangen totdat zij geheel rijp zijn en rijpen aan den boom zelve na. Eerst is het vruchtvleesch groen en hard en vult de geheele peul, zoodat de houtige schil vast daarmede verbonden is. Later wordt het vleesch

bruin en zacht en laat van de schil los: terwijl ten slotte door verdamping het vruchtvleesch zeer droog wordt en er eene groote ruimte tusschen het vruchtvleesch en de schil ontstaat.

De samenstelling van het tamarinde vruchtvleesch in harden, in zachten en in ingedroogden toestand is als volgt:

Datum	11 Mei	27 Mei	20 Juni	15 Juli
Stadium van rijpheid	Groen	Bijna rijp	Rijp	Zeer droog
Vaste stof	15.86	38.46	40 92	76.20
Water	84.14	61.54	59.08	33.80
Glucose	0.40	10.10	20.4	25.10
Fructose	0.33	5.10	11.6	10.6
Vezelstof en pectine	3.27	8.10	7.90	14.57
Zetmeel	3.33	1.25	0	0
Vrij wijnsteenzuur	3.25	15.8	14.6	—
Totaal wijnsteenzuur	4.85	18.1	16 4	14.4
Dubbel wijnsteenzure kali	4.00	5.76	4.50	—

Ook hierbij ging het zetmeel spoedig in suiker over maar dezen keer niet in saccharose, doch in een mengsel van glucose en fructose. Tegelijkertijd verdampte er zeer veel water, waardoor de vrucht sterk ineenkromp en werd er ook veel zuur verademd, daar in het zooveel geconcentreerdere vruchtvleesch der zeer droge vrucht nog minder totaal wijnsteenzuur aanwezig was dan in het zooveel meer waterhoudende van een maand eerder. De toeneming der suiker na het tijdperk van rijping is alleen toe te schrijven aan de sterke concentratie door de verdamping, want in de zoo droge vrucht heeft geen nieuwvorming van suiker plaats gehad.

d. Sapodilla (Achras sapota)

Deze vruchten worden rijp afgeplukt, zij zijn dan groen en hard, bevatten looizuur en verder getahpercha in opgelosten toestand in de melkvaten, zoodat de vrucht oneetbaar is. Wanneer men ze in zemelen laat liggen dan wordt de getahpercha vast het looizuur wordt onoplosbaar en de vrucht is eetbaar en geurig geworden. In de doorgesneden vrucht ziet men de hard geworden getah-

percha als witte draden liggen en het looizuur is in enkele cellen geconcentreerd, hard en onoplosbaar geworden.

De analyse van een onrijpe en een na het plukken nagerijpte vrucht volgen hier.

	Boomrijp	Nagerijpt
Water	74.76	75.20
Droge stof	25.24	24.80
Saccharose	7.80	7.02
Glucose	2.85	3.7
Fructose	2.70	3.4
Zetmeel	Afw.	Afw.
Pectine	3.34	4.00
Stikstofhoudende stof	0.45	0.40
Asch	1.50	1.50

In tegenstelling met de narijping der drie vorige boomvruchten is deze niet toe te schrijven aan eene versuikering van zetmeel. De hoeveelheid suiker vóór en na het narijpen is ongeveer dezelfde, maar de vrucht is eetbaar geworden, doordat de pectine zacht werd en het looizuur en de getahpercha zich als vaste stoffen hebben afgezet.

Ik moet hier tevens vermelden, dat ik geen melksuiker, die door Bouchardat als in de sapodilla vrucht waarschijnlijk voorhanden is opgegeven, heb kunnen vinden. Wel bevatten de vruchten veel pectine en daardoor gaf het sap bij oxydatie met salpeterzuur veel slijmzuur, zoodat het zeer waarschijnlijk is, dat dit zuur, dat door Bouchardat als oxydatieproduct van melksuiker is aangezien, eenvoudig uit de pectine is voortgekomen.

II. Oorzaak der suikervorming bij het narijpen.

Bij de vruchten, die voor deze onderzoekingen in de eerste plaats in aanmerking komen, de pisang en de mangga, vonden we dus in een zeker stadium van ontwikkeling een vrij plotselinge omzetting van zetmeel in saccharose, gevolgd door eene inversie en gedeeltelijke verademing dier saccharose en hare door inversie ontstane producten.

Uit de proeven met de koolzuurbepaling van de atmospheer,

waarin deze snelle verandering plaats vindt, meende ik te mogen afleiden, dat juist het tijdstip der snelle versuikering gepaard ging met een sterke koolzuurontwikkeling, zoodat daar een sterke ademhaling en oxydatie mede samen vielen. Terzelfder tijd bewees het sterke aanslaan met vochtdroppels van den binnenwand der klok, waarin zich de vruchten bevonden, dat een ruime verdamping met de oxydatie gepaard ging.

De cijfers der koolzuurontwikkeling bij pisangs gaven voor den tweeden dag een ruime koolzuurontwikkeling, die zeer spoedig daalde, terwijl die der mangga's in de drie dagen vrij wel constant bleef, hetgeen overeen komt met de snellere narijping van eerstgenoemde vruchten bij deze proef, die juist den tweeden dag van groen geel werden.

De omzetting gaat dus met oxydatie gepaard en ik beproefde die omzetting tegen te gaan door de vruchten van de zuurstof af te sluiten. Daartoe bestreek ik eenige mangga- en pisangvruchten met collodion en bewaarde ze tegelijk met eenige soortgelijke vruchten, die niet met een ondoordringbare laag waren bedekt. De met collodion bedekte vruchten rijpten niet goed na en veranderden in rottende massa's, terwijl plaatselijk de door het afsterven ontstane rimpels het collodion af deden bladeren en dus de proef onzuiver maakten. Bovendien kon het zijn, dat het bederf niet alleen intrad door de verhindering van de toetreding der zuurstof maar ook, doordat de verdamping belemmerd werd en dit nadeelig op de vrucht werkte.

Daarom werden eenige pisangs in een buis in een stikstofstroom bewaard tegelijk met eenige andere van hetzelfde deel der tros afgebrokene, die in de lucht bewaard bleven. Toen laatstgenoemde geel, zacht en rijp geworden waren, waren die in den stikstofstroom nog groen en de analyse van het vruchtvleesch van beide soorten gaf deze cijfers:

	In stikstof	In lucht.
Water	70.54	68.36
Onoplosbaar in alcohol.	25.90	11.06
Oplosbaar in alcohol.	3.57	20.58
Saccharose.	0.31	13.66
Reduceerende suiker	0.94	4.80

Het bleek dus, dat de narijping in de lucht ongestoord had plaatsgehad, terwijl in den stikstofstroom de vrucht intact was gebleven en haar zetmeelgehalte had behouden, zoodat vrije toetreding van

zuurstof een onmisbaar vereischte is voor de saccharificatie van het zetmeel.

Ten einde na te gaan of de versuikering het gevolg kan zijn van een of ander diastatisch ferment werden de volgende proeven genomen

Een gelei van ager ager en gelatine, die bij gewone temperatuur vast was, werd met 1°/₀ zetmeel bedeeld, in glazen doozen gegoten en gesteriliseerd. Na bekoeling werden in sommige doozen schijfjes-pisang of mangga of halfrijpe stukjes tamarinde vrucht op de geleilaag gelegd en bij andere op deze laag figuren of letters geschreven met een in manggasap gedoopt penseel. Na een of twee soms meer dagen werden de vruchten verwijderd en de plaat met een zeer verdunde jodiumoplossing overgoten, die daarna verwijderd en weggewasschen werd. In ieder geval was niet alleen de plaats, waar de vrucht had gelegen of de strepen met het penseel waren aangebracht wit, maar daaromheen breidde zich de witte plek uit, die een rooden rand had en daarmede aansloot aan het blauw van het onveranderde zetmeel. Hoe langer de schalen gestaan hadden des te grooter werd de witte plek.

In al die gevallen was er dus uit de vruchten en uit het sap een diastatisch ferment uitgediffundeerd, dat het zetmeel, hetwelk het bereiken kon, door den toestand van dextrine heen in suiker omzette.

Liet men de jodiumoplossing lang op de plaat staan dan drong het jodium ook door het bovenste laagje heen, bereikte de daaronder gelegen nog onveranderde lagen en kleurde de geheele plaat blauw.

Verder werden stukjes pisang en tamarinde op schijfjes gesteriliseerde aardappel gelegd en ook daarin veroorzaakten ze door zetmeelversuikering min of meer diepe inzinkingen ter plaatse, waar de vrucht gelegen had.

Dit bewijst echter nog niet, dat de versuikering juist door een ferment werd teweeggebracht en om dat aan te toonen wierp ik stukjes pisangvrucht in alcohol, liet ze daar eenige dagen in, nam ze er uit, verdreef den alcohol met een stroom gesteriliseerde lucht en legde de stukjes weer in de glazen doozen op de met agar vast gemaakte zetmeelemulsie. Hoewel niet zoo snel als bij de veel meer waterhoudende versche vruchten, diffundeerde ook hier het ferment en bij overgieting met de jodiumoplossing vertoonden zich ook hier om de aanrakingsplaats het witte veld met den rooden rand, die eindigde in het blauw van het nog onaangetaste zetmeel.

Eene hoeveelheid manggasap werd gevoegd bij eene gekookte en weer tot 50° C. bekoelde 3°/₀ zetmeeloplossing en daarmede eenigen tijd in aanraking gelaten. De vloeistof, die eerst met jodium een zuiver blauwe verkleuring had gegeven, werd na verloop van dien tijd door een

druppel jodiumoplossing rood gekleurd, welke reactie ook bleef al hield men het mengsel nog zoo lang en voegde er nog meer manggasap aan toe. De hoeveelheid totale suiker, die de vloeistof bevatte (daar het manggasap ook suikerhoudend was) was na afloop der reactie hooger dan te voren, zoodat het bleek dat er ook in manggasap een diastatische stof voorkomt, die zetmeel kan omzetten in dextrine en in suiker.

Nu bleef de vraag nog over welke suiker er bij deze werking buiten het levende organisme ontstaat.

In de rijpende vruchten en hunne sappen bevindt zich reeds zooveel suiker, die zich met het weinigje, dat er uit zetmeel bij gevormd wordt, vermengt, dat de identificatie van deze laatste er door belemmerd wordt.

Om dit te ontgaan werden rijpende pisangvruchten herhaaldelijk met alcohol uitgekneed en de uitgedroogde en dus zoo suikervrij mogelijke pulp droog geperst en in glycerine gebracht. Na een of twee dagen werd de glycerine eerst op glucose onderzocht en wel voor en na inversie en daarna 100 gram daarvan met eene 3 °/₀ zetmeeloplossing bij 40° verwarmd. Daarna werd de vloeistof met alcohol bedeeld ter precipitatie van zetmeel en dextrine, de alcoholische oplossing om inversie te voorkomen, met een weinig koolzure kalk tot stroop ingedampt weer tot 100 cM³ aangevuld en de polarisatie voor en na inversie bepaald.

De glycerineoplossing bevatte op zich zelf 0.17°/₀ glucose, zoowel voor als na inversie en na behandeling met zetmeel waren er in 100 Gram van de glycerineoplossing voor inversie 0.60 Gram reduceerende suiker en na inversie 0.67, zoodat er 0.43 Gram glucose en 0.07 Gram saccharose (?) zijn ontstaan. — De polarisatie der vloeistof bedroeg voor + 0,9 en na inversie + 0.4 waardoor het wel schijnt, dat er nog een weinig dextrine of zetmeel opgelost is gebleven. —

In ieder geval blijkt het zoowel door de verhindering der suikervorming bij afsluiting van de zuurstof als door de niet gelukte saccharificatieproeven met versch fermenthoudend sap en met de neergeslagen en weer opgeloste fermenten uit zetmeel in het laboratorium, dat de zeer snelle saccharosevorming uit zetmeel bij het narijpen van vruchten een proces van het leven der vrucht is en niet een werking is van een in de vrucht aanwezig ferment, dat ook buiten het organisme evenals diastase uit zetmeel maltose vormt, uit zetmeel evenzeer groote hoeveelheden saccharose zou kunnen doen ontstaan.

Scheikunde. — De heer HOLLEMAN biedt eene mededeeling aan namens den heer J. J. BLANKSMA: „*Reductie van aromatische nitrolichamen door natriumdisulfide*".

(Mede aangeboden door den Heer A. P. N. FRANCHIMONT).

Reeds vroeger [1]) heb ik er op gewezen, dat natriumdisulfide op twee verschillende wijzen op aromatische nitrolichamen kan inwerken nl. 1e substitueerend en 2e reduceerend.

1e. Substitutie treedt op, wanneer halogeenatomen of nitrogroepen aanwezig zijn, die onder den invloed van ortho- of parastandige nitrogroepen beweeglijk zijn geworden. Deze laten zich door inwerking van Na_2S_2 gemakkelijk door S_2 vervangen, terwijl de aldus gevormde disulfiden door oxydatie in sulfonzuren kunnen worden omgezet. Een vrij groot aantal van deze gevallen is reeds vroeger medegedeeld [1]).

2e. Bevatten de nitrolichamen geen beweeglijke halogeenatomen of nitrogroepen dan treedt reductie op, waarbij een nitrogroep tot een amidogroep wordt gereduceerd terwijl tevens meestal eene geringe hoeveelheid azoxyverbinding wordt gevormd volgens de vergelijkingen:

$$RNO_2 + Na_2S_2 + H_2O = RNH_2 + Na_2S_2O_3$$

$$2\ RNO_2 + Na_2S_2 = RN \underset{O}{\diagdown\!\diagup} NR + Na_2S_2O_3$$

Bij een voorloopig onderzoek was mij vroeger reeds gebleken, dat nitrobenzol en *o*-nitrotoluol in alcoholische oplossing door Na_2S_2 gemakkelijk in aniline resp. *o*-toluidine worden omgezet, terwijl het Na_2S_2 ot $Na_2S_2O_3$ wordt geoxydeerd. Tevens was uit *m*-dinitrobenzol en *p*-dinitrobenzol door inwerking van Na_2S_2 *m*-dinitroazoxybenzol resp. *p*-dinitroazobenzol verkregen. Het lag in de bedoeling, zooals was aangekondigd [2]) de reduceerende werking van het Na_2S_2 nader te onderzoeken. Intusschen is aan KUNZ [3]) een patent verleend voor de reductie van aromatische nitrolichamen tot amidoderivaten door middel van Na_2S_2 in waterige oplossing, terwijl later door BRAND [4]) het natriumdisulfide gebruikt is als partieel reductiemiddel.

---

[1]) Dissertatie Amsterdam 1900. Rec. 21. 121. 141.

[2]) Versl. Konink. Akad. 27. Oct. 1900. 346. noot.

[3]) Chem. Centr. Bl. 1903. II 813.

[4]) Journ. f. prakt. Chem. (2) 74. 449 (1906).

Ik heb thans voor een aantal gevallen de reductie van aromatische nitroverbindingen door Na_2S_2 in alcoholische oplossing nagegaan. De reductie wordt als volgt uitgevoerd:

Men kookt eene oplossing van 12 gr. Na_2S 9 H_2O en 1.6 gr. S in 300 c.c. alcohol van 96°/₀, en voegt daaraan 6 gr. nitrobenzol toe. Nadat de oplossing 6 uren heeft gekookt, distilleert men den alcohol af en blaast daarna de aniline, die met iets onveranderd nitrobenzol gemengd is, met stoom over. Van de aniline wordt daarna het zoutzure zout gemaakt om ze van het nitrobenzol te scheiden. Opbrengst 5 gr. zoutzuur aniline. Op dezelfde wijze werden *o*-*m*- en *p*-nitro-anisol; *m*-chloor- en broomnitrobenzol en dichloor- en dibroomnitrobenzol 1. 3. 5. behandeld, waaruit gemakkelijk de overeenkomstige amido-derivaten werden verkregen met opbrengst van ± 70°/₀ der berekende hoeveelheid.

Bij ortho- en para-chloornitrobenzol, waar het halogeenatoom door S_2 wordt vervangen treedt ook gelijktijdig, hoewel in geringe mate reductie op, zoodat *o*- en *p*-chlooraniline gevormd worden.

Ortho- en *m*-nitrotoluol geven gemakkelijk ortho- en meta-toluidine; bij para-nitrotoluol treedt een nevenreactie op. Hierbij ontstaat naast *p*-toluidine tevens *p*-amidobenzaldehyde [1]).

Behalve de bovengenoemde mononitroverbindingen werden nog eenige dinitroverbindingen partieel gereduceerd. Zoo verkrijgt men uit sym-dinitrotoluol door alcoholische Na_2S_2 gemakkelijk 3-nitro-5-amidotoluol; sym. dinitroanisol geeft 3-nitro-5-amido-anisol, uit 2-4-dinitroanisol resp. phenetol worden 2-amido-4-nitroanisol resp. phenetol verkregen, terwijl sym. trinitrobenzol het 3-5- dinitraniline geeft. Meestal ontstaat ook hier naast de amidoderivaten eene geringe hoeveelheid van de azoxyverbindingen. Ik wil er nog op wijzen, dat men door reductie met Na_2S_2 de vorming van chloorhoudende bijprodukten, die dikwijls bij reductie van aromatische nitrolichamen met Sn en HCl ontstaan, vermijdt, terwijl in het feit, dat Na_2S_2 zich laat afwegen een voordeel is gelegen boven de reductie met zwavelammonium.

Uit deze gevallen blijkt voldoende, dat Na_2S_2 in alcoholische oplossing zeer goed als reductiemiddel kan worden gebruikt.

---

[1]) Cf. Centr. Bl. 1900. 1. 1084. Meer analoge gevallen van intramoleculaire oxydatie hoop ik later mede te deelen.

Sterrenkunde. — De Heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN biedt aan eene mededeeling van den Heer C. SANDERS: „*Bijdragen tot de astronomische plaatsbepaling op de Westkust van Afrika. III.*"

(Mede aangeboden door den Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN).

I. Inleiding.

Na een verblijf in Europa gedurende den winter van 1902 op 03 keerde ik in het Portugeesche Congogebied terug en bleef aldaar tot ik in het najaar van 1906 opnieuw tijdelijk naar Europa overkwam.

Gedurende die jaren 1903 tot 1906 heb ik wederom getracht, voor zoover tijd en omstandigheden het mij toelieten, bijdragen te leveren tot de plaatsbepaling in deze streeken. De omstandigheden waren echter veeltijds voor mijne waarnemingen ongunstig en zoo is de verkregen oogst geringer geweest dan ik gewenscht en ook aanvankelijk gehoopt had.

De door mij verkregen uitkomsten laten zich in 3 rubrieken splitsen.

1°. *Nieuwe bepalingen te Chiloango.* In de maanden November en December 1903 verrichtte ik aldaar eene nieuwe reeks van breedtebepalingen door zenitsafstanden in den meridiaan. Daarentegen gelukte het mij niet nieuw materiaal te verzamelen ter verbetering van de bepaling der lengte en ten slotte heb ik dit geheel opgegeven, totdat ik mij een kijker van voldoende afmetingen zou verschaft hebben, om daarmede sterbedekkingen te kunnen waarnemen [1]), welke zeker tot eene hoogere nauwkeurigheid in de lengtebepaling zullen voeren, dan door maanshoogten met mijn betrekkelijk kleine instrument te bereiken viel.

2°. *Astronomische plaatsbepalingen op verschillende punten in het Chiloangogebied.* Op twee reizen, eene naar N'Kutu aan den bovenloop der Chiloangorivier van 22 tot 31 December 1903 en eene langere reis door Mayombe [2]) in Juni 1904 heb ik astronomische plaatsbepalingen kunnen verrichten. Dat mij dit niet vaker gelukt is moet aan de eigenaardige moeilijkheden geweten worden, waarmede vooral het transport der instrumenten, in de eerste plaats van de chronometers, verbonden is. Het gemakkelijkst geschiedt dit nog wanneer vervoer te water in een kano mogelijk is, hoewel men dan nog voortdurend moet toezien dat ongewenschte stooten door het

[1]) Werkelijk heb ik onlangs (1907) een kijker van ZEISS van 80 mM. opening en 120 cM. brandpuntsafstand ontvangen, waarmede ik reeds eenige eerste proeven genomen heb.

[2]) Naam van een gedeelte van het Chiloangogebied.

aanvaren van drijvende boomstammen worden vermeden. Voor het vervoer der chronometers te land gebruikte ik een hangmat door twee negers aan een langen stok gedragen, terwijl bij de bestijging van heuvels getracht werd den stok zooveel mogelijk horizontaal te houden. Eene andere belemmerende omstandigheid voor het verkrijgen van nauwkeurige uitkomsten is dat zulke tochten alleen in het drooge jaargetijde kunnen geschieden, en de nachthemel dan meestal bedekt is, zoodat men zijne toevlucht moet nemen tot waarnemingen van de zon, terwijl eindelijk op verschillende punten een verblijf zeer bemoeilijkt wordt, doordien vroeger daar bestaande welvarende negerdorpen nagenoeg geheel ontvolkt en in eene woestenij veranderd zijn tengevolge der slaapziekte.

Op de reis van 1903 December werden de instrumenten geheel te water vervoerd, eerst tot Mayili per stoomboot, daarna naar N'Kutu per kano. Ik verkreeg toen in laatstgenoemde plaats eene breedte- en eene lengtebepaling.

De reis door Mayombe in 1904 Juni begon weder met per stoomboot de Chiloango- (of Loango-) rivier op te varen tot Mayili, waar op 2 Juni werd aangekomen en toen eene tijdsbepaling werd verricht ter contrôle der vroeger bepaalde lengte. Daarna ging de tocht eerst over land naar Chimbete (3 Juni) en toen weder een eind per kano de rivier op naar N'Kutu. Dat eerste landtraject, toen de dragers nog niet aan hun eigenaardige werk gewend waren, heeft helaas blijkens de onderlinge vergelijkingen der chronometers ten minste bij een van beide eene storing teweeggebracht.

Ook te N'Kutu werd op 5 Juni eene tijdsbepaling genomen, om eene tweede uitkomst voor de lengte dier plaats te verkrijgen en daarop werd op 6 Juni de tocht nu verder over land voortgezet langs vaak zeer moeielijke wegen door bosch en over heuvels en eenige malen door kleine zijriviertjes der Loango. Eerst ging het in noordoostelijke richting tot N'Vyellele, een dorp 28,5 kilom. ten noordoosten van N'Kutu gelegen (7 Juni) en daarna werd drie dagen lang in westelijke richting getrokken tot op 10 Juni Buku-Zan een dorp aan de Luali rivier, eene zijrivier der Loango, bereikt werd.

Op 13 en 14 Juni werd nog van Buku-Zan een tocht in noordelijke richting naar M'Pene Kakata ondernomen, doch overigens bleef ik in eerstgenoemde plaats tot 16 Juni en gebruikte de gelegenheid zoo goed mogelijk om hier de lengte en de breedte te bepalen.

Op 16 Juni keerden wij van Buku-Zan naar N'Kutu terug, ditmaal direct in zuidoostelijke richting gaande, en na een afstand van 38 kilom. te hebben afgelegd bereikten wij op 17 Juni N'Kutu weder. Vandaar keerden wij op dezelfde wijze als wij gekomen waren over

Chimbete en Mayili naar Chiloango terug (18—23 Juni), waarbij ik intusschen de gelegenheid vond te Chimbete de lengte en breedte dier plaats te bepalen.

3°. *Aansluiting van een groot aantal punten in het binnenland aan de astronomisch bepaalde door middel van kompaskoersen en afstanden.* Het was mijne bedoeling door mijne astronomische bepalingen een net van hoofdpunten te vormen, waaraan ik de op vele reizen door kompaskoersen en afstanden bepaalde tusschenpunten zou kunnen aansluiten, en zoo ook voor de plaats van deze eene redelijke nauwkeurigheid zou kunnen bereiken. Dit is mij voor een deel gelukt, doch voor het zuidelijke gedeelte van het door mij doorreisde gebied zal nog de primaire bepaling van één en zoo mogelijk 2 punten aan de Lukula rivier, Chipondi en misschien Pouro noodig zijn, te meer daar de voorloopige uitkomst uit mijne secundaire bepaling van het punt Lemba aan die rivier sterk afwijkt van die welke voor eenige jaren door den Heer CABRA bij de bepaling der grensscheiding tusschen den Congostaat en het Portugeesche gebied verkregen werd.

Ik zal trachten het ontbrekende nog aan te vullen. Intusschen zijn hier de moeilijkheden bijzonder groot, daar de slaapziekte in de laatste jaren hier hevig gewoed heeft. In ieder geval zal het wenschelijk zijn de mededeeling mijner secundaire bepalingen nog uit te stellen.

II. *Tijdsbepalingen te Chiloango. Standen en Gangen van de chronometers.*

Voor mijn vertrek naar Afrika in 1903 had ik mij nevens mijn chronometer van HEWITT nog een tweeden van HOHWÜ aangeschaft. Tijdens mijn geheele verblijf te Chiloango van 1903 Mei tot 1906 Juli heb ik deze onder controle gehouden, door van tijd tot tijd eene tijdsbepaling te nemen op dezelfde wijze als vroeger, d.i. door hoogtemetingen met mijn universaal-instrument. Buitendien werden beide chronometers dagelijks onderling vergeleken.

Wat de tijdsbepalingen zelven betreft heb ik aan het vroeger medegedeelde alleen nog toe te voegen:

1°. dat nieuwe bepalingen van de waarde van een niveaudeel daarvoor 5".4 gaven, juist evenals vroeger;

2°. dat altijd de buiging en de verdeelingsfouten van den cirkel werden in rekening gebracht volgens de formule in *Bijdragen II.*

Hieronder volgen de uitkomsten voor standen en gangen der chronometers verkregen. De gangen en evenzoo de temperaturen hebben betrekking op het tijdsinterval tusschen den datum één regel hooger en dien op den regel zelven. De temperaturen ontbreken voor den tijd mijner beide reizen. Over de „Gangen HEWITT v. 20°" spreek ik aanstonds.

STANDEN EN GANGEN DER CHRONOMETERS.

Dag		M. T.	Temp. C.	Chron. Hewitt			Chron. Hohwü	
				Stand	D. Gang	D. Gang v. 20° C.	Stand	D.Gang
		u		m s			m s	
1903 Mei	15	8 12		+47 59 03			+46 55 03	
					s	s		s
„	20	8.15	24.5	58.38	—0 13	—1 25	56.38	+0 27
„	25	8.46	24.0	57.24	—0.23	—1.23	57.24	+0.17
Juni	20	8.18	22.0	38.13	—0.74	—1.24	48.13	—0.35
„	27	8.10	19.6	31.41	—0.96	—0.86	45.41	—0.39
Juli	3	8.32	19.6	26.06	—0.89	—0.79	40.06	—0.89
„	10	8.25	19.7	18.71	—1.05	—0.97	32.71	—1.05
„	17	8.10	20.1	11.17	—1 08	—1.10	27.57	—0.73
„	25	8.50	19.1	1 98	—1.15	—0.93	20.48	—0.89
Aug.	4	8.15	9.7	+46 51.06	—1.09	—1.01	15.06	—0.54
„	24	8.22	21.0	41.03	—0.50	—0.52	8.53	—0.33
Oct.	12	8.45	24.4	41.88	+0.02	—1.08	13.38	+0.10
„	19	8.10	25.6	44.45	+0.37	—1.03	17.95	+0.65
Nov.	5	7.93	25.5	54.35	+0.58	—0.80	21.85	+0.23
„	16	8.53	26.0	+47 2.31	+0.72	—0.78	22.81	+0.09
„	20	7.98	25.6	4.32	+0.50	—0 90	23.92	+0.28
Dec.	20	8.05	25.3	17.97	+0.46	—0.86	48.97	+0.83
1904 Jan.	3	8.04		28.08	+0.72		52.08	+0.22
„	6	8.43	25.3	28.70	+0.21	—1.11	53.20	+0.37
„	17	7.97	25.7	35.56	+0.62	—0 80	+47 0.56	+0.67
„	22	8.20	25.4	37.35	+0.36	—0.99	5.35	+0.96
„	29	8.44	25.2	40.79	+0.49	- 0.81	10 79	+0.78
Febr.	9	8.40	25.3	45.93	+0.47	—0.85	19.43	+0.78
„	20	8.05	25.8	55 41	+0.86	—0.59	21.41	+0.18
Mrt	4	8 23	25.8	+48 8.69	+1.02	—0.43	30.69	+0.71
„	31	8.08	25.7	38.47	+1.10	—0.32	43.47	+0.47
Mei	12	8.08	25.5	+49 13.51	+0.83	—0.55	+48 8.01	+0.58
„	23	7.80	24.5	14.83	+0 12	—1.00	18.33	+0.94
„	30	8.37	24.4	15.66	+0.11	—0.99	26.66	+1.18
Juni	24	7.70		22.83	+0 29		47.33	+0.83
Aug.	1	8.30	20.9	17.42	—0.14	- 0.36	+49 8.92	+0.57
Sept.	30	7.90	21.2	+48 58.86	—0.31	—0.61	20.86	+0.20
Oct.	14	8.24	23.8	+49 1.48	+0.19	—0.79	25.98	+0.37

Dag		M. T.	Temp. C.	Chron. Hewitt.			Chron. Hohwü	
				Stand	D. Gang	D. Gang v. 20° C.	Stand	D.Gang
		u		m s	s	s	m s	s
1904 Oct.	24	8 30	24.3	+49 5 35	+0 39	—0 69	+49 33 85	+0 79
Nov.	5	8.25	24.6	10.03	+0.39	—0.76	42.03	+0.68
„	10	8.25	25.1	11.93	+0.38	—0.90	44.93	+0.58
„	18	8.07	25.1	15.25	+0.42	—0.86	51.75	+0.85
„	29	7.99	25.5	19.97	+0.43	—0.95	+50 3.97	+1.11
Dec.	9	8.10	25.1	26.46	+0.65	—0.63	11.96	+0.80
„	19	8.32	25.0	28.54	+0.21	—1.03	22.04	+1.11
1905 Jan.	2	8.12	24.6	31.26	+0.19	—0.96	34.26	+0.87
„	14	8.10	25.7	36.40	+0 43	—1.01	46.40	+1.01
„	21	9.24	25.6	38.64	+0.32	—1.08	52.14	+0 82
Febr.	12	8.43	25.9	49.17	+0.48	—0 99	+51 2.17	+0.46
„	25	8.54	26.2	57.37	+0.63	—0.91	7.87	+0.44
Mrt	5	8.03	26.4	+50 2.23	+0.61	—1.00	6.73	—0.14
„	25	7.94	26.6	16.72	+0.72	—0.92	10.72	+0 20
Apr.	21	8.22	26.6	36.74	+0.74	—0.90	1.24	—0.35
Juni	27	8.20	24.1	50.70	+0.21	—0.82	+50 57.70	—0.05
Sept.	1	8.66	21.0	29.38	—0.32	—0.57	29.38	—0.43
„	3	8.64	22.6	29.36	—0.01	—0.65	28 86	—0.26
„	7	8.35	22.6	28.35	—0.25	—0.90	24.35	—1.13
Oct.	19	8.05	24.0	33.86	+0.13	—0.86	1.86	—0.54
„	31	7.99	25.2	37.20	+0.28	—1.03	+49 53.70	—0.68
Nov.	4	8.32	25 1	40.33	+0.78	—0.50	52.53	—0.29
„	22	8.39	26.1	51.46	+0.62	—0.91	39.96	—0.70
Dec.	6	8.18	26.3	+51 2.09	+0.76	—0.82	31.09	—0.63
„	16	8.20	25.6	9.58	+0.75	—0.65	23.58	—0.75
1906 Jan.	8	8.24	26.2	26.52	+0.74	—0.81	9 02	—0.63
Febr.	24	8.45	26.3	+52 8.84	+0.90	—0.68	+48 11.34	—1.23
Mrt.	11	8.37	27.3	26.09	+1.15	—0.67	+47 58.09	—0.88
„	21	8.11	26.7	33.93	+0.78	—0.90	48.43	—0.97
Apr.	3	7.90	26.6	43.32	+0.72	—0.92	35.62	—0.99
Mei	6	8.45	25.8	58.36	+0.46	—1.00	0.96	—1.05
Juni	1	8.14	24.2	52.20	—0.24	—1.28	+46 29.84	—1.21
„	18	8.09	22.7	39.07	—0.77	—1.43	1.57	—1.66
Juli	19	8.52	20.8	8.52	—0.98	—1.22	+45 9.52	—1.68

Ik onderzocht nu de chronometergangen, vooreerst wat den invloed der temperatuur betreft, en vormde daartoe gemiddelde gangen voor een tijdperk van ongeveer 2 maanden, telkens in iederen zomer en iederen winter.

Tijdperk	Temp. C.	Chron. Hewitt.		Chron. Hohwü.	
1903 Juni 20—Aug. 4	19.63	— 1^{s} 05		— 0^{s} 73	
Nov. 5—Maart 31 [1])	25.58		+ 0^{s} 71		+ 0^{s} 59
1904 Juni 24—Sept. 30	21.03	— 0.24		+ 0.34	
1905 Febr. 12—April 21	26.42		+ 0.70		— 0.01
Juni 27—Sept. 1	20.95	— 0.32		— 0.43	
1906 Jan. 8—April 3	26.83		+ 0.90		— 1.10
Juni 18—Juli 19	20.82	— 0.98		— 1.68	

Voor den chronometer van Hewitt volgt hieruit een zeer duidelijke invloed van de temperatuur en, voor zoover men voorloopig kan nagaan, geene verandering met den tijd.

Als eenvoudige gemiddelden der 4 winter- en der 3 zomergangen met de bijbehoorende temperaturen vindt men:

	26°.28	+ 0^{s}.77
	20 .61	— 0 .65
Dus:	Verand. per graad	+ 0 .25 [2])

Met dezen temperatuurcoëfficient zijn nu alle gangen op 20° gereduceerd en die gereduceerde gangen zijn in bovenstaande tabel opgenomen onder het hoofd D.Gang v. 20° C. De eenvoudige middelwaarde dezer herleide gangen is — 0^{s}.87, waarvan de werkelijke gemiddelde herleide gang (— 0^{s}.83) slechts weinig afwijkt. Door de verschillen te vormen tusschen de enkele herleide gangen en hunne middelwaarde, vond ik als middelbare fout van een Dagel. Gang, wanneer men niet let op de verschillende grootte der tusschenruimten tusschen de tijdsbepalingen:

M.F. ± 0^{s}.225

[1]) Hierbij werd uitgesloten het tijdperk Dec. 20—Jan. 3, dat mijne reis omvat.

[2]) Bepaling van een kwadratischen term was bij de geringe temperatuursverschillen onmogelijk. Vroeger was voor de jaren 1901—02 als temperatuurcoëfficient + 0^{s}.18 gevonden.

eene zeer bevredigende uitkomst, vooral als men in aanmerking neemt dat voor het geheele tijdperk van ruim 3 jaren een standvastige alleen van de temperatuur afhankelijke gang aangenomen is.

Voor den chronometer van HOHWÜ zijn de uitkomsten iets minder gunstig. Reeds onmiddellijk ziet men eene duidelijke verandering met den tijd, die van 1904 af in denzelfden zin schijnt voort te gaan. Om nu den temperatuurcoëfficient af te leiden, vergeleek ik telkens den zomergang met het gemiddelde der beide aanliggende wintergangen en vond zoo:

zomer—winter + $0^s.78$
+ 0 .03
— 0 .05

Een regelmatige invloed van de temperatuur is dus niet zichtbaar en de eerste grootere waarde is veeleer aan eene afwijkende voortgaande verandering in den eersten tijd toe te schrijven. Ik nam daarom als temperatuurcoëfficient $0^s.00$ aan en vormde, om de van de temperatuur onafhankelijke verandering nader na te gaan, gemiddelde gangen voor ongeveer driemaandelijksche tijdperken. Deze volgen hier, te zamen met de overeenkomstige waarden voor den chronometer van HEWITT.

DAGELIJKSCHE GANGEN UIT DRIEMAANDELIJKSCHE TIJDPERKEN.

	D. Gang Hewitt herleid op 20°.	D. Gang Hohwü
	s	s
1903 Mei 15—Aug. 4	— 1.08	— 0.49
Aug. 4—Nov. 5	— 0.90	+ 0.07
Nov. 5—Jan. 29	— 0.86	+ 0.65
1904 Jan. 29—Mei 12	— 0.51	+ 0.55
Mei 12—Aug. 1	— 0.56	+ 0.72
Aug. 1—Nov. 5	— 0.66	+ 0.34
Nov. 5—Jan. 21	— 0.93	+ 0.91
1905 Jan. 21—Apr. 21	— 0.94	+ 0.10
Apr. 21—Juni 27	— 0.82	— 0.05
Juni 27—Nov. 4	— 0.72	— 0.50
Nov. 4—Febr. 24	— 0.76	— 0.90
1906 Febr. 24—Mei 6	— 0.90	— 0.99
Mei 6—Juli 19	— 1.29	— 1.51

Ook uit deze samenstelling blijkt de grootere regelmatigheid van den chronometer van HEWITT, bij welken alleen de laatste gang wat meer afwijkt. Bij dien van HOHWÜ schijnt echter de gang vrij standvastig te zijn gedurende het tijdvak van 1903 Nov. 5 tot 1905 Jan. 21, waarvoor de gemiddelde gang $+ 0^s.61$ bedraagt.

Uit de afwijkingen der enkele gangen gedurende dit tijdvak van hun middental vindt men, weder zonder op de lengte der tijdsintervallen te letten:

M.F. D. Gang HOHWÜ $\pm$ $0^s,30$

dus toch nog grooter dan voor HEWITT. Daar staat echter tegenover dat de vrij groote temperatuurscoëfficient voor dezen een nadeel oplevert voor tijden, waarvoor de kennis der temperatuur te wenschen laat.

III. Nieuwe Breedtebepaling te Chiloango

In de maanden November en December 1903 voerde ik te Chiloango eene nieuwe breedtebepaling uit, wederom door hoogtemetingen met mijn universaalinstrument, doch met dit verschil tegenover vroeger, dat veel meer verschillende sterren werden waargenomen, doch elke slechts eenmaal werd ingesteld juist bij den meridiaandoorgang. De waarnemingen werden dan zoo ingericht dat afwisselend 2 Noord- en 2 Zuidsterren werden waargenomen en van ieder dier paren de eene bij Cirkel rechts, de andere bij Cirkel links.

Steeds werd aan ieder der twee mikroskopen zoowel op de voorafgaande als op de volgende deelstreep ingesteld. Het verbeteren voor runwaarde en voor stand van het niveau geschiedde even als vroeger (*Bijdragen* I. p. 287), de refractie werd nu berekend naar de tafels van BESSEL en de sterdeclinaties werden weder ontleend aan de *Nautical Almanac* en berusten dus op den catalogus van NEWCOMB. Alleen werden enkele malen ook sterdeclinaties uit het *Berliner Jahrbuch* genomen n. l. van v Piscium, δ Cassiopeiae en φ Persei. Naar opgaven mij verstrekt door Dr E. F. v. D. SANDE BAKHUYZEN bracht ik aan deze ter herleiding op NEWCOMB aan resp.: $-0''.1$, $-0''.8$ en $+0''.7$,

Het zenitpunt werd voor elken avond constant aangenomen en zoo bepaald dat alle sterren van dien avond zoo goed mogelijk in onderlinge overeenstemming kwamen. De regelmatige afwisseling der instrumentstanden bij de waarneming maakt echter fouten in het aangenomen zenitpunt zoo goed als geheel onschadelijk.

De waarnemingen werden verricht in 6 standen van den cirkel, telkens 30° verschillend.

Vooreerst wil ik als voorbeeld de waarnemingen van één avond volledig mededeelen.

1903 DECEMBER 7

Aangenomen runcorrectie voor 10′ — 0″.66
„ zenitpunt 239°59′47″.32
Temperatuur en barometerstand bij 1e ster 25.3 759.4
4e „ 24.9 759.5
6e „ 24.6 759.6
12e „ 24.0 759.8

Ster		Aflezing Mikr. A	Aflezing Mikr. B	Corr. v. Niveau	Zenitsafst.	Refr.	φ
							—5°11′
α Sculptoris	R	264°40′ 15″	39′ 51″	— 3″89	24°40′ 12″12	25″37	68″01
		15	51				
β Phoenicis	L	197 58 49	58 24	— 2.97	42 1 14.53	49.73	69.94
		48	23				
β Andromedae	R	280 18 7	17 42	0.00	40 18 8.23	46.82	64.95
		7	47				
δ Cassiopeiae	L	175 5 24	5 5	+ 2.59	64 54 31.00	1′ 57.47	65.87
		23	3				
γ Phoenicis	R	278 35 57	35 33	+ 1.08	38 35 58.96	44.13	67.91
		58	33				
α Eridani	L	187 29 33	29 15	— 2.43	52 30 26.79	1 12.04	66.67
		34	11				
φ Persei	R	295 23 16	22 57	— 3.78	55 23 14.28	1 20.03	66.71
		12	56				
ι Cassiopeiae	L	171 38 9	37 56	+ 0.54	68 21 44.73	2 [illegible]8.50	62.93
		9	55				
α Hydri	R	296 49 0	48 39	+ 0.81	56 49 1.24	1 24.44	65.02
		48 58	35				
γ Andromedae	L	192 56 47	56 23	— 4.86	47 3 18.[illegible]3	59.55	62.48
		45	22				
α Arietis	R	268 12 3	11 38	— 1.62	28 12 2.27	29.75	59.02
		5	38				
φ Eridani	L	193 15 24	14 55	+ 2.70	46 44 35.38	58.91	64.91
		22	56				

Verder deel ik nu voor alle waarnemingen de uitkomsten voor de breedte mede in 4 kolommen, voor Noordster cirkel rechts en

cirkel links en voor Zuidster cirkel rechts en links. Daarnevens geef ik den benaderden zenitsafstand.

Datum	Ster		Zenits-afst.	Breedte			
				N. R.	N. L.	Z. R.	Z. L.
1903					— 5°11′		
November 28	ξ Toucani	R	Z 60°			57″42	
Zenitp. 180°	α Phoenicis	L	Z 38				58″21
	α Cassiop.	R	N 61	66″43			
	γ Cassiop.	L	N 65		71″99		
	α Sculptoris	R	Z 25			49.73	
	β Phoenicis	L	Z 42				59.27
	β Androm.	R	N 40	65.53			
	ω Piscium	L	N 32		71.42		
	δ Cassiop.	R	N 65	67.73			
	Midden			**66.56**	**71.70**	**53.58**	**58.74**
December 2	γ Cassiop.	L	N 65		67.85		
Zenitp. 210°	α Sculptoris	R	Z 25			57.91	
	β Androm.	R	N 40	67.85			
	Midden			**67.85**	**67.85**	**57.91**	
December 6	α Sculptoris	R	Z 25			60.98	
Zenitp. 210°	β Phoenicis	L	Z 42				64.35
	β Androm.	R	N 40	69.94			
	δ Cassiop.	L	N 65		69.59		
	γ Phoenicis	R	Z 39			63 53	
	α Eridani	L	Z 53				59.45
	Midden			**69.94**	**69.59**	**62.26**	**61.90**
December 7	α Sculptoris	R	Z 25			68.01	
Zenitp. 240°	β Phoenicis	L	Z 42				69.94
	β Androm.	R	N 40	64.95			
	δ Cassiop.	L	N 65		65.87		
	γ Phoenicis	R	Z 39			67.91	
	α Eridani	L	Z 53				66.67
	γ Persei	R	N 55	66.71			
	ε Cassiop.	L	N 68		62.93		

Datum	Ster		Zenits-afst.	Breedte N. R.	N. L.	Z. R.	Z. L.
					— 5° 11′		
Dec. 7 Vervolg	α Hydri	R	Z 57°			65′02	
	γ Androm.	L	N 47		62′48		
	α Arietis	R	N 28	59′02			
	φ Eridani	L	Z 47				64′91
	Midden			**63.56**	**63.76**	**66.98**	**67.17**
December 10	δ Cassiop.	L	N 65		63.11		
Zenitp. 270°	γ Phoenicis	R	Z 39			68.08	
	α Eridani	L	Z 53				69.66
	φ Persei	R	N 55	61.18			
	ε Cassiop.	L	N 68		64.79		
	α Hydri	R	Z 57			68.58	
	β Trianguli	R	N 40	62.54			
	φ Eridani	L	Z 47				71.22
	Midden			**61.86**	**63.95**	**68.33**	**70.44**
December 14	γ Phoenicis	R	Z 39			62.22	
Zenitp. 300	α Eridani	L	Z 53				62.88
	β Arietis	R	N 26	58.41			
	α Hydri	R	Z 57			65.99	
	γ Androm.	L	N 47		59.56		
	β Trianguli	R	N 40	64.07			
	φ Eridani	L	Z 47				61.99
	δ Hydri	R	Z 64			64.13	
	Midden			**61.24**	**59.56**	**64.11**	**62.44**
December 15	δ Cassiop.	L	N 65		68.96		
Zenitp. 330	γ Phoenicis	R	Z 39			64.05	
	α Eridani	L	Z 53				59.03
	φ Persei	R	N 55	72.49			
	ε Cassiop.	L	N 68		68.16		
	α Hydri	R	Z 57			57.46	
	γ Androm.	R	N 47	67.16			
	β Trianguli	L	N 40		68.18		
	φ Eridani	L	Z 47				59.67
	Midden			**69.82**	**68.43**	**60.76**	**59.35**

De waarnemingen bij Zenitpunt 210° zijn over twee avonden verdeeld, Dec. 2 en Dec. 6. Aangezien het juiste zenitpunt voor beide wel niet als geheel gelijk mag beschouwd worden, is het misschien beter, waar op Dec. 2 slechts één zuidster in één instrumentstand is waargenomen, deze uit te sluiten. Overigens zijn geene waarnemingen uitgesloten, ook niet enkele welke wat sterker afweken.

Ik heb nu voor elken cirkelstand de uitkomsten voor beide instrumentstanden vereenigd, doch die voor Noord- en Zuidsterren gescheiden gehouden en verkreeg aldus:

Zenitpunt	Noordsterren	Zuidsterren	N—Z	$\frac{N+Z}{2}$
	— 5° 11′			— 5° 12′
180°	69″13	56″16	— 12″97	2″64
210	68.81	62.08	— 6.73	5.44
240	63.66	67.08	+ 3.42	5.37
270	62.90	69 38	+ 6.48	6.14
300	60.40	63.28	+ 2.88	1.84
330	69.12	60.06	— 9.06	4.59
Midden	**65.67**	**63.01**	**— 2.66**	**4.34**

Nevens de uikomsten uit de Noord- en Zuidsterren zijn hunne verschillen gevormd en hunne halve sommen. De eerste stellen, voor zoover men benaderd mag aannemen dat telkens de Noord- en de Zuidsterren den zelfden gemiddelden zenitsafstand hadden, de correctie der gemeten bogen van 2 z wegens verdeelingsfouten + de dubbele correctie der gemeten z wegens buiging voor (zie *Bijdragen* I p. (292)), terwijl de halve sommen in dezelfde onderstelling van beide fouten vrij zijn.

Ter berekening van deelfouten en buiging verkrijgt men, daar de gemiddelde zenitsafstand 49° bedroeg, met dezelfde notaties als vroeger:

$$a' = 2a \sin 98° = -10.''16$$
$$b' = -2b \sin 98° = +0.83$$
$$c' = 2c \sin 49° = -2.66$$

waaruit, de cirkelaflezing α noemende:

Correctie voor Deelfout aan Aflez. $-5.''13 \sin 2\alpha - 0.''41 \cos 2\alpha$
$= +5.''15 \sin (2\alpha - 175.°4)$

Correctie voor Buiging aan Zen. afst. $-1.''76 \sin z$.

Het middental der laatste kolom wordt :

$$\varphi = -5°12'4''.34.$$

De formule voor de deelfoutcorrectie sluit zeer goed met die welke uit de waarnemingen van 1900—01 werd verkregen, wat van belang is voor de verbetering mijner verdere hoogte-waarnemingen. Voor den coëfficient der buiging werd vroeger — 0.″60 gevonden ; het verschil kan echter nog wel aan toevallige oorzaken geweten worden.

Hieronder stel ik nog de 12 afzonderlijke uitkomsten voor de breedte samen na verbetering voor deelfout en buiging.

	Noordsterren	Zuidsterren
	— 5° 12′	
180°	2″72	2″57
210	5.30	5.59
240	5.23	5.51
270	6.65	5.63
300	1.25	2.43
330	4.89	4.29

Hun middental moet natuurlijk gelijk zijn aan dat der ongecorrigeerde uitkomsten. Uit hunne vergelijking met dat middental leidt men als middelbare fout der einduitkomst af ± 0.″57. Deze is dus:

$$\varphi = -\mathbf{5°12'4''.34 \pm 0''.57.}$$

Deze uitkomst kan ten slotte vereenigd worden met die van 1900—01. Voor die laatste neem ik aan de eerste waarde van p. (291), schat de middelbare fout daarvan echter niet lager dan de nu gevondene.

Wij vinden dan :

Breedte van den waarnemingspijler	
1900—01	— 5°12′4″.01 ± 0″.6
1903	4 .34 ± 0 .6
Samen	**— 5°12′4″.2 ± 0″.4**

Ik geloof deze overeenstemming voldoende te mogen noemen.

IV. *Plaatsbepalingen van N'Kutu, Mayili, Buku-Zan en Chimbete.*

1. *Reis van* 1903 *December* 22—31. *Plaatsbepaling van N'Kutu.*

Gedurende deze reis werden de chronometers geheel te water vervoerd, zoodat buitengewone storingen weinig te vreezen zijn. De

emperatuur was echter zeker hooger dan in denzelfden tijd te Chiloango en was ten minste 26°, misschien wel 26° à 30°. Vergelijkt men den gang van HEWITT tusschen Dec. 20 en Jan. 3 met den gemiddelden herleiden gang voor die maanden, dan zou dit tot eene temperatuur van 26°.4 leiden, wat natuurlijk eene onzekere schatting is. Hoewel er nu geen reden is verschil in temperatuur op de heen- en terugreis te vermoeden, brengt de onzekerheid daaromtrent toch weder HEWITT eenigszins in het nadeel en kende ik ten slotte voor de lengtebepaling aan beide chronometers gelijke gewichten toe.

De berekening van tijds- en breedtebepalingen op eene onbekende plaats moest natuurlijk in opvolgende benaderingen geschieden. Ik deel hier dadelijk de juiste uitkomsten mede.

De waarnemingen geschiedden in de factory der firma HATTON and COOKSON.

Lengtebepaling. Eene tijdsbepaling op 26 Dec. uitgevoerd door 4 waarnemingen van β Orionis in beide instrumentstanden, telkens over 7 horizontale draden, gaf mij de volgende chronometerstanden naar den M. T. van N'Kutu, waarnevens ik de standen naar den M. T. van Chiloango aangeef, gevonden door eenvoudige interpolatie tusschen de tijdsbepalingen van Dec. 20 en Jan. 3, wat wel het beste is wat men doen kan, benevens het daaruit voortvloeiende lengteverschil.

December 26.296 (M. T. Chiloango).

	Hohwü	Hewitt
Stand n. M. T. N'Kutu	$+ 48^m 48^s.85$	$+ 49^m 22^s.35$
„ „ „ Chiloango	46 50 .29	47 22 .27
Lengteverschil	— 1 58 .56	— 1 60 .08

Het eenvoudige gemiddelde der beide uitkomsten aannemende, vindt men als lengte van N'Kutu ten opzichte van Chiloango

$$-1^m\ 59^s.32.$$

Breedtebepaling. Den 29en December verkreeg ik eene breedtebepaling door 3 paar hoogtemetingen, d.i. 3 metingen in elken instrumentstand, van β Andromedae ($z = 40°\ Nd$) en 2 paar van α Eridani ($z = 53°\ Zd$).

De uitkomsten waren

β Andromedae	1e paar	— 4°57′ 9″.90
	2e „	11.06
	3e „	11.24
	Midden	10.73
	Verbeterd	— 4°57′ 5″.74

α Eridani	1e paar	- 4°56'57".69
	2e „	59.81
	Midden	58.75
	Verbeterd	— 4°57' 3".72

De gemiddelde uitkomst voor de breedte is dus:

4° 57' 4".7

2. *Reis van* 1904 *Juni* 2—23. *Standen der chronometers.*

Daar deze reis bijna geheel over land plaats vond, waren natuurlijk, niettegenstaande alle voorzorgen, de omstandigheden voor de regelmatigheid der chronometers merkbaar ongunstiger. De dagelijks en soms meer dan eens per dag verrichte onderlinge vergelijkingen toonen dan ook duidelijk hier en daar kleine onregelmatigheden aan en eens zelfs, op Juni 3, toen de dragers nog ongeoefend waren, had, zooals ik reeds boven opmerkte, eene ernstige storing plaats.

Het vervoer der instrumenten geschiedde meest altijd in de schaduw der bosschen en slechts enkele malen kunnen de chronometers door de zon beschenen zijn. Intusschen is aan te nemen dat zij aan de algemeene in deze streken in de maand Juni voorkomende temperatuurdaling onderworpen zullen zijn geweest, en dan zou men voor chronometer HEWITT gedurende de reis geen standvastigen gang mogen aannemen.

Uit mijne regelmatige opteekeningen van 1903 en 1905 leid ik als temperatuurdaling gedurende de maand Juni 2°.18 af, d. i. gemiddeld per dag 0°.073, waarmede eene verandering van den gang van HEWITT met — 0^s.018 per dag zou gepaard gaan. Aansluitende aan de tijdsbepalingen te Chiloango van Mei 30 en Juni 24, zou de D. Gang dan aanvankelijk (Mei 30—31) + 0^s.50 op het einde (Juni 23—24) + 0^s.08 bedragen hebben.

Daar de temperatuurscoëfficient van HOHWÜ als nul mag aangenomen worden, zullen de relatieve gangen gedurende de reis ons hieromtrent nog wat kunnen leeren. Beginnende na de storing van Juni 3 vond ik de volgende relatieve standen, die de middentallen vormen der uitkomsten van ten minste drie vergelijkingen, en leidde daaruit de daarnevens geplaatste gangen af.

	Hohwü — Hewitt	
Juni 5	+ 49.s00	
10	47.17	— 0.s37
15	44.50	— 0.53
20	39.17	— 1.07
24	35.50	— 0.92

Terwijl nu de gemiddelde gang van Hohwü ongeveer + 0.s9 bedroeg, sluit dit vrij goed met den boven afgeleiden veranderlijken gang voor Hewitt dien ik dus als den waarschijnlijksten aanneem. Voor het midden der periode, Juni 12 verschilt de hiermede berekende stand van dien welke uit den constanten gang van + 0.s29 zou volgen 1.s36.

Eene groote moeilijkheid blijft nu nog de storing van Juni 3 veroorzaken, toen de relatieve stand der chronometers 3 sec. schijnt veranderd te zijn. Wel was te vermoeden, dat zij voornamelijk op den chronometer van Hohwü zou gewerkt hebben, en dit vermoeden schijnt steun te vinden in de tijdsbepaling te N'Kutu op Juni 5 in verband met de lengte dier plaats volgens 1903 Dec., doch het is niet te ontkennen dat hierin eene bron van onzekerheid blijft schuilen voor de volgende lengtebepalingen. Intusschen zij hier reeds vooropgesteld dat ik ten slotte voor Hewitt geene standverandering en voor Hohwü een sprong vooruit van 2s heb aangenomen. Als D. G. van Hohwü moet men dan, in plaats van + 0s.83, + 0s.91 aannemen.

3. *Lengtebepalingen in* 1904.

Mayili. Op Juni 2 verkreeg ik hier eene tijdsbepaling door middel van Sirius in het westen en α Bootis in het oosten. De uitkomsten uit beide verschillen na verbetering voor deelfouten en buiging 0s. 37 onderling.

De gemiddelde uitkomsten waren de volgende, waarnaast gevoegd worden de met de aangenomen gangen (+ 0s.91 voor Hohwü en veranderlijke gang voor Hewitt) berekende standen naar M.T Chiloango en de daaruit afgeleide lengteverschillen.

Juni 2 6u5 M.T. Chiloango

	Hohwü	Hewitt
Stand n. M.T. Mayili	+ 49m50s.89	+ 50m36s.39
„ „ „ Chiloango	+ 48 29 .33	+ 49 17 .08
Lengteverschil	— 1 21 .56	— 1 19 .31

Gemiddeld — 1m20s.44

terwijl in 1902 gevonden was — 1m21s.3

Den stand van HOHWÜ berekend met een gang van $+ 0^s.83$ gaf het lengteverschil $- 1^m21^s.80$, terwijl HEWITT bij constant aangenomen gang zou opgeleverd hebben $- 1^m19^s,89$.

N'Kutu. Hier moest ik mij met de zon voor tijdsbepaling behelpen en verkreeg op 5 Juni uit 4 bepalingen, van de beide randen in de beide standen van het instrument, de volgende uitkomsten. Van de daarbij gevoegde standen naar den M. T. van Chiloango is die van HOHWÜ vooreerst berekend zonder aannemen van een sprong en dus ook met den gang $+ 0^s.83$.

Juni 5 $3^u.1$ M.T.

	HOHWÜ	HEWITT
Stand n M.T. N'Kutu	$+ 50^m28^s.54$	$+ 51^m17^s.54$
„ „ „ Chiloango	$+ 48\ 31\ .45$	$+ 49\ 18\ .30$
Lengteverschil	$- 1\ 57\ .09$	$- 1\ 59\ .24$

terwijl de uitkomst van 1903 Dec. was $- 1^m59^s.32$. Hiernaar zou het dus schijnen dat op 3 Juni eene storing in HOHWÜ en niet in HEWITT is voorgekomen en dat de sprong in eerstgenoemde ongeveer 2^s zou bedragen, wat met de waargenomen verandering in den relatieven stand nog genoegzaam sluit.

Ik trachtte voor het nader onderzoek der storing ook nog de tijdsbepaling van 2 Juni te Mayili te hulp te nemen, na deze door middel van het lengteverschil, in 1902 bepaald, op Chiloango te hebben herleid, doch uitgaande van deze kwam ik niet tot betere uitkomsten. Alles overwegend nam ik ten slotte aan dat HEWITT niet gestoord en HOHWÜ op 3 Juni 2 sec. vooruitgesprongen is.

Wat de lengte van N'Kutu zelve betreft, zoo zal het wel het best zijn daarvoor alleen de bepaling van 1903 December te gebruiken, al sluit de nieuwe bepaling door HEWITT daarmede volkomen.

Buku-Zan. Mijne waarnemingen geschiedden in de factorij van de firma HATTON and COOKSON. Ik kon ter tijdsbepaling niets anders dan op 14 Juni 3 instellingen van zonsranden verkrijgen. Nevens onderstaande uitkomsten zijn de standen gevoegd naar M. T. Chiloango volgens de aangenomen berekeningen (d.i. met sprong in HOHWÜ en veranderlijken gang van HEWITT), en de daaruit afgeleide lengteverschillen.

Juni 14 4^u0 M.T.

	HOHWÜ	HEWITT
Stand n. M.T. Buku-Zan	$+ 50^m13^s43$	$+ 50^m57^s93$
„ „ „ Chiloango	$+ 48\ 38.12$	$+ 49\ 21.22$
Lengteverschil	$- 1\ 35.31$	$- 1\ 36.71$
gemiddeld	$- 1^m36^s01$	

Met constante gangen en zonder aangenomen sprong berekend,

zouden de uitkomsten zijn — 1^m34^s51 en — 1_m38^s02, dus in veel minder goede onderlinge overeenstemming.

Chimbete. Wederom kon ik ter tijdsbepaling alleen de zon waarnemen, doch verkreeg ten minste een volledig stel van 4 bepalingen van beide randen in beide standen; de beide paren afzonderlijk berekend verschillen $0.^s83$.

De uitkomsten (factorij *H* en *C*) waren de volgende; daarnevens volgen de standen naar M. T. Chiloango volgens de aangenomen berekeningen en de daarmede afgeleide lengteverschillen.

Juni 21 3^u6 M. T.

	Hohwü	Hewitt
Stand n. M. T. Chimbete	$+ 50^m37^s73$	$+ 51^m15^s73$
„ „ „ Chiloango	+ 48 44.46	+ 49 22.52
Lengteverschil	— 1 53.27	— 1 53.21
Gemiddeld	$— 1^m 53^s24$	

terwijl naar de berekening met constante gangen zonder aangenomen sprong zou verkregen worden:

$— 1^m53^s03$ en $- 1^m53^s81$.

De beide berekeningen zijn dus dichter tot elkander genaderd.

4 *Breedtebepalingen in* 1904

Buku-Zan. Het gelukte mij voor breedtebepaling alleen op 15 Juni β Centauri in het zuiden waar te nemen, waarvan ik 8 instellingen verkreeg gelijkmatig over beide standen verdeeld.

De uitkomsten waren

1e paar $\varphi = -$	4° 46′ 4″46
2e „	5.51
3e „	8.54
4e „	6.51
Gemiddeld	6.26

en na verbetering voor deelfout en buiging

$$\varphi = - 4°46'11''1.$$

Chimbete. Ik verkreeg alleen op 20 Juni 10 instellingen op α Crucis gelijkmatig over beide standen verdeeld met de volgende uitkomsten.

1e paar $\varphi = -$	5° 1′ 18″.40
2e „	18.65
3e „	21.83
4e „	20.53
5e „	19.52
Gemiddeld	19.78

en na verbetering voor deelfout en buiging

$$\varphi = - 5°1'24.''5$$

5. *Einduitkomsten.*

Naar het voorgaande neem ik als waarschijnlijkste waarden voor de breedte en voor de lengte ten opzichte van Chiloango van de door mij bepaalde punten in het binnenland de volgende aan. Daarbij neem ik voor de lengte van Mayili het midden van de twee bepalingen en gebruik voor die van N'Kutu alleen de eerste.

	Breedte	Lengteverschil met Chiloango
Mayili	— 5° 4′ 40″	— 1ᵐ 20ˢ.9
N'Kutu	— 4 57 5	— 1 59 .3
Buku Zan	— 4 46 11	— 1 36 .0
Chimbete	— 5 1 25	— 1 53 .2

Sterrenkunde. — De Heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN biedt aan eene mededeeling van den Heer C. SANDERS: „*Waarneming van den Overgang van Mercurius voorbij de zon op* 14 *November* 1907, *verricht te Chiloango in het Portugeesche Congogebied.*"

(Mede aangeboden door den Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN).

Sedert korten tijd ben ik in het bezit van een kijker van ZEISS van 80 Mm. opening en 120 Cm. brandpuntsafstand. Deze kijker, waarmede ik mij voorstel voornamelijk sterbedekkingen waar te nemen, om daardoor de lengte mijner waarnemingsplaats nauwkeuriger vast te stellen dan mij tot nu toe mogelijk was, bezit voor het oogenblik eene azimutale opstelling, die echter weldra vervangen zal worden door eene parallaktische met fijne bewegingen en instelcirkels. Intusschen heb ik reeds den kijker kunnen gebruiken om daarmede den overgang van Mercurius op 14 November l.l. althans gedeeltelijk waar te nemen, en ik veroorloof mij in het volgende mijne uitkomsten mede te deelen.

Voor de opstelling van mijn kijker had ik een pijler doen bouwen van beton, omringd door een geïsoleerden vloer en voorzien van een verstelbaar dak met zijdelingsche openingen, dat ook geheel kan worden weggeschoven. Voor den overgang van Mercurius liet ik het dak echter boven mijn instrument, om mijzelven eenigszins voor de brandende zonnestralen te beschutten en vooral om het hinderlijke zijdelingsche licht zooveel mogelijk af te sluiten.

Voor het verrichten der waarnemingen construeerde ik een projectietoestelletje, eene soort van camera in den vorm van eene afgeknotte vierhoekige pyramide, waarvan een zijvlak open was, terwijl de drie

andere met zwart papier bekleed waren. Het grondvlak waarop het beeld gevormd werd bevond zich op circa 14 Cm. van het oculair. Die afstand liet zich niet alleen een weinig verstellen, maar ook was eenige kanteling mogelijk om het beeldvlak goed loodrecht op de as te stellen.

Met de sterkste 133 malige vergrooting van den kijker bedroeg de diameter van Mercurius in het geprojecteerde beeld bijna 1 Mm. De aanwezige zonnevlekken waren met groote scherpte waarneembaar en die in de nabijheid van den westelijken rand vertoonden zich omgeven door zeer duidelijke fakkels.

Ongelukkig was het begin van den overgang wegens wolken onzichtbaar. Tegen 1 uur M. T. Chiloango klaarde het echter op en het uittreden van Mercurius, die als een vrij scherp begrensd zwart schijfje zichtbaar was geweest, kon goed worden waargenomen. Ik vond:

2° inwendige aanraking	2^u	35^m	38^s	M.T.	Chiloango
2° uitwendige „	2	38	7	„	„

Het laatste oogenblik, dat, waarop mij de laatste indeuking van den zonsrand scheen te verdwijnen, was echter wegens de golving van dien rand moeilijk op eenige secunden na te schatten, en ik geloof dat die onrust der beelden ook de voornaamste oorzaak is van de nog aanwezige onzekerheid in de waarneming der inwendige aanraking. De standen mijner chronometers berusten op tijdsbepalingen vóor en na den overgang.

Volgens de Nautical Almanac vond ik als berekende tijden van het 3° en 4° contact te Chiloango 2^u 35^m 47^s en 2^u 38^m 24^s. Daaruit zouden dus volgen als verschillen waarneming — berekenig: — 9^s en — 17^s. [1]).

---

[1]) (Noot toegevoegd door E. F. v. d. Sande Bakhuyzen). Naar de waarnemingen te Leiden waren deze verschillen gemiddeld —6^s en —20^s. Hiermede sluiten de uitkomsten van den Heer Sanders dus zeer goed. Het grootere bedrag voor het 4e contact zal wel aan een te vroeg waarnemen van dit verschijnsel door alle waarnemers te wijten zijn.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Med. N°. 107[a] uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: Dr. H. KAMERLINGH ONNES en Dr. C. BRAAK: „*Over het meten van zeer lage temperaturen.* XXI. *Het vastleggen van standaardtemperaturen door middel van kookpunten van zuivere stoffen. Bepaling van de dampspanning van zuurstof bij drie temperaturen.*"

§ 1. *Inleiding.*

In een voorafgaande Mededeeling N°. 101[a] (Nov. '07) werd reeds gewezen op de wenschelijkheid bepaalde temperaturen door middel van kookpuntstoestellen vast te leggen, aangezien de zoo bepaalde punten op de temperatuurschaal boven de met weerstandsthermometers en thermoelementen vastgelegde het voordeel bezitten, dat ze niet aan de duurzaamheid van bepaalde toestellen gebonden zijn en het vergelijken van thermometers in verschillende laboratoria gemakkelijk maken.

Deze Mededeeling heeft betrekking op een aantal bepalingen met zuurstof: *a.* iets boven en iets beneden het normale kookpunt, waaruit door interpolatie dit laatste kon worden afgeleid; *b.* bij 366 en 516 m.M. kwikdruk, welke zullen kunnen dienen om het verdere verloop der dampspanningskromme te doen kennen.

Na eenige voorloopige bepalingen werden een tweetal toestellen geconstrueerd van verschillende afmetingen, in elk van welke achtereenvolgens verschillende hoeveelheden gas konden worden gecondenseerd. Hierdoor werden twee seriën van onafhankelijke bepalingen verkregen, terwijl tevens de zuiverheid van het gas kon worden op de proef gesteld.

§ 2. *De meettoestellen.* (Verg. Pl. I).

In het dampspanningsapparaat van klein model *A* kan ongeveer 120 cm³ gas worden gecondenseerd, in het groote model *B* ongeveer 1 L. Het eerste bestaat uit een bolletje *a* van 0.5 cM³ met glazen steel *b*, die met een staalcapillair *c* is verbonden met een manometer. Deze laatste bestaat uit twee buizen $m_1 m_2$ van 2 cM. middellijn, waarin kwik zich bevindt; ze zijn met een caoutchoucslang *s* verbonden. Een luchtvanger *d* verhindert verontreinigen van het gas. Verder is om den glazen steel een koperen cilinder *e*, omgeven door een glazen mantel *f*, aangebracht, die door warmte van boven af toe te leiden voorkomt, dat de temperatuur ergens in het toestelletje lager kan worden dan in het bolletje, dat zich op de plaats in den cryostaat bevindt, waar de temperatuur wordt gemeten. Door het kwik hooger of minder hoog op te drijven kunnen achtereenvolgens verschillende hoeveelheden gas worden gecondenseerd.

B is iets anders ingericht, voornamelijk om te voorkomen, dat de toestel onhandig wordt doordat eene te groote hoeveelheid kwik noodig zou zijn. De manometer $m_1 m_2$ bestaat uit een *U*-buis van glas, waarvan de beide beenen door een glazen kraan k_1 zijn gescheiden. Deze *U*-buis is aan een tweede $d_1 d_2$ geblazen, die het gas bevat. De beide beenen hiervan zijn cylinders van 70 cM. lengte en 0.5 L. inhoud, zij zijn door een kraan k_2 gescheiden. Het met den manometer verbonden been d_1 is boven aan de staalcapillair *c* bevestigd, die met het bolletje *a* in verbinding staat. Het been d_2 draagt een glazen kraan k_3, waardoor de vulling geschiedt. Het reservoir wordt tot 1 atm. overdruk met gas gevuld. Door eerst k_3 te sluiten en later te openen kan men eerst het onder overdruk staande gas uit d_1, daarna tevens dat uit d_2 laten condenseeren.

A stelt in staat de zuiverheid van het gas te beoordeelen door na te gaan in hoeverre de gemeten dampspanning afhankelijk is van het breukdeel van de hoeveelheid gas, dat gecondenseerd is. Door middel van *B*, waarbij de hoeveelheid gecondenseerd gas telkens hetzelfde gedeelte van de totale hoeveelheid bedraagt, kan worden bepaald in hoeverre de dampspanning onafhankelijk is van een vermeerderen of verminderen van de hoeveelheid van het gecondenseerde gas zelve.

De zuurstof wordt bereid uit kaliumpermanganaat door verhitting. Na nog zorgvuldig over KOH-oplossing en P_2O_5 gezuiverd en gedroogd te zijn, wordt het gas in een in vloeibare lucht gedompeld bolletje gecondenseerd. Daarna wordt de vloeibare lucht verwijderd en worden met het verdampte gas de toestellen gevuld.

De drukaflezing geschiedde met een kathetometer, zij behoeft wegens de sterke veranderlijkheid van de dampspanning met de temperatuur weinig nauwkeurig te zijn. De luchtdruk op het kwik in den open manometer werd op een aneroïdebarometer afgelezen, welke af en toe met een kwikbarometer werd vergeleken.

§ 3. *Temperatuurbepaling en nauwkeurigheid daarvan.*

Voor de temperatuurmeting diende voor de bepalingen in de nabijheid van het kookpunt van zuurstof de weerstandsthermometer Pt'_I, die (zie Med. Nos. 95c Juni '06 en 101a Dec. '07) over een uitgestrekt gebied met den waterstofthermometer van Med. N°. 95e (Oct. '06), dien wij B_{III} zullen noemen, is vergeleken [1]) en wel voor —182° op 25 Maart 1907 (zie Med. N°. 101a tabel I). Na dien tijd zijn nog eenige calibraties verricht, die met de bovengenoemde in tabel

[1]) $W_{PtI} = 1.01806\ W_{Pt'I}$ (zie § 2 van Med. N°. 101a Nov. 1907).

II staan. Deze tabel bevat tevens de uitkomsten van een indirecte vergelijking van Pt'_I met een anderen waterstofthermometer, dien wij T_4 zullen noemen, welke gebruikt werd bij een onderzoek door Dr. FEUSTEL en een van ons (K. O.) met een differentiaalthermometer helium-waterstof verricht, dat weldra zal worden gepubliceerd.

In tabel I geven wij verder in aansluiting aan § 4 van Med. N°. 101ᵃ de resultaten van een 4-tal vergelijkingen van twee weerstandsthermometers Pt'_I en Pt_d'' [1]) onderling bij ongeveer —183° C. en —217° C.

TABEL I. Vergelijking tusschen Pt'_I en Pt''_d.

Datum	Pt'_I	Pt''_d	Pt'_I en Pt''_d in graden
22 Juni '07	34.267	18.565 [2])	0°.000
18 Dec. '07	34.359	18.609	
24 Juni '07	14.761	9.1483 [2])	0°.007
19 Dec. '07	14.824	9.1793	

Bij de metingen op 18 en 19 Dec. '07 waren B_{III}, Pt'_I en P''_d in den cryostaat geplaatst. Zoo werden gelijktijdig de desbetreffende uitkomsten van de tabellen I en II verkregen. Die van het tweede gedeelte van tabel II zijn afgeleid uit een vergelijking van Pt''_d met T_4. De waargenomen weerstanden waren, omgerekend met den factor 1.00073 (zie vorige noot), 18.560 en 18.398 Ω. Deze zijn met de gegevens van tabel I tot Pt'_I omgerekend. Dit geeft de getallen van de derde kolom.

De calibratie met T_4 komt bevredigend overeen met die met B_{III}. Het gemiddelde der afwijkingen voor de beide eerste en de beide laatste gegevens verschilt van tabel II 0.022 Ω overeenkomende met 0.°038. Dit geringe verschil tusschen de aanwijzingen van twee geheel verschillende gasthermometers, geeft een bevredigende bevestiging voor de juistheid der vroeger (Med. N°. 95e) afgeleide nauwkeurigheidsgrens en verhoogt tevens de betrouwbaarheid der andere voorafgaande temperatuurbepalingen.

De tabellen I en II geven daarenboven nieuwe gegevens omtrent

[1]) Deze weerstandsthermometer is dezelfde, die in Med. N°. 99b (Juni '07). P_{td} is genoemd. Hij is later door midden gebroken, waardoor de weerstand tot de helft is verminderd ($P_{t'd}$). Hij is hier met twee accenten aangeduid, omdat hij daarna een geringe reparatie heeft ondergaan, waardoor bij 0° $P_{td''} = 1.00073\ P_{td'}$ is geworden.

[2]) Deze waarde is met den factor van de vorige noot omgerekend.

TABEL II. Vergelijking van den weerstandsthermometer Pt_I met den waterstofthermometers *BIII* en T_4.

Datum	Temperatuur volgens den waterstofthermometer B_{III}	Weerstand in Ω	$W_{Pt_I} - R_{A_I}$
Vergelijking met B_{III}			
25 Maart '07	— 182°.352	34.492	— 0.008
18 Dec. '07	— 182°.595	34.359	— 0.000
17 Febr. '07	— 186°.599	32.027	— 0.019
18 Febr. '08	— 189°.500	30 332	— 0.041
19 Dec. '07	— 216°.840	14.824	+ 0.031
Vergelijking met T_4			
30 Nov. '07	— 182°.736 [1])	34.257	— 0.021
3 Dec. '07	— 183°.302 [1])	33.919	— 0.031

de nauwkeurigheid der aflezingen van weerstands- en gasthermometer. [2]) Blijkens tabel I blijft de fout van den weerstand beneden 0.°01. Wat de aflezingen van den gasthermometer betreft, geven de beide eerste gegevens van tabel II onderling een verschil kleiner dan 0.°02. Met het verschil + 0.031 Ω bij — 217° komen overeen + 0,028 en + 0.016 van tabel II van Med. N°. 95c en tabel I van Med. N°. 101a. Dit is tevens in overeenstemming met de in § 7 van Med. N°. 95e, afgeleide nauwkeurigheid van 0.°02. Dit schijnt niet het geval te zijn met de waarde van 18 Febr. '08, die vrij sterk van de formule afwijkt. Latere bepalingen zullen moeten beslissen welk deel van deze afwijking nog aan de formule *AI* moet worden toegeschreven.

§ 4. *Dampspanningsbepalingen in de nabijheid van het kookpunt van zuurstof.*

Als cryostaat diende die beschreven in Med. N°. 94f (Pl. V) (Juni 1906).

[1]) De waterstofthermometer-temperaturen zijn berekend op de schaal van Med. N°. 95e (Oct. '06) Daar de nulpuntsdruk ongeveer 1360 mm. bedroeg is dienovereenkomstig voor den spanningscoëfficient aangenomen 0.0036629, afgeleid uit den spanningscoëfficient van Med. N°. 60 (Juni 1900) (0.0036627 voor 1100 mM. nulpuntsdruk). Tevens is aangebracht een correctie overeenkomende met het verschil der correcties tot de absolute schaal voor 1360 en 1100 mM. nulpuntsdruk.

[2]) Verg. Med. Nos. 95c, 95e en 101a.

De temperatuurbepaling en regeling geschiedde met den in het bad geplaatsten weerstand Pt'_I. De afwijkingen in den galvanometer waren zoo gering, dat geen correctie er voor behoefde te worden aangebracht. In den toestel A werd het kwik achtereenvolgens tot beneden en boven in den manometer m_1 opgedreven, in B het gas eerst uit één, daarna uit beide reservoirs gecondenseerd. Dit is in onderstaande tabel met „weinig" en „veel" aangegeven. In tabel III zijn gegeven een bepaling bij geringen overdruk, een bij een druk iets beneden 760 m.m., en een contrôlemeting weder bij overdruk. De druk is tot 0° gereduceerd. De laatste kolom geeft de afwijkingen van het gemiddelde voor elke serie.

TABEL III. Dampspanning van zuurstof in de nabijheid van het kookpunt.

Datum	Tijd		Druk in mM. kwik	gemiddelde van een serie	Afwijking van het gemiddelde
	u				
6 Febr. '08	4 31'	groot model (weinig)	806.34		—0.37
(overdruk)	4 46	klein „ (veel)	806.55	806.71	—0.16
Serie I	5 0	„ „ (weinig)	806.98		+0.27
	5 8	groot „ (veel)	806.97		+0.26
7 Febr. '08	10 13	klein model (weinig)	759.47		—0.14
(onderdruk)	10 21	„ „ „	759.75		+0.14
Serie II	10 50	klein „ (veel)	759.46		—0.15
			759 54		—0.07
	11 12	groot „ „	759.35	759.61	—0.26
			759 51		—0.10
	11 47	„ „ „	759 76		+0.15
	12 26	klein „ (weinig)	759.84		+0.23
	12 37	groot „ (veel)	759.82		+0.21
7 Febr. '08	1 20	klein model (weinig)	806.17		—0.09
(overdruk)	1 25	groot „ (veel)	806.30	806.26	+0.04
Serie III	1 35	klein „ (weinig)	806.31		+0.05

De weerstanden van den thermometer afgelezen in de *Wheatstone* brug waren respectievelijk voor de drie seriën:

34.433 , 34.098 en 34.433 Ω.

Vergelijkt men de uitkomsten verkregen bij condensatie van weinig gas met die bij condensatie van veel gas, dan zijn geen systematische afwijkingen te herkennen, hetgeen voor de zuiverheid van het gebruikte gas pleit. Zoo verontreinigingen mochten voorkomen is de invloed er van op de dampspanning afgeleid bij de geringere condensatie zeker kleiner dan de invloed op het bovengenoemde verschil. Hij is derhalve te verwaarloozen.

§ 5. *Nauwkeurigheid der instellingen.*

Aan de uitkomsten van tabel III kan het volgende worden ontleend:

De afwijkingen van het gemiddelde, die gedeeltelijk nog aan de temperatuurregeling moeten worden toegeschreven, zijn gering en blijven tot temperatuursverschillen omgerekend beneden 0°.005.

Het gemiddelde van de uitkomsten van het groote en het kleine model voor iedere serie afzonderlijk berekend geeft:

Serie I,	groot	model	$p =$ 806.65	(2 waarnemingen)
	klein	„	806.76	(2 „)
Serie II,	groot	„	$p =$ 759.64	(5 „)
	klein	„	759.58	(4 „)
Serie III,	groot	„	$p =$ 806.30	(1 waarneming)
	klein	„	806.24	(2 waarnemingen)

Het verschil tusschen beide gemiddelden is hoogstens 0.1 mm., hetgeen overeenkomt met $\frac{1^\circ}{800}$. Hieruit mag wel het besluit worden getrokken, dat een dampspanningstoestel bij uitstek geschikt is om temperaturen vast te leggen. De hier verkregen gegevens wijzen er op, dat het hierin den gasthermometer en waarschijnlijk ook den weerstandsthermometer overtreft. Voor den waterstofthermometer bedraagt nl. de fout van 2 instellingen (zie § 3 en Med. N°. 95e § 8 en N°. 101^a § 3) 0°.01 à 0°.02, voor den weerstandsthermometer 0°.01 (zie § 3 en Med. N°. 101^a § 4). [1])

[1]) Ook uit de gegevens van tabel III laat zich de nauwkeurigheid van de weerstandsinstelling beoordeelen. Stelt men de fout in de aanwijzing van de dampspanningstoestellen = 0, hetgeen volgens het bovenstaande bij benadering geoorloofd is, dan is het verschil der gemiddelden voor de serieën I en III toe te schrijven aan de fout in de weerstandsmeting. Deze zou dan 0°.005 zijn.

§ 6. *Bepaling van het kookpunt van zuurstof.*

Met de in § 4 gegeven weerstanden van Pt'_I laten zich met de gegevens van tabel II de bijbehoorende temperaturen op de schaal van onzen waterstofthermometer B_{III} berekenen. Wij gaan daartoe uit van het gemiddelde der beide gegevens van 25 Maart en 18 Dec. '07 daar deze waarschijnlijk nauwkeuriger zijn dan die met den thermometer T_4 verkregen. Met 34.433 en 34.098 Ω komen dan respectievelijk overeen de temperaturen — 182°.460 en — 183°.040. Met de eerste komt overeen een dampspanning van 806.48 mm. (gemiddelde van de serieën I en III) met de tweede 759.61 mm. (serie II). Hieruit volgt door middel van rechtlijnige interpolatie voor 760 mm. te Leiden de temperatuur op den thermometer B_{III} $t = 183°.035$ en voor het normale kookpunt (760 mM. op zeeniveau en 45° NB.)

$$t = -183°.030 - 0°.007 = -183°.037$$

op den normalen waterstofthermometer en (zie tabel XXV van Med. N°. 101^b Nov. 1907)

$$\theta = -183°.042 + 0°.056 = -182°.986$$

op de absolute schaal.

Neemt men in aanmerking de nauwkeurigheid der correcties tot de absolute schaal (zie Med. N°. 97^b, Jan. '07) en de uitkomsten der contrôle-bepalingen voor de temperatuurmeting, zoowel met denzelfden waterstofthermometer als met verschillende verricht, dan zal deze waarde waarschijnlijk niet meer dan 0°.03 van de juiste afwijken.

§ 7. *Dampspanningsbepalingen bij lagere temperaturen.*

Bij deze metingen (zie § 2 tabel II) werd de temperatuur direct op den waterstofthermometer B_{III} afgelezen Pt'_I diende voor de regeling. De temperaturen zijn, — 186°. 599 en — 189°. 500 (verg. tabel II). Tegelijkertijd werd voor Pt_I een nieuwe calibratie verkregen. De bepalingen geschiedden alleen met het kleine dampspanningstoestel. De uitkomsten zijn overeenkomstig tabel III in tabel IV vereenigd.

Bij de met (*a*) aangeduide bepalingen werd ongeveer de helft bij de met (*b*) aangeduide ongeveer $\frac{4}{5}$ van het gas gecondenseerd. Er blijkt evenals bij het kookpunt geen systematisch verschil tengevolge hiervan merkbaar te zijn. Brengt men de temperaturen terug tot de absolute schaal en de drukken tot zeeniveau en 45° N.B. dan vindt men voor:

$$\theta = -186°.542 \qquad p = 516.19 \text{ mM.}$$
$$\theta = -189°.442 \qquad p = 366.24 \text{ mM.}$$

Dr. H. KAMERLINGH ONNES en Dr. C. BRAAK. „Over het meten van zeer lage temperaturen. XXI. Het vastleggen van standaardtemperaturen door middel van kookpunten van zuivere stoffen. Bepaling van de dampspanning van zuurstof."

Plaat I.

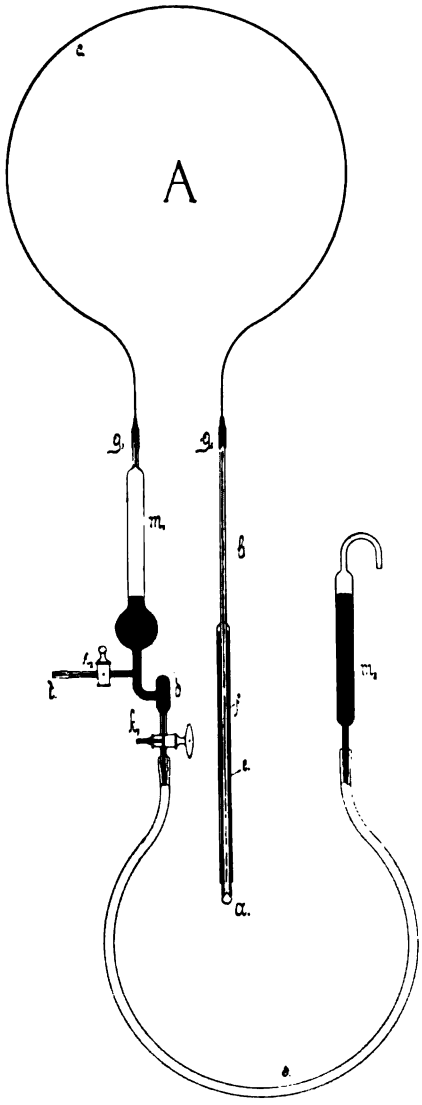


Fig. 1.

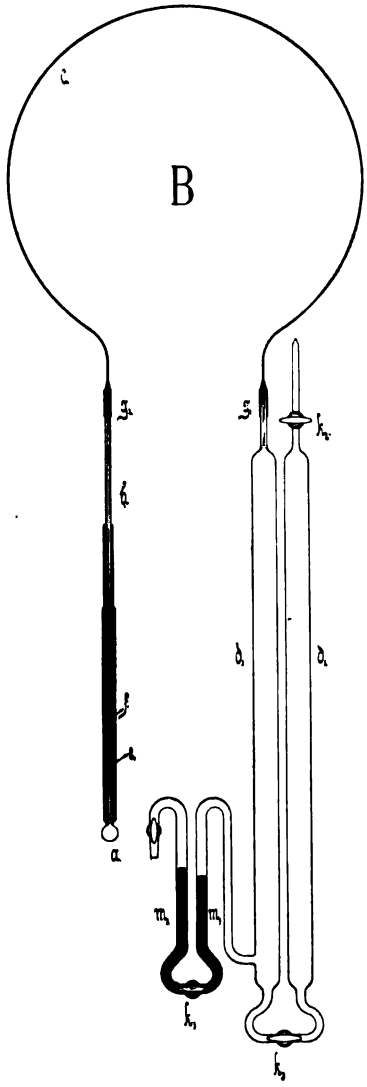


Fig. 2.

TABEL IV. Dampspanning van zuurstof beneden het kookpunt.

Datum	Tijd	Druk in mm.	Gemiddelde van een serie	Afwijking van het gemiddelde
17 Febr. '08 *(a)*	u 2 55'	366.06		+0.07
(a)	3 30	365.90	366.00	—0.09
(b)	4 5	366.00		+0.01
(b)	4 25	365.98		—0.01
18 Febr. '08 *(a)*	10 42	515.82		—0.01
(a)	11 6	515.89	515.83	+0.06
(b)	11 30	515.69		—0.14
(b)	11 40	515.94		+0.11

§ 8. *Vergelijking met de resultaten van andere waarnemers.*

Van de vroegere bepalingen verdienen die van TRAVERS, SENTER en JACQUEROD [1]) het meeste vertrouwen, vooral omdat hierbij werd gebruik gemaakt van zuivere zuurstof in een afgesloten reservoir. Dit is niet het geval bij de andere waarnemingen, waarbij de temperatuur werd bepaald van een zuurstofbad, kokende onder atmosferischen druk. Verontreiniging, zoowel met stikstof als met minder vluchtige stoffen, moet dan noodzakelijkerwijze optreden. Het schijnt, dat de invloed der laatste overwegend is; deze uitkomsten voor het kookpunt zijn alle 0.°3 of meer te hoog. De eerstgenoemde bepalingen geven voor het kookpunt van zuurstof —182°.93 op de normale waterstofschaal. Voor den druk is opgegeven 760 mm. zonder aanduiding omtrent een verdere reductie. Onze waarde voor 760 mm. kwik (bij 0°) is op de normale waterstofschaal —183°.030, hetgeen dus 0.°10 verschilt van de bovenvermelde waarde. Een der laatste bepalingen is die van GRUNMACH [2]). Deze vindt —182°.23. Met de correctie door HOFFMANN en ROTHE [3]) berekend voor den pentaan thermometer (— 0.°42), wordt dit — 182.°66, eene uitkomst, die ook na corectie nog belangrijk te hoog is.

Vergelijkt men de beide waarnemingen bij lageren druk met die van TRAVERS, SENTER en JACQUEROD, dan blijken onze temperaturen beide 0°.13 lager te liggen. Er blijkt derhalve een systematisch verschil tusschen de beide reeksen te bestaan.

[1]) Phil. Frans. Roy. Soc. Series A. Vol. 200. 1902.
[2]) Berliner Sitz. Ber. 1906.
[3]) Zeitschr. f. Instrkd. 27. 1807.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan: Mededeeling No. 107b uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: H. KAMERLINGH ONNES en J. CLAY: „*Over het meten van zeer lage temperaturen XXII. Het thermoelement goud-zilver bij waterstoftemperaturen.*"

Het thermoelement goud-zilver, waarvan, wanneer het eene been op 0° gebracht is, de electromotorische kracht bij gewone temperatuur nagenoeg nul is, vertoont bij lagere temperaturen een versnelde toename van electromotorische kracht. [1])

Het is ons door calibratie met den waterstofthermometer gebleken, dat bij de temperaturen, die met vloeibare en vaste waterstof bereikt kunnen worden, de toename van de electromotorische kracht van dit thermoelement per graad groot genoeg wordt om het voor temperatuurbepalingen in het bedoelde gebied geschikt te maken, terwijl bij de temperaturen ver beneden het smeltpunt van waterstof, voor de bepaling van welke de heliumthermometer den waterstofthermometer bij de calibratie moet vervangen, de gevoeligheid van het element nog grooter zal zijn.

Tot toelichting kan de volgende tabel dienen.

TABEL I. Calibratie van het thermoelement goud-zilver bij waterstoftemperaturen.

Temperatuur volgens den waterstofthermom.	Electromot. kracht in millivolts.	
	goud-zilver	(constantaan staal)
(—216°01)	(0.11972)	
(—217.416)		(6.8310)
—252.86	0.24742	
—252.93		(7.1315)
—255.34	0.26304	
—258.61	0.28912	
—259.24		(7.1585)

In de derde kolom zijn de bepalingen betreffende het element

[1]) Zie de metingen van J. CLAY, in diens dezer dagen verschijnende dissertatie en in Communication no. 107d from the Physical Laboratory at Leiden.

constantaan-staal uit Tabel VI van Med. N°. 95ᵃ (Juni '06) opgegeven. De sterke vermindering van de toename van de electromotorische kracht per graad maakt dit element voor de nauwkeurige meting van de laagste temperaturen ongeschikt [1]).

Eene calibratie van het thermoelement goud-zilver met den heliumthermometer bij lagere temperaturen zal weldra gegeven worden.

Natuurkunde. De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling N° 107ᶜ uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden H. KAMERLINGH ONNES EN J. C. CLAY. *Over de verandering van den galvanischen weerstand van zuivere metalen bij zeer lage temperaturen en den invloed, die hierop wordt uitgeoefend door kleine hoeveelheden bijmengselen.* II.

§ 7. *Aanvulling van Meded. N°. 99ᶜ.* Wij hebben hieraan toe te voegen [2]) wat betreft:

Goud. Eene formule van den vorm D is voor Au_V berekend. Het dunner trekken van gouddraad heeft denzelfden invloed als bij de vergelijking van den dunnen draad Pt_d met Pt_l in Med. N°. werd opgemerkt en die aan een verontreiniging werd toegeschreven. Bij twee gouddraden was het mogelijk door analyse het verschil in samenstelling aan te toonen, dat door het trekken ontstaat.

Kwik. De in Med. N°. 99ᵃ gegeven waarden worden (met uitsluiting van 0°) voorgesteld door de kwadratische formule

$$W_t = 22 \,.\, 3605\,(1 + 0{,}00358\,t - 0{,}06588\,t^2)$$

welke voor —197°.87 levert $W - R = +\,0{,}0106$, zoodat aan een minder juiste waarneming van de temperatuur moet worden gedacht. Van de onderzochte metalen schijnt kwik het meest geschikt voor de meting van temperaturen beneden het smeltpunt van waterstof.

Lood. Hiervoor werden twee formules van den vorm A' en B' (A en B telkens met weglating van den term $c\left(\frac{t}{100}\right)^3$) berekend, volgens welke de waarneming bij —255°.07, leverende 0,02314, waar A_1 geeft 0,01974 en B' 0.01984, verworpen moet worden.

---

[1]) Ditzelfde gebrek maakt ook het door DEWAR (Proc. Roy. Soc. ser. A, vol. 76 p. 316 sqq. 1905) onderzochte element nieuwzilver-platina voor dit doel ongeschikt.

[2]) Waarnemingen, formules en verdere bijzonderheden worden gegeven in de dezer dagen verschijnende dissertatie van J. CLAY en in de Communication from the Physical Laboratory at Leiden N°. 107*c* wat § § 7 en 8 betreft, in N°. 107*d* wat betreft § 9.

§ 8. *Koolstof en Constantaan.* Behalve van de onderzochte metalen zijn [1]) tot —262° ook de weerstandsveranderingen nagegaan van koolstof en constantaan.

§ 9. *Legeeringen van Au en Ag.* Een van ons (J. CLAY) heeft het in de vorige § § behandelde onderzoek uitgebreid tot verschillende legeeringen van goud en zilver en daaraan toegevoegd de bepaling van de electromotorische kracht van het thermoelement goud-zilver. Bij dit onderzoek werd bewezen, dat de theoriën van RAYLEIGH en LIEBENOW, omtrent den thermoelectrischen oorsprong van het in § 1 ingevoerde weerstandsverschil (den additieven weerstand) van MATTHIESEN [2]), verworpen moeten worden. Voor de in § 1 ingevoerde grootheid p leveren genoemde waarnemingen bij een gouddraad van 1 M lengte en 1 m.M² doorsnede per volume procent toegevoegd zilver

$$p = 0{,}00360\ \Omega.$$

Anthropologie. — De Heer HUBRECHT biedt namens den Heer J. H. F. KOHLBRUGGE voor de Werken der Akademie een verhandeling aan, getiteld: *„Die Gehirnfurche maleiischer Völker verglichen mit denen der Australier und Europäer. Ein Beitrag zur Evolutionslehre"*. Deze verhandeling wordt in handen gesteld van de Heeren WINKLER en van WIJHE om daarover in de volgende vergadering verslag uit te brengen.

Voor de Boekerij wordt aangeboden door den Heer SCHOUTE de dissertatie van den Heer W. VAN DER WOUDE, getiteld: *„Over elkaar snijdende normalen aan een ellipsoïde en een hyperellipsoïde."*

De vergadering wordt gesloten.

---

[1]) Zie noot 2 bij § 7.

[2]) Wat de in § 1 aangegevene afwijking van MATTHIESEN's stelling bij waterstof temperaturen betreft, verwijzen wij eveneens op de publicatien genoemd in noot 1).

(12 Juni, 1908)

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING van Zaterdag 27 Juni 1908.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 98.

P. P. C. HOEK: „Enkele algemeene resultaten verkregen bij de bewerking der Cirripediën van de Siboga-Expeditie", p. 98.

C. SANDERS: „Naschrift op de Bijdragen tot de astronomische plaatsbepaling op de Westkust van Afrika". III. (Aangeboden door de Heeren E. F. en H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN), p. 105.

L. S. ORNSTEIN: „Berekening van den druk van een mengsel van twee gassen met behulp der statistische mechanica van GIBBS". (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en H. KAMERLINGH ONNES, p. 107.

A. SMITS en J. P. WIBAUT: „De dynamische opvatting van een omkeerbare chemische reactie". (Aangeboden door de Heeren A. F. HOLLEMAN en J. D. VAN DER WAALS), p. 114.

A. SMITS: „De *P.T.X*-ruimte-figuur voor een stelsel van twee komponenten, die in den vasten of vloeiendkristallijnen toestand in alle verhoudingen mengbaar zijn". (Aangeboden door de Heeren J. D. VAN DER WAALS en A. F. HOLLEMAN), p. 116. (Met één plaat).

TH. VALETON: „Lindeniopsis. Een nieuw subgenus der Rubiaceae", p. 120.

S. H. KOORDERS: „Bijdrage N°. 1 tot de kennis der Flora van Java". (3e Vervolg), p. 127.

J. D. VAN DER WAALS Jr.: „Over de wet der moleculaire attractie bij electrische dubbelpunten". (Aangeboden door de Heeren J. D. VAN DER WAALS en P. ZEEMAN), p. 130.

F. A. H. SCHREINEMAKERS: „Evenwichten in quaternaire stelsels", p. 136.

J. D. VAN DER WAALS: „Bijdrage tot de theorie der binaire mengsels". VII, p. 140.

J. WEEDER: „Het onderzoek der gewichten in vereffeningen naar het beginsel der kleinste vierkanten". (Aangeboden door de Heeren H. G. en E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN), p. 152.

S. H. KOORDERS: „Bijdrage N°. 1 tot de kennis der Flora van Java". (4e Vervolg), p. 156.

Aanbieding eener verhandeling van den Heer Dr. MAX BRÜCKNER te Bautzen i/S.: „Ueber die Ableitung der allgemeinen Polytope in R_4 und die nach Isomorphismus verschiedenen Typen der allgemeinen Achtzelle (Oktatope)", p. 160.

Aanbieding eener verhandeling van den Heer Dr. W. VAN DAM: „Bijdrage tot de kennis van de lebstremming", p. 160.

Aanbieding eener verhandeling van den Heer Dr. J. C. SCHOUTE: „Die Bestockung des Getreides", p. 161.

Aanbieding van boekgeschenken, p. 161.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Bericht van de Heeren MOLL, MOLENGRAAFF en WIND, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen;

2°. Missive van Z.Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 17 Juni 1908 waarbij werd toegezonden een afschrift van een aan B. en W. van Amsterdam gericht schrijven, de mededeeling inhoudende van de door de Akademie benoemde Commissie van Toezicht op het Centraal Instituut van Hersenonderzoek en van de benoeming door die Commissie van den Heer Dr. C. U. ARIËNS KAPPERS tot Directeur van genoemd Instituut. Voor kennisgeving aangenomen.

3°. Schrijven van Administrateuren van het P. W. KORTHALS-fonds, waarbij bericht wordt, dat dit jaar weder een som van *f* 600.— beschikbaar is ter bevordering der kruidkunde. Om advies in handen gesteld van de botanische leden der Afdeeling.

4°. Circulaire van de physikalisch-medizinische Societät te Erlangen waarbij de Akademie wordt uitgenoodigd zich te doen vertegenwoordigen bij de feestviering van het 100-jarig bestaan dier instelling op 27 Juni 1908. Is met een brief van gelukwensch beantwoord.

5°. Circulaire van het 5 tot 10 October 1908 te Parijs te houden 1e Congrès international du froid. Ter kennisneming voor de leden beschikbaar gesteld.

Dierkunde. — De Heer HOEK geeft een overzicht van enkele resultaten, die verkregen zijn bij het bewerken van de tijdens den kruistocht met het Nederlandsche Oorlogschip „*Siboga*" in den Maleischen Archipel bijeengebrachte Cirripediën.

Na in korte trekken uiteengezet te hebben, welke plaats deze dierengroep in de klasse der Schaaldieren inneemt, wijst Spreker op het groote voordeel, dat men heeft, bij het bestudeeren van deze dieren gebruik te kunnen maken van DARWIN's beroemde monographie [1]), die zoowel wat de algemeene behandeling van de „Subclass" betreft, als voor de beschrijving der verschillende soorten nog altijd als model kan dienen voor soortgelijke monographiën. Zooals te verwachten was, heeft ook het Siboga-materiaal onze kennis van de levenswijze, van de onderlinge verwantschap en den bouw dezer dieren niet onbelangrijk vergroot; enkele interessante gevallen werden der Afdeeling reeds vroeger medegedeeld [2]), eene meer uit-

[1]) DARWIN, CH., Monograph of the Subclass Cirripedia (in 2 Volumes). Vol. I. The Lepadidae or Pedunculated Cirripedes, 1851; Vol. II. The Balanidae (or Sessile Cirripedes); The Verrucidae etc. 1854. London: Printed for the Ray Society.

[2]) Zie in de Vergadering-Verslagen van 25 Juni 1904 en 27 Januari 1906.

voerige behandeling daarvan is in het Rapport over deze groep in de door Prof. MAX WEBER geredigeerde „Uitkomsten" te vinden. Het eerste stuk van het Cirripediën-rapport verscheen in September 1907, van het tweede stuk is een groot deel gereed, de determinatie van al het verzamelde materiaal is nagenoeg afgeloopen.

Om zich een voorstelling te kunnen maken van de beteekenis van het Siboga-materiaal is het niet zonder belang dit te vergelijken met dat, hetwelk tijdens de Engelsche expeditie met de „Challenger" werd bijeengebracht. Het Engelsche korvet maakte gedurende bijna vier jaar een reis om de Wereld en verzamelde nagenoeg in alle oceanen en zeeën; het gedurende deze reis aan Cirripediën bijeenbrachte materiaal werd eveneens door Spreker bewerkt, het rapport dier bewerking verscheen in 1883 in het licht. Uit de hierachter volgende tabel blijkt nu, dat het Siboga-materiaal, verkregen in één jaar tijds en van een betrekkelijk beperkt gebied, in rijkdom voor dat van de Challenger niet onderdoet; laatstgenoemd vaartuig verzamelde echter een grooter deel van zijn buit in de onmetelijke oceanen, waar de diepte over 't algemeen een nog grootere is, de Siboga daarentegen had uit den aard der zaak meer gelegenheid zich aan het onderzoek van kusten, koraalriffen enz. te wijden; zoo verklaart zich gemakkelijk, dat, terwijl de Challenger aan diepten tot van meer dan 5000 M. eene rijkere vangst van echte diepzeedieren ontwoekerde, de Siboga naast een toch zeer belangrijk diepzee-materiaal meer kustvormen bijeenbracht en zoo, daar ook vele Cirripediën bewoners van het ondiepe water zijn, een belangrijk grooter aantal soorten, alle te zamen genomen, haar deel was.

Trouwens niet met het doel om in het bijzonder op dat grootere aantal soorten te wijzen, dat door de vaderlandsche expeditie werd buitgemaakt, werd deze tabel samengesteld. Zij moet voornamelijk dienen om er opmerkzaam op te maken, dat het diepzee-materiaal van alle wereldzeeën te zaam genomen, is gebleken eigenlijk geen andere samenstelling te bezitten, als dat hetwelk in een betrekkelijk klein gebied als de Maleische Archipel werd aangetroffen. Voor beide komt die samenstelling daarop neder, dat op stuk van zaken slechts twee geslachten *Scalpellum* en *Verruca* in dieper water door talrijke soorten vertegenwoordigd zijn, terwijl de andere geslachten, die in dat diepere water nog voorkomen, daar slechts door enkele vormen gerepresenteerd zijn. Wel worden ook de geslachten *Scalpellum* en *Verruca* door menige soort in ondieper water vertegenwoordigd: van *Scalpellum* zijn thans 125 soorten, die bijna zonder uitzondering goed en scherp van elkander te onderscheiden zijn, bekend; van deze leven er 90 op diepten van meer dan 500 M. tot ca. 5000 M., 35

HET SIBOGA-MATERIAAL AAN CIRRIPIDIEN VERGELEKEN MET DAT VERKREGEN MET DE CHALLENGER

	Siboga: Maleische Archipel				Challenger: Reis om de wereld			
Genera	Aantal soorten verzameld	Hiervan novae spec.	Hiervan op diepten van 200—499 M.	Id. van 500—2800 M.	Aantal soorten verzameld	Hiervan novae spec.	Hiervan op diepten van 200—499 M.	Id. van 500—5130 M.
Lepas	2	—	—	—	6	—	—	—
Poecilasma	7	3	3	—	2	2	—	2 [5])
Dichelaspis	5	4	—	1 [1])	1	1	—	1 [6])
Conchoderma	—	—	—	—	2	—	—	—
Megalasma	2	1	1	—	1	1	—	—
Alepas	5	5	1	2 [2])	1	1	—	1 [7])
Microlepas n. gen.	1	1	—	—	—	—	—	—
Ibla	2	1	—	—	—	—	—	—
Scalpellum	38	32	8	22	43	43	7	36
Pollicipes	1	—	—	—	—	—	—	—
Lithotrya	4	1	—	—	—	—	—	—
Balanus	±20 *)	±10 *)	3	1 [3])	10	5	2	1 [8])
Acasta	2	1	—	—	1	—	—	—
Tetraclita	3	—	—	—	2	—	—	—
Pyrgoma	3	2	1	—	—	—	—	—
Creusia	1	—	—	—	—	—	—	—
Coronula	—	—	—	—	1	—	—	—
Chthamalus	2	—	—	—	2	1	—	—
Hexelasma n. gen.	1	1	—	1 [4])	—	—	—	—
Verruca	7	6	—	6	6	6	—	6
Totaal	106	68	17	33	78	60	9	47
			50 diepzee-spec.				56 diepzee-spec.	

*) Voorloopige determinatie.
[1]) *Dichelaspis Weberi* van een diepte van 560 M.
[2]) *Alepas morula* van 538 M. en *Alepas ovalis* van 984 M.
[3]) *Balanus alatus* van 564 M.
[4]) *Hexelasma arafurae* van 560 M.
[5]) *Poecilasma carinatum* van 750 M. en *P. gracile* van 740 M.
[6]) *Dichelaspis sessilis* van 1800 M.
[7]) *Alepas pedunculata* van 740 M.
[8]) *Balanus hirsutus* van 900 M.

in ondieper water. Zoo heeft *Verruca* het thans tot 36 soorten gebracht, waarvan 5 in ondieper water en 31 in water van meer dan 500 M. tot 3400 M. werden aangetroffen. In het diepe water hebben echter alleen deze twee geslachten voor nieuwe soortvorming de omstandigheden bijzonder gunstig gevonden, terwijl dit met de andere geslachten meer in het ondiepere water het geval is geweest. Als voorbeeld van deze laatste kan het geslacht *Balanus* dienen, waarvan thans ongeveer 60 soorten bekend zijn, dat dus ook aan soorten rijk genoemd mag worden, waarvan er echter slechts 5 in water van 200—500 M. voorkomen, terwijl van deze slechts 2 in water tot van een diepte van 564 M. werden aangetroffen. Ruim 55 soorten van *Balanus* zijn echter bekend, die de kust of betrekkelijk ondiep water nabij de kusten bewonen.

Spreker meent, dat op 't oogenblik ons weten nog te onvolkomen is, om ons aan eene verklaring van een dergelijk verschijnsel te wagen: we moeten er ons nog wel toe bepalen, zulke feiten zoo behoorlijk mogelijk te constateeren en verder het als eene eigenaardigheid van enkele geslachten beschouwen, dat hun soortenrijkdom zich over zoo sterk uiteenloopende diepten ontvouwt, terwijl de aard van andere geslachten meêbrengt, dat geen, of slechts één enkele of zeer enkele soorten zich aan eene eenigszins belangrijker diepte hebben kunnen aanpassen.

Opmerkelijk is daarbij, in het bijzonder voor het geslacht *Scalpellum*, doch voor de meeste *Verruca's* geldt hetzelfde, dat een zoo groote soortenrijkdom gepaard gaat met een eveneens zeer groot isolement der verschillende vormen. Natuurlijk kunnen wij hier niet met volstrekte zekerheid spreken, daar het dreggen, vooral in dieper water, altijd een onzeker middel blijft om daarmede de meerdere of mindere algemeenheid van eene soort op de plaats, waar zij voorkomt, te bepalen. Niettemin is het opvallend, dat in de gemaakte collecties alle soorten uit dieper water bijna zonder uitzondering door slechts een exemplaar of door zeer weinige exemplaren vertegenwoordigd zijn. Vooral als men daarmede de soorten van de pelagische Cirripediën en die, welke nabij de kust of op geringe diepte leven, en die bijna steeds door zeer talrijke in elkanders nabijheid levende exemplaren gekenmerkt worden, vergelijkt, komt men er toe aan te nemen, dat op grootere diepte betrekkelijk groote afstanden de vindplaatsen van een bepaalden vorm van elkander scheiden, of wel dat exemplaren van dezelfde soort op betrekkelijk niet zeer talrijke vindplaatsen voorkomen. Als bewijs daarvan kan ook dienen, dat de Siboga slechts van twee van de tien soorten van *Scalpellum*, die de Challenger in den Maleischen Archipel verzamelde, exemplaren terug-

vond. Hiermede zou echter het terugvangen door de Siboga van de eenige soort van *Verruca*, die de Challenger in dien Archipel uit dieper water meêbracht, in strijd zijn — in beide gevallen was echter ook deze soort door slechts zeer enkele exemplaren vertegenwoordigd. Eindelijk moet in dit verband eenige verwondering wekken, dat in enkele gevallen met denzelfden trek van de dreg, van eenzelfde vindplaats dus, vertegenwoordigers van twee en drie soorten van het geslacht *Scalpellum*, soms nog daarbij in gezelschap van een enkel exemplaar van eene *Verruca*-soort, werden opgehaald: zulke stations schijnen voor het voorkomen van deze dieren bijzonder gunstig te zijn; toch geldt voor de daar aangetroffenen eveneens, dat zij er slechts in zeer enkele exemplaren werden gevonden. [1])

Van enkele *Scalpellum's* uit dieper water kon vastgesteld worden, dat zij weinig talrijke en betrekkelijk groote eieren voortbrachten en een verkorte metamorphose doorliepen; het ligt voor de hand aan te nemen, dat deze eigenaardigheden verband houden met hun geringer aantal — dat dit daardoor verklaard zou worden, kan men echter bezwaarlijk beweren. Hoe het zij, zooverre onze kennis nu reikt, moeten we de diepzee-soorten van *Scalpellum* en *Verruca* als kluizenaars beschouwen; daar juist *hun* soortental zeer groot is, leveren zij waarschijnlijk kostbaar bewijsmateriaal voor de oorspronkelijk door MORITZ WAGNER [2]) uitgesproken, door WEISMANN [3]) gekritiseerde en slechts in zeer gewijzigden vorm overgenomen denkbeelden omtrent den invloed, dien isoleering op de vorming van nieuwe soorten zou uitoefenen.

Ook wat de geographische verspreiding der Cirripediën aangaat, is de bewerking van het Siboga-materiaal zeer leerzaam geweest. Behalve de pelagische vormen, die aan drijvende voorwerpen bevestigd zijn: stukken hout, schepen, nabij het oppervlak zwemmende dieren, zooals Cetaceën enz. enz., en waarvan vele over een groot deel der oceanen verspreid worden aangetroffen, leven deze schaaldieren

[1]) Het ligt voor de hand te vragen, of de aard van den bodem daarbij niet een gewichtige rol speelt. Zonder dit te willen ontkennen, moet ik er toch op wijzen, dat uit de in de lijst der Stations omtrent de bodemgesteldheid verstrekte inlichtingen, de beteekenis daarvan voor de verspreiding der Cirripediën niet duidelijk blijkt. Zoo kan men b. v. wél zeggen, dat vele soorten van *Scalpellum* op plaatsen met een slikkigen bodem werden aangetroffen, maar dat toch ook een aantal soorten van een harden bodem van zand, van grof zand of van koraal zand werden verkregen.

[2]) WAGNER, MORITZ, Die Darwin'sche Theorie und das Migrationsgesetz der Organismen. Leipzig, 1868.

[3]) WEISMANN, AUGUST, Ueber den Einfluss der Isolirung auf die Artbildung. Leipzig, 1872.

aan steenen, schelpen van weekdieren, koralen enz. bevestigd en staat hun voor actieve plaatsverandering alleen gedurende hun larvalen toestand de gelegenheid open. Die activiteit is echter ook dan nog maar een zeer betrekkelijke: beschikken de Nauplius en Zoëa-larven ook over ledematen, die het hun mogelijk maken zich te verplaatsen, als elementen van het plankton is het voornamelijk passief met de stroomingen, dat hun verspreiding geschiedt. Die verspreiding blijkt echter in den regel slechts een beperkte te zijn: er zijn ten minste maar zeer enkele soorten van niet-pelagische Cirripediën bekend, die over de geheele wereld verspreid voorkomen, of ook maar in verscheidene der acht voor de geographische verdeeling der soorten in het rapport over de Challenger-Cirripediën aangenomen provincies. Van die provincies is de Oost-Indische Archipel met inbegrip van de Philippijnen, Mallakka, Nieuw-Guinea en de Oostkust van Engelsch Indië er eene en het onderzoek van het Siboga-materiaal heeft op nieuw aangetoond, dat deze provincie werkelijk haar eigen Cirripediën heeft, behoudens natuurlijk eenige soorten, die zich als 't ware van uit het eigen gebied over de grenzen daarvan in andere provincies verbreid hebben, wellicht ook van enkele, die eigenlijk in eene naburige provincie t'huis behoorend, over de grenzen daarvan in den Indischen Archipel zijn gekomen. Van de soorten uit het diepere water is er maar een enkele bekend geworden, waarvan men zeggen kan, dat zij op uiteenloopende plaatsen van de wereld voorkomt: dit is *Scalpellum acutum*. De Challenger verzamelde deze soort in den Atlantischen Oceaan (bij de Azoren) en in de Stille Zuidzee (bij de Kermadec-eilanden op 940—1800 M. diepte; de Talisman eveneens in den Atlantischen Oceaan (niet ver van de kust van Portugal) op een diepte van 1925 M.; de Siboga eindelijk op drie verschillende plaatsen in den Maleischen Archipel op diepten varieerend van 825—1265 M. Doch dit neemt natuurlijk niet weg, dat nog als algemeen geldende regel kan beschouwd worden, dat, terwijl vele *geslachten* en met name de echte diepzee-geslachten van Cirripediën over de geheele wereld verspreid voorkomen, de *soorten* van Cirripediën en de diepzeesoorten in het bijzonder, slechts een zeer lokale verspreiding blijken te bezitten.

Wat eindelijk de verhouding betreft van de diepzee-vormen tot de uitgestorven soorten, waarvan ons als fossielen overblijfsels bewaard zijn gebleven, zoo verschafte het Siboga-materiaal ook dienaangaande eene volledige bevestiging van hetgeen reeds bij de bewerking van de Challenger-Cirripediën aan het licht was gekomen. De in de diepe zee zoo ruimschoots vertegenwoordigde soorten van het geslacht

Scalpellum hebben hunne representanten reeds in betrekkelijk oude aardlagen: secundaire zoowel als tertiaire; zelfs kan men zeggen, dat de groote meerderheid van de soorten uit de diepe zee, wat een voornaam anatomisch karakter betreft (vorm en bouw van de zoogen. carina), met de oudste uitgestorven soorten (al degene die in secundaire lagen gevonden werden) de grootste overeenstemming vertoonen, zoodat men voor dat geslacht veilig beweren kan, dat de diepzeevormen een min of meer archaeisch karakter behouden hebben. Naast de fossiele *Scalpellum's* werden in dezelfde aardlagen en zelfs gesteenten talrijke soorten van het geslacht *Pollicipes* aangetroffen, een geslacht waarvan DARWIN reeds 22 verschillende fossiele soorten onderscheidde en waartoe de oudste uitgestorven vormen van Cirripediën, die bekend zijn, gerekend moeten worden. Van dit geslacht bestaan ook nu nog een half dozijn soorten. Met de Challenger werd echter geen enkele vertegenwoordiger van dit geslacht uit ook maar eenigszins dieper water opgehaald, wat bij de bewerking van het materiaal van die expeditie aanleiding gaf tot de opmerking, dat de mogelijkheid, dat bij toekomstige onderzoekingen van de diepezee ook soorten van het geslacht *Pollicipes* als bewoners van dat diepere water aan het licht zouden komen, niet mocht worden ontkend. Welnu, de Siboga, die juist in de provincie, waar een der nog levende soorten van *Pollicipes* (*P. mitella*) zeer algemeen verspreid voorkomt, de diepezee nauwkeurig onderzocht, verkreeg ook geen enkel exemplaar van een soort van dit geslacht uit dieper water. De juistheid van de in 1883 uitgesproken meening, dat wat het geslacht *Pollicipes* betreft juist in de tot de kustfauna behoorende soorten het archaeisch karakter bewaard is gebleven, is door de resultaten van de Siboga-expeditie volkomen bevestigd geworden. Van het geslacht *Verruca* zijn evenals van *Scalpellum* eenige soorten in oudere aardlagen aangetroffen: een dezer (*V. strömia*) leeft ook nu nog en werd in lagen uit den ijstijd en ook in Red en Coralline Crag in Engeland aangetroffen, een tweede soort komt (volgens DARWIN) in tertiaire lagen in Patagonië voor, een derde (*V. prisca*) in het krijt van Engeland en België. Voor zoover deze laatste vorm bekend is, valt een zekere mate van overeenstemming tusschen haar en vele der diepzee-soorten niet te ontkennen. Ook in dit opzicht zou dus het geslacht *Verruca* meer analogie tot *Scalpellum* dan tot *Pollicipes* toonen.

Sterrenkunde. — De Heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN biedt aan eene mededeeling van den Heer C. SANDERS: „*Bijdragen tot de astronomische plaatsbepaling op de Westkust van Afrika. III. Naschrift.*"

6. *Gewijzigde berekening der lengtebepalingen in* 1904.

Voor de berekening der standen mijner chronometers ten opzichte van den M. T. van Chiloango gedurende mijne reis van 1904 Juni, nam ik te voren aan, dat bij de storing op Juni 3 de chronometer van HEWITT niet geleden had en die van HOHWÜ 2 sec. was vooruitgesprongen.

Ik nam dit bedrag van 2 sec. aan voornamelijk om niet te overdrijven. Echter maakt zoowel de uitkomst der tijdsbepaling op 5 Juni te N'Kutu, in verband met den bij het onderstellen van een sprong aan te nemen gewijzigden gang, als de onderlinge vergelijkingen op 3 Juni een sprong van 3 sec. waarschijnlijker.

Ik wil daarom nog in het volgende de uitkomsten aangeven, die men verkrijgt, wanneer men van die laatste onderstelling uitgaat, waarmede dan gepaard moet gaan het aannemen van een dagelijkschen gang voor HOHWÜ van $+ 0^s.95$. Daarnevens wil ik echter ook doen zien, tot welke uitkomsten de uiterste onderstelling naar de andere zijde voeren zou, dat HOHWÜ ongestoord is gebleven en HEWITT 6 tikken = 3 sec. overgeslagen heeft, waarmede dan moet samengaan dat men zijne dagelijksche gangen $0^s.12$ kleiner aanneemt. Deze onderstelling is wel niet waarschijnlijk, maar toch niet geheel onmogelijk, en wij verkrijgen zoodoende eenig denkbeeld van de hier nog overblijvende onzekerheid. Overigens houd ik voor HEWITT vast aan den aangenomen veranderlijken gang wegens de voortgaande temperatuurdaling.

Hieronder volgen de waarden verkregen voor het lengteverschil der 4 bepaalde plaatsen met Chiloango

a bij de vroegere onderstelling,

b wanneer men bij HOHWÜ een sprong van 3 sec. aanneemt,

c wanneer men een sprong van 3 sec. in tegengestelden zin bij HEWITT onderstelt.

		HOHWÜ	HEWITT	MIDDEN
Mayili	*a*	$-1^m 21^s56$	19^s31	$-1^m 20^s44$
	b	21.45	19.31	20.38
	c	21.80	19.66	20.73

		Hohwü	Hewitt	Midden
N'Kutu	*a*	— 1m 58s62	59s24	— 1m 58s93
	b	59.39	59.24	59.32
	c	57.09	56.94	57.02
Buku Zan	*a*	— 1m 35s31	36s71	— 1m 36s01
	b	35.73	36.71	36.22
	c	34.51	35.49	35.00
Chimbete	*a*	— 1m 53s27	53s21	— 1m 53s24
	b	53.41	53.21	53.31
	c	53.03	52.83	52.93

Wij zien nu vooreerst dat het lengteverschil van N'Kutu bij onderstelling *b* juist overeenstemt met de uitkomst van 1903 December, die 59s.32 was, en bij onderstelling *c* sterk daarvan afwijkt, waaruit dus duidelijk de mindere waarschijnlijkheid dezer laatste blijkt. Verder blijken, wat de drie andere plaatsen betreft, de uitkomsten naar de beide uiterste onderstellingen *b* en *c* voor Buku Zan 1s.2, voor Mayili en Chimbete slechts 0s.4 uiteen te loopen, terwijl die naar *a* en *b* voor Buku Zan 0s.2, voor Mayili en Chimbete minder dan 0s.1 verschillen, en de uitkomsten naar beide chronometers, behalve voor Mayili, eene vrij goede onderlinge overeenstemming vertoonen.

Terwijl nu de uitkomst van 1904 voor N'Kutu verworpen en door die van 1903 vervangen wordt, en voor Mayili het gemiddelde der uitkomsten van 1902 en 1904 kan genomen worden, ziet men dat de onzekerheid, welke de voorgekomen storing in de einduitkomsten te weeg brengt, minder groot is dan aanvankelijk te vreezen was.

Ten slotte volgen hier nog de einduitkomsten die men op deze wijze, bij het aannemen der waarschijnlijkste onderstelling *b* verkrijgt:

Lengteverschil met Chiloango

Mayili	— 1m20s.8
N'Kutu	— 1 59 .3
Buku Zan	— 1 36 .2
Chimbete	— 1 53 .3

De verschillen met de te voren aangenomen waarden bedragen hoogstens 0s.2.

Natuurkunde. — De Heer H. A. LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer L. S. ORNSTEIN: „*Berekening van den druk van een mengsel van twee gassen met behulp der statistische mechanica van* GIBBS."

(Mede aangeboden door den Heer H. KAMERLINGH ONNES).

In mijn proefschrift [1]) heb ik volgens de methode der statistische mechanica den druk van een gasmengsel afgeleid nauwkeurig tot in termen van de eerste orde in σ_1^3, σ_2^3 en σ^3. De grootheden σ_1 en σ_2 zijn de middellijnen van de molekulen waaruit het mengsel bestaat, terwijl σ voor $\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$ is in de plaats gesteld.

In een onlangs verschenen verhandeling [2]) heeft H. HAPPEL de toestandsvergelijking voor dit geval volgens eene door L. BOLTZMANN aangegeven methode bepaald tot in termen van hooger orde in genoemde grootheden nauwkeurig. Daar de methode der statistische mechanica naar ik geloof strenger is dan de daar toegepaste, zoo wil ik met behulp van hare beschouwingen de genoemde vergelijking tot de door HAPPEL bereikte nauwkeurigheid afleiden.

J. W. GIBBS [3]) heeft aangetoond dat de druk p door een gas uitgeoefend gegeven is door de vergelijking

$$p = -\frac{d\Psi}{dV} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

In deze vergelijking is V het volume door het gas ingenomen terwijl Ψ de zgn. statistische vrije energie is. We moeten dus Ψ bepalen.

Stel dat zich in het volume V n_1 molekulen van de eerste soort, waarvan de middellijn σ_1 en de massa m_1 is, bevinden, en n_2 molekulen van de tweede soort waarvan de middellijn σ_2 en de massa m_2 is.

We onderstellen dat de molekulen volkomen hard en veerkrachtig zijn en dat ze aantrekkende krachten op elkaar uitoefenen op zulke afstanden dat de werkingssfeer als homogeen gevuld beschouwd kan worden. De waarde van Ψ is voor dit geval bepaald door de vergelijking

$$e^{-\frac{\Psi}{\theta}} = (2\pi\theta m_1)^{\frac{3}{2}n_1} (2\pi\theta m_2)^{\frac{3}{2}n_2} \int e^{-\frac{\varepsilon_q}{\theta}} dx_{11} \ldots dz_{2n_2} \quad . \quad . \quad (2)$$

De coordinaten van het k^e molekuul van de eerste soort zijn door

---

[1]) Toepassing der statistische mechanica van GIBBS op molekulair-theoretische vraagstukken. Leiden 1908.

[2]) H. HAPPEL. Zur Kinetik und Thermodynamik der Gemische. Ann. der Phys. 1908 Bd 26 p. 95.

[3]) J. W. GIBBS. Elementary principles in statistical Mechanics. New-York 1902.

x_{1k}, y_{1k} en z_{1k}, die van het l^e molekuul van de tweede soort door x_{2l}, y_{2l} en z_{2l} voorgesteld.

De integratie moet worden uitgestrekt over eene $3(n_1 + n_2)$-dimensionale uitgebreidheid die men verkrijgt door de $3(n_1 + n_2)$ coördinaten der middelpunten als cartesische coördinaten van een punt op te vatten en vervolgens de standen der molekulen te varieeren.

We moeten echter van deze uitgebreidheid al die punten uitsluiten waar voldaan is aan een der ongelijkheden van den vorm

$$\left.\begin{aligned} (x_{1k} - x_{1l})^2 + (y_{1k} - y_{1l})^2 + (z_{1k} - z_{1l})^2 &< \sigma_1^2 \\ (x_{1k} - x_{2l})^2 + (y_{1k} - y_{2l})^2 + (z_{1k} - z_{2l})^2 &< \sigma^2 \\ (x_{2k} - x_{2l})^2 + (y_{2k} - y_{2l})^2 + (z_{2k} - z_{2l})^2 &< \sigma_2^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (3)$$

Gelijk ik in mijn proefschrift heb aangetoond is de overgroote meerderheid der systemen in een kanonisch ensemble identiek [4]). In al deze identieke (aequivalente) systemen is de waarde van de potentieele energie der aantrekkende krachten gelijk.

Men kan deze grootheid ε_{q_0} als de werkingsfeer homogeen gevuld is, voorstellen door de vergelijking

$$\varepsilon_{q_0} = -\frac{a_1 n_1^2 + 2 a n_1 n_2 + a_2 n_2^2}{2 V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

De potentieele energie der afstootende krachten behoeft niet in aanmerking genomen te worden.

We kunnen nu in (2) ε_q, die voor een zeer klein aantal systemen van ε_{q_0} verschilt, bij goede benadering voor *alle* systemen door ε_{q_0} vervangen en vervolgens den exponentieelen factor, die daardoor een constante wordt, buiten het integraalteeken brengen. Voor Ψ kan dan geschreven worden.

$$e^{-\frac{\Psi}{\theta}} = (2\pi\theta m_1)^{\frac{3}{2}n_1} (2\pi\theta m_2)^{\frac{3}{2}n_2} e^{-\frac{\varepsilon_{q_0}}{\theta}} \int dx_{11} \, . \, . \, dz_{2n_2} \quad . \quad . \quad (5)$$

De bepaling van Ψ is hiermede teruggebracht tot de bepaling van de integraal in het tweede lid. Ik zal deze integraal door $\chi(n_1, n_2)$ voorstellen.

Ik heb de functie $\chi(n_1, n_2)$ in mijn proefschrift met den genoemden graad van nauwkeurigheid bepaald. Alsvorens tot de nauwkeuriger berekening over te gaan zal ik de daar gegeven bepaling, waarvan zij slechts een uitbreiding behoeft te zijn, weergeven.

Men kan de $3(n_1 + n_2)$-dimensionale uitgebreidheid, waarover de integratie moet worden uitgestrekt ontbinden in $n_1 + n_2$ driedimensionale ruimten die elk aan een der molekulen beantwoorden. Deze

---

[4]) l. c. 14

ruimten verdeelen we in elementen die klein zijn ten opzichte van het volume der molekulen.

Om nu de integraal, die de functie $\chi(n_1, n_2)$ definieert, te bepalen kan men haar splitsen in een som van producten van $n_1 + n_2$ elementen uit de bovengenoemde ruimten gekozen, zoo dat elke ruimte tot een dergelijk product één element als factor bijdraagt.

Om deze producten overzichtelijk te sommeeren en tegelijkertijd slechts die producten te verkrijgen die in verband met (3) zijn toegelaten, gaan we als volgt te werk. We nummeren de ruimten die aan de molekulen van de eerste soort beantwoorden van 1 tot n_1, vervolgens de ruimten die aan molekulen van de tweede soort beantwoorden van $n_1 + 1$ tot $n_1 + n_2$ en kiezen de elementen uit deze ruimten in de volgorde die hun nummer aangeeft. Bij deze keuze moeten wij dan bedenken dat zoo het in de k^e ruimte (beantwoordende aan een molekuul van de eerste soort) gekozen element aan een punt x_{1k}, y_{1k}, z_{1k} ligt, het element dat tot het betreffende product bijdraagt in de ruimten $k + 1$ tot n_1 niet gekozen mag worden binnen een bol met den straal σ_1 beschreven om de punten waarvan de coördinaten gelijk aan x_{1k}, y_{1k} en z_{1k} zijn. En evenzoo moet men die elementen der ruimten $n_1 + 1$ tot $n_1 + n_2$ voor de keuze uitsluiten, die liggen binnen de bollen met den straal σ beschreven om punten van deze ruimten waarvan de coördinaten gelijk x_{1k}, y_{1k} en z_{1k} zijn.

Heeft men verder in de ruimte van het nummer $n_1 + \nu_2$ een element aan een punt $x_{2n_1+\nu_2}$, $y_{2n_1+\nu_2}$ en $z_{2n_1+\nu_2}$ gelegen gekozen, dan moet in de ruimten $n_1 + \nu_2 + 1$ tot $n_1 + n_2$ een bol om de overeenkomstige punten met den straal σ_2 beschreven voor de keuze uitgesloten worden.

Heeft men nu in $n_1 + n_2 - 1$ ruimten de elementen gekozen dan blijft voor de keuze van het $(n_1 + n_2)^e$ element in de $(n_1+n_2)^e$ ruimte een stuk $g_{n_1+n_2}$ over.

We kunnen bij het sommeeren der producten eerst die bijeenvoegen waarvoor de $n_1 + n_2 - 1$ eerst gekozen producten gelijk zijn.

Overweegt men dat n_1 en n_2 zeer groote getallen zijn, en dat de elementen volkomen willekeurig gekozen worden, dan ziet men gemakkelijk in dat $g_{n_1+n_2}$ voor de overgroote meerderheid van de combinaties der elementen uit de $n_1 + n_2 - 1$ ruimten hetzelfde is, en dat men ter bepaling van $\chi(n_1 + n_2)$ met goede benadering de formule

$$\chi(n_1, n_2) = g_{n_1+n_2}\, \chi(n_1, n_2 - 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

mag gebruiken.

Het komt dus aan op de bepaling van $g_{n_1+n_2}$.

Een eerste benadering voor deze grootheid aan te geven is hoogst

eenvoudig. Men ziet dan af van het feit dat de genoemde bollen in de $(n_1 + n_2)^e$ ruimte elkaar snijden en vindt, gelijk men gemakkelijk inziet

$$g_{n_1+n_2} = V - n_1 \frac{4}{3} \pi \sigma^3 - (n_2 - 1) \frac{4}{3} \pi \sigma_2^3 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Uit (6) en (7) volgt door achtereenvolgende reductie

$$\chi(n_1, n_2) = \chi(n_1) \prod_1^{n_2} \left(V - n_1 \frac{4}{3} \pi \sigma^3 - (\nu_2 - 1) \frac{4}{3} \pi \sigma_2^3 \right) \quad . \quad (8)$$

waarbij, evenals in volgende formules, bij het teeken voor het product de hoogste waarde is aangewezen van het door de overeenkomstige grieksche letter voorgestelde getal.

De waarde van χ (n_1) is gelijk men gemakkelijk inziet tot den gebruikten graad van nauwkeurigheid gegeven door[1])

$$\chi(n_1) = \prod_1^{n_1} \left(V - \nu_1 \frac{4}{3} \pi \sigma_1^3 \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Om nu de gezochte verdere benadering te vinden moeten we $g_{n_1+n_2}$ nauwkeuriger bepalen. Daartoe moeten wij in aanmerking nemen dat de beschouwde bollen elkaar kunnen snijden, en dat dus van V te veel is afgetrokken.

Men heeft hierbij drie gevallen te onderscheiden.

Ten eerste kunnen de bollen met den straal σ beschreven om de punten die met de middelpunten der molekulen van de eerste soort overeenkomen, elkaar snijden. De afstand x der middelpunten kan niet kleiner dan σ_1 zijn en mag, willen de bollen elkaar snijden, niet grooter dan 2 σ worden genomen.

Ten tweede kunnen de bollen met den straal σ_2 beschreven om de punten die met de middelpunten van de molekulen der tweede soort overeenkomen, elkaar snijden. De afstand van de middelpunten moet daartoe tusschen σ_2 en 2 σ_2 liggen.

Ten derde kunnen ook de bollen met de stralen σ en σ_2 elkaar snijden. De afstand x der punten die met het middelpunt van een molekuul der eerste resp. der tweede soort overeenkomen, moet daartoe liggen tusschen σ en $\sigma_2 + \sigma$.

Ik zal nu de stukken die aan deze snijdingen beantwoorden bepalen. Deze stukken zijn voor de overgroote meerderheid der combinaties der $n_1 + n_2 - 1$ voorafgekozen elementen gelijk, en men mag bij de bepaling aannemen dat de gebieden die men in de

---

[1]) Verg. l. c. § 23 en § 27.

$(n_1 + n_2)^e$ ruimte moet uitsluiten homogeen over deze ruimte verdeeld liggen.

1. Het aantal puntenparen (van de eerste soort) waarvoor de afstand tusschen x en $x + dx$ ligt bedraagt

$$2\pi\, n_1^2\, \frac{x^2\, dx}{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Het gemeenschappelijk stuk van twee bollen met den straal σ waarvan de middelpuntsafstand x is, bedraagt

$$\pi\left(\frac{4}{3}\sigma^3 - \sigma^2 x + \frac{x^3}{12}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Voor het stuk dat van V te veel is afgetrokken vindt men dus

$$\frac{2\pi^2 n_1^2}{V}\int_{\sigma_1}^{2\sigma}\left(\frac{4}{3}\sigma^3 x^2 - \sigma^2 x^3 + \frac{x^5}{12}\right)dx = \frac{\pi^2 n_1^2}{V}\left(\frac{8}{9}\sigma^6 - \frac{8}{9}\sigma^3\sigma_1^3 + \frac{1}{2}\sigma^2\sigma_1^4 - \frac{\sigma_1^6}{36}\right) \quad (12)$$

2. Voor het aantal der puntenparen (met molekulen van de tweede soort overeenkomend) waarvoor de afstand tusschen x en $x + dx$ ligt vindt men evenzoo

$$2\pi\,(n_2 - 1)(n_2 - 2)\,\frac{x^2 dx}{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

terwijl het gemeenschappelijk stuk gevonden wordt door in (11) σ door σ_2 te vervangen.

Voor het totale stuk dat te veel is afgetrokken vindt men

$$2\pi^2\frac{(n_2-1)(n_2-2)}{V}\int_{\sigma_2}^{2\sigma_2}\left(\frac{4}{3}\sigma_2^3 x^2 - \sigma_2^2 x^3 + \frac{x^5}{12}\right)dx = \frac{17(n_2-1)(n_2-2)}{16\quad V}\left(\frac{2}{3}\pi\sigma_2^3\right)^2 \quad (14)$$

3. Voor het aantal puntenparen waarvan één punt met het middelpunt van een molekuul der eerste soort en één punt met het middelpunt van een molekuul der tweede soort overeenstemt, terwijl de afstand der punten tusschen x en $x + dx$ ligt, heeft men

$$4\pi\, n_1\,(n_2 - 1)\,\frac{x^2 dx}{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Het gemeenschappelijk stuk heeft een grootte gegeven door

$$\pi\left[\frac{2}{3}\sigma_2^3 + \frac{2}{3}\sigma^3 - \frac{\sigma_2^2\,(x^2 + \sigma_2^2 - \sigma^2)}{2\,x} - \frac{\sigma^2\,(x^2 + \sigma^2 - \sigma_2^2)}{2x} + \right.$$
$$\left. + \frac{(x^2 + \sigma_2^2 - \sigma^2)^3}{24\,x^3} + \frac{(x^2 + \sigma^2 - \sigma_2^2)^3}{24\,x^3}\right] . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Voor het in het geheel te veel afgetrokken stuk vindt men dus

$$4\pi^2 \frac{n_1(n_2-1)}{V} \int_{\sigma}^{\sigma+\sigma_2} \left[\frac{2}{3}(\sigma^3+\sigma_2^3)x^3 - \frac{1}{2}(\sigma^2+\sigma_2^2)x^4 - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4}(\sigma^2-\sigma_2^2)^2 x + \frac{1}{12}x^5 \right] dx = \pi^2 \frac{n_1(n_2-1)}{V}\left(-\frac{1}{18}\sigma_2^6 + \sigma_2^4\sigma^2\right). \quad (17)$$

De waarde van $g_{n_1+n_2}$ wordt nu gevonden door (12), (14) en (17) bij (7) op te tellen. Voert men de gevonden waarde in (8) in zoo verkrijgt men

$$\chi(n_1, n_2) = \chi(n_1) \prod_1^{n_2} \left[V - n_1 \frac{4}{3}\pi\sigma^3 - (v_2-1)\frac{4}{3}\pi\sigma_2^3 + \right.$$

$$\frac{n_1^2}{V}\pi^2\left(\frac{8}{9}\sigma^6 - \frac{8}{9}\sigma^3\sigma_1^3 + \frac{1}{2}\sigma^2\sigma_1^4 - \frac{1}{36}\sigma_1^6\right) +$$

$$\left. + \frac{17(v_2-1)(v_2-2)}{36\,V}\pi^2\sigma_2^6 + \frac{n_1(v_2-1)}{V}\pi^2\left(-\frac{1}{18}\sigma_2^6 + \sigma_2^4\sigma^2\right)\right] \quad (18)$$

Men ziet gemakkelijk in dat bij den gekozen graad van nauwkeurigheid $\chi(n_1)$ gegeven is door de vergelijking

$$\chi(n_1) = \prod_1^{n_1}\left(V - (v_1-1)\frac{4}{3}\pi\sigma_1^3 + \frac{17}{36}\frac{(v_1-1)(v_1-2)}{V}\pi^2\sigma_1^6\right). \quad (19)$$

Voert men de gevonden waarde in (5) in, dan vindt men na den logarithmus van het resultaat genomen te hebben en door den logarithmus van de producten naar $\frac{1}{V}$ te ontwikkelen, voor Ψ de vergelijking

$$-\frac{\Psi}{\theta} = C + \frac{a_1 n_1^2 + 2a n_1 n_2 + a_2 n_2^2}{2\theta V} +$$

$$+ \sum_1^{n_1}\left[\log V - \frac{v_1-1}{V}\frac{4}{3}\pi\sigma_1^3 - \frac{(v_1-1)(v_1-2)}{V^2}\frac{15}{36}\pi^2\sigma_1^6\right] +$$

$$+ \sum_1^{n_2}\left[\log V - \frac{n_1}{V}\frac{4}{3}\pi\sigma^3 - \frac{(v_2-1)}{V}\frac{4}{3}\pi\sigma_2^3 - \frac{(v_2-1)(v_2-2)}{V^2}\frac{15}{36}\pi^2\sigma_2^6 - \right.$$

$$-\frac{8}{9}\frac{n_1^2}{V^2}\pi^2\sigma_1^3\sigma^3 + \frac{1}{2}\frac{n_1^2}{V^2}\pi^2\sigma^2\sigma_1^4 - \frac{1}{36}\frac{n_1^2}{V^2}\pi^2\sigma_1^6 -$$

$$\left. -\frac{16}{9}\frac{n_1(v_2-1)}{V^2}\pi^2\sigma_2^3\sigma^3 + \frac{n_1(v_2-1)}{V^2}\pi^2\sigma_2^4\sigma^2 - \frac{1}{18}\frac{n_1(v_2-1)}{V^2}\pi^2\sigma_2^6\right] \quad (20)$$

waarbij C voor het van V onafhankelijke gedeelte in de plaats is gesteld.

Overweegt men nu dat n_1 en n_2 zeer groote getallen zijn, dan ziet men gemakkelijk in dat de bovenstaande uitdrukking kan herleid worden tot

$$-\frac{\Psi}{\theta}=C+\frac{\alpha_1 n_1^2+2\alpha n_1 n_2+\alpha_2 n_2^2}{2\theta V}+(n_1+n_2)\log V-n_1^2\frac{\beta_1}{V}-\frac{5}{16}n_1^3\frac{\beta_1^2}{V^2}$$
$$-n_2^2\frac{\beta_2}{V}-\frac{5}{16}n_2^3\frac{\beta_2^2}{V^2}$$
$$-2n_1 n_2\frac{\beta}{V}$$
$$-\frac{8}{9}\frac{n_1^2 n_2}{V^2}\pi^2\sigma_1^3\sigma^3+\frac{1}{2}\frac{n_1^2 n_2}{V^2}\pi^2\sigma_1^4\sigma^2-\frac{1}{36}\frac{n_1^2 n_2}{V^2}\pi^2\sigma_1^6$$
$$-\frac{8}{9}\frac{n_1 n_2^2}{V^2}\pi^2\sigma_2^3\sigma^3+\frac{1}{2}\frac{n_1 n_2^2}{V^2}\pi^2\sigma_2^4\sigma^2-\frac{1}{36}\frac{n_1 n_2^2}{V^2}\pi^2\sigma_2^6 \quad . \; . \; (21)$$

waarbij $\frac{2}{3}\pi\sigma_1^3=\beta_1$, $\frac{2}{3}\pi\sigma_2^3=\beta_2$ en $\frac{2}{3}\pi\sigma^3=\beta$ is gesteld.

Voor den druk vindt men door naar V te differentieeren de vergelijking

$$\frac{p}{\theta}=\frac{n_1+n_2}{V}+\frac{n_1^2\beta_1}{V^2}+\frac{5}{8}\frac{n_1^3\beta_1^2}{V^3}+\frac{n_2^2\beta_2}{V^2}+\frac{5}{8}\frac{n_2^3\beta_2^2}{V^3}+\frac{2n_1 n_2\beta}{V^2}$$
$$-\frac{n_1^2 n_2}{V^3}\beta_1^2\left(-4\frac{\beta}{\beta_1}+\frac{9}{4}\frac{\beta}{\beta_1}\frac{\sigma}{\sigma_1}-\frac{1}{8}\right)$$
$$-\frac{n_1 n_2^2}{V^3}\beta_2^2\left(-4\frac{\beta}{\beta_2}+\frac{9}{4}\frac{\beta}{\beta_2}\frac{\sigma}{\sigma_2}-\frac{1}{8}\right)$$
$$-\frac{\alpha_1 n_1^2+2\alpha n_1 n_2+\alpha_2 n_2^2}{2\theta V^2}.$$

De grootheid θ is evenredig met de absolute temperatuur.

De uitdrukking is zooals te verwachten was symmetrisch in de grootheden die op de molekulen van de eerste en de tweede soort betrekking hebben; men kan haar evenzeer verkrijgen door de molekulen anders te groepeeren. De gevonden uitdrukking komt (als we de notaties in overeenstemming brengen) geheel met de door HAPPEL afgeleide overeen.

Scheikunde. — De Heer HOLLEMAN biedt een opstel aan van de Heeren A. SMITS en J. P. WIBAUT, getiteld: *„De dynamische opvatting van een omkeerbare chemische reactie"*.

(Mede aangeboden door den Heer v. D. WAALS).

Het is algemeen bekend, dat onze kinetische beschouwingen tot de aanname voeren, dat wij bij elke omkeerbare omzetting steeds met twee reacties te doen hebben, die in tegenovergestelde richting verloopen.

Een *direct* bewijs voor deze dynamische opvatting scheen echter op grond van de volgende overweging niet gegeven te kunnen worden.

Ons waarnemingsvermogen stelt ons alleen instaat verschillen te observeeren; bespeurt men dus iets van een omzetting, dan is dit een gevolg hiervan, dat de snelheid van de eene reactie grooter is dan die van de andere, en wij krijgen den indruk alsof slechts één reactie plaatsgrijpt, die met een snelheid verloopt gelijk aan het verschil van de snelheden van beide reacties.

Dit betoog dat voor omzettingen in *homogene* stelsels volkomen juist is, gaat echter, zooals wij zien zullen, in één enkel geval, bij een omzetting in een *heterogeen* systeem, door bijzondere omstandigheden, niet in alle deelen op.

Toch schenen de hierboven genoemde argumenten zóó overtuigend dat men tot heden heeft gemeend, zich tevreden te moeten stellen met het volgende *indirecte* bewijs.

De reeds aangegeven opvatting van een omkeerbare reactie leidt tot een eenvoudige betrekking tusschen de evenwichtskonstanten en de beide reactiekonstanten, welke luidt: $K = \frac{k_1}{k_2}$. In deze betrekking nu had men een middel om de kinetische opvatting van een omkeerbare omzetting te toetsen en het is bekend, dat het experiment voor de weinige gevallen, die men tot heden onderzocht, heeft laten zien, dat inderdaad aan deze betrekking wordt voldaan.

Toch scheen het zeer gewenscht de juistheid van onze dynamische opvatting van een omkeerbare reactie langs *directen* weg te bewijzen.

De omzetting door middel waarvan wij ons doel hebben bereikt is deze

$$2\,CO \rightleftarrows CO_2 + C$$

Dat de keuze op deze reactie viel, had zijn rede hierin, dat uit

de onderzoekingen van BOUDOUARD[1]) en anderen is gebleken, dat, wanneer CO zich in CO_2 en C omzet, de koolstof zich afscheidt in den vorm van grafiet, zoodat te verwachten was, dat wanneer men uitgaat van het rechtsche systeem, en bij steeds stijgende temperatuur CO_2 over *diamant* leidt, bij *gelijktijdig* verloop van de reactie van links naar rechts, zich op de diamant grafiet zal afzetten, hetgeen zelfs in uiterst geringe quantiteiten onmiddellijk zichtbaar zal zijn.

Het spreekt van zelf, dat, wil de proef iets bewijzen er voor moet worden zorg gedragen, dat de temperatuur nooit daalt, daar afscheiding van grafiet in dit geval toegeschreven zou kunnen worden aan een verschuiving van het evenwicht van links naar rechts.

Om zeker te zijn, dat hiervan geen sprake kon wezen, was het gewenscht de temperatuur tijdens de proef voortdurend te laten stijgen.

Voor nu tot de beschrijving van de proef over te gaan, stellen wij er prijs op te vermelden dat de diamantpoeder, waarmede het hierboven aangeduide onderzoek werd verricht ons door de Heeren ASSCHER op de meest welwillende wijze ter beschikking was gesteld, zoodat wij deze gelegenheid gaarne aangrijpen genoemde Heeren onzen welgemeenden dank te betuigen.

Daar het bij ons onderzoek van belang was van wit diamantpoeder uit te gaan, werd de door ons ontvangen diamant, die door verontreinigingen een grijze kleur bezat, in een open porseleinen kroes gegloeid, waarbij een volkomen wit poeder werd verkregen.

Voordat nu tot de beslissende proef kon worden overgegaan, diende allereerst te worden onderzocht of bij de temperatuur, waarbij wij ons onderzoek dachten te verrichten, diamant zich reeds in grafiet omzet.

Daartoe werd het witte diamantpoeder in een atmosfeer van zuivere stikstof door middel van een electrischen oven een uur lang op 900° verhit, waarbij bleek, dat onder deze omstandigheden van een omzetting van diamant in grafiet absoluut niets valt waar te nemen.

Toen dit gunstige resultaat verkregen was, werd een porseleinen schuitje met diamantpoeder gevuld in een porseleinen buis gebracht die in een electrischen oven langzaam werd verwarmd, terwijl door de porseleinen buis een stroom zuiver CO_2 streek.

Het ontwijkende gas werd door een zeer gevoelige oplossing van $PdCl_2$ geleid, zoodat de aanwezigheid van CO in het uittredende gasmengsel zich onmiddellijk moest verraden.

Het onderzoek liet zien, dat de reductie van CO_2 door diamant onder deze omstandigheden eerst bij ongeveer 750° merkbaar begint te worden, om bij 850° met groote snelheid te verloopen.

[1]) Ann. Chim. Phys. (7) 24, 5—85 (1901).

Nadat dus op deze wijze de omzetting

$$CO_2 + C \rightarrow 2CO$$

was aangetoond, moest worden nagegaan of zich tijdens dit proces ook de tegenovergestelde reactie

$$2CO \rightarrow CO_2 + C$$

had afgespeeld.

Terwijl de temperatuur nog steeds stijgende was, werd daartoe plotseling de CO_2-stroom verbroken en het in de porseleinen buis aanwezige gasmengsel door zuivere stikstof snel en volkomen uitgedreven. Eerst daarna lieten wij de temperatuur weer dalen en den oven tot de kamertemperatuur afkoelen.

De inhoud van het schuitje toonde op ondubbelzinnige wijze aan, dat de laatste reactie inderdaad had plaats gegrepen, want de kleur was grauw geworden, tengevolge van de afscheiding van grafiet, die door de geheele massa had plaats gegrepen.

Bij herhaling van de proef werd hetzelfde resultaat verkregen, zoodat wij meenen hiermede voor het eerst een *direct* bewijs geleverd te hebben voor de juistheid van de *dynamische* opvatting omtrent een omkeerbare reactie.

Amsterdam, Juni 1908.

Anorg. chem. Laboratorium der Universiteit.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt namens den Heer A. SMITS een mededeeling aan getiteld: „*De P-T-X-ruimtefiguur voor een stelsel van twee komponenten, die in den vasten of vloeiendkristallijnen toestand in alle verhoudingen mengbaar zijn.*"

Bij het ontwerpen van de ruimtefiguur in den titel hierboven vermeld blijkt het merkwaardige hierin gelegen te zijn, dat drie tweebladige oppervlakken elkaar moeten snijden n.l. het damp-vloeistofblad, het damp-mengkristalblad en het vloeistof-mengkristalblad, waarvan wij weten, dat zij, voor het eenvoudigste geval, d.w.z. voor het geval deze bladen geen maximum of minimum bezitten, groote overeenkomst in vorm met elkaar vertoonen.

Om nu na te gaan hoe deze snijding plaats heeft, beschouwen wij allereerst een p-x-figuur overeenkomende met een temperatuur beneden de tripelpuntstemperatuur van beide komponenten.

Stellen wij voorop dat, zooals gebruikelijk is, A de komponent met de hoogste dampspanning (en de laagste tripelpuntstemperatuur)

voorstelt, dan bezit dit p-x-diagram een gedaante als in fig. 1 is aangegeven.

Op de lijn $a\,c\,b$ liggen de mengkristalphasen, welke koëxisteeren met de dampphasen, die op de lijn $a\,d\,b$ gelegen zijn.

Tusschen deze twee krommen ligt het gebied voor damp + mengkristal, $G+F$, terwijl zich boven de lijn $a\,c\,b$ het gebied voor de mengkristallen F, en beneden $a\,d\,b$ het gebied van den damp G, bevindt. Kiezen wij nu een temperatuur boven de tripelpuntstemperatuur van A, doch beneden die van B en nemen wij een oogenblik aan, dat bij de beschouwde temperatuur A in vasten, dus *overstolten* toestand voorkomt, dan krijgen wij een p-x-figuur als aangegeven wordt door $a\,f\,b\,g\,a$ in fig. 2 welke geheel analoog is aan die in fig. 1 geteekend.

Daar vast A bij deze temperatuur echter metastabiel is, zal een deel van deze p-x-figuur aan den A-kant metastabiel zijn en nu is het de vraag, welke stabiele evenwichten in de plaats van deze metastabiele evenwichten treden.

Dit zien wij oogenblikkelijk in, wanneer wij ons vervolgens het geval denken, dat beide komponenten bij de beschouwde temperatuur vloeibaar zijn, en B dus in *oversmolten* toestand voorkomt.

In dit geval zou een p-x-figuur gevonden worden, zooals door $c\,l\,d\,g\,c$ wordt aangegeven, waarbij valt op te merken, dat d beneden b, en c boven a gelegen is, daar b en c de dampspanning aangeven van metastabiele toestanden van A en B.

De lijn $c\,l\,d$ geeft hier de vloeistofphasen aan, die met dampphasen op $c\,g\,g$ koëxisteeren.

Daar nu de p-x-figuur $a\,f\,b\,g\,a$ aan den kant van A en $c\,l\,d\,g\,c$ aan den kant van B metastabiel is, is het nu reeds duidelijk dat de stabiele p-x-figuur het linksche deel van de eerste en het rechtsche deel van de laatste p-x-figuur zal bevatten, welke deelen aan elkaar zullen aansluiten daar, waar een dampphase gelijktijdig met een vloeistofphase en met een mengkristalphase koëxisteert.

Zooals uit de teekening volgt, snijden de damptakken van beide p-x-figuren elkaar in g, zoodat g een damp is, die niet alleen koëxisteert met de vloeistof l, doch ook met de mengkristalphase f.

Het bij konstante temperatuur nonvariante driephasenevenwicht $G+L+F$ vormt dus den overgang tusschen de reeks van mengkristalphasen $a\,f$ en de reeks vloeistofphasen $l\,d$, die bij een reeks van drukkingen met dampphasen van verschillende samenstelling kunnen koëxisteeren.

Boven de lijn $d\,l$ ligt het gebied van de vloeistof L en boven de lijn $a\,f$ bevindt zich het gebied van de mengkristallen F. Beide

gebieden zijn van elkaar gescheiden door een gebied van vloeistof + mengkristallen, dat tusschen de lijnen lq en fp gelegen is.

Teekenen wij nu eenige p-x-figuren overeenkomende met verschillende temperaturen in dezelfde grafische voorstelling, te beginnen met de tripelpuntstemperatuur van A en eindigende met de tripelpuntstemperatuur van B, dan krijgen wij hetgeen in fig. 3 is aangegeven.

Figuur ab komt overeen met de tripelpuntstemperatuur van A en a_2b_2 met die van B, terwijl de p-x-figuren a_1b_1 en a_3b_3 betrekking hebben op tusschengelegen temperaturen.

Uit deze verzameling van p-x-figuren zien wij, dat, wanneer wij de overeenkomstige punten van de verschillende driephasendruklijnen glf met elkaar vereenigen, een driephasenstrook ontstaat, die uit twee tweephasenstrooken is saamgesteld, ten eerste uit de tweephasenstrook voor de evenwichten tusschen damp en vloeistof en ten tweede uit een tweephasenstrook voor de koëxistentie van vloeistof en mengkristallen.

Denken wij ons de met verschillende temperaturen overeenkomende p-x-figuren achter elkaar geplaatst, dan geven de damplijnen een dampblad, de vloeistoflijnen een vloeistofblad en de mengkristallijnen een mengkristalblad.

De lijn bgg_1a_3 geeft de snijding aan van het dampblad van de mengkristallen [1]) met het dampblad van de vloeistofphasen, de lijn bll_1a_3 die van het vloeistofblad van de mengkristallen met het vloeistofblad van de dampphasen, terwijl bff_1a_3 de lijn aangeeft, volgens welke het mengkristalblad van de vloeistofphasen het mengkristalblad van de dampphasen snijdt.

Dit alles wordt volkomen duidelijk, wanneer wij de ruimte-voorstelling, fig. 4, beschouwen en wel *rechts* van het vlak $v_1\,v_2\,v_3\,v_4$.

S_A is het tripelpunt van den komponent A

S_B „ „ „ „ „ „ B

cS_A is de dampspanningslijn van vast A

S_AK_A „ „ „ „ vloeibaar A eindigende in het kritisch punt K_A.

aS_B is de dampspanningslijn van vast B en

S_BK_B „ „ „ „ vloeibaar B eindigende in het kritisch punt K_B.

$S_AS'_A$ is de smeltlijn van A en $S_BS'_B$ is de smeltlijn van B.

$S_A\,g\,S_B\,f\,S_A$ is de reeds beproken driephasenstrook, en de tusschen de tripelpunten S_A en S_B geteekende p,x-doorsnede laat zien, dat

[1]) Onder het dampblad van de mengkristallen is hier te verstaan het dampblad, dat bij het mengkristalblad behoort.

$S_A g S_B$ de damplijn, $S_A l S_B$ de vloeistoflijn, en $S_A f S_B$ de mengkristallijn is.

Op de tweephasenstrook $S_A g S_B l S_A$ liggen de damp- en vloeistofphasen, die met mengkristallen in evenwicht zijn, en op de tweephasenstrook $S_A l S_B f S_A$ bevinden zich de vloeistof- en mengkristalphasen, die met damp kunnen koëxisteeren.

Op deze laatste tweephasenstrook rust het tweebladig oppervlak voor mengkristal en vloeistof, welk oppervlak over 't algemeen zeer steil zal loopen. In de ruimtefiguur is aangenomen dat, zooals ook in den regel het geval is, $\frac{dp}{dt}$ van de smeltlijnen van de komponenten aanvankelijk positief is, waardoor genoemd tweebladig oppervlak in den beginne bij hoogeren druk naar hoogere temperaturen loopt, hetgeen hier op overdreven wijze is aangegeven.

Een gevolg van deze ligging is dit, dat, zooals in de doorsnede bij een temperatuur, tusschen de tripelpuntstemperaturen van A en B gelegen, is aangegeven, het gebied voor vloeistof en mengkristal boven een zekeren druk, r, ophoudt te bestaan, zoodat de drie gebieden van tweephasen-evenwichten, mengkristal-damp, vloeistof-damp en mengkristal-vloeistof geheel zijn begrensd.

Het is duidelijk, dat, wanneer voor beide smeltlijnen $\frac{dp}{dt}$ negatief is, het punt r niet liggen zal op de smeltlijn van den komponent A, doch op die van B.

Doet zich het geval voor, dat de beide komponenten vóór dat zij smelten in den vloeiendkristallijnen toestand overgaan, dan wordt de ruimtefiguur van zóó'n stelsel voor het eenvondigste geval aangegeven door de geheele figuur 4.

Het linksche gedeelte komt dan geheel overeen met de ruimtefiguur van Bakhuis Roozeboom, waarbij dan O_A en O_B niet de smeltpunten onder dampdruk, doch de overgangspunten van de beide komponenten onder dampdruk voorstellen, d. w. z. de punten, waar de gewoon gekristalliseerde toestand onder den druk van zijn damp in den vloeiendkristallijnen toestand overgaat.

Snijdt men deze ruimtefiguur door een vlak van konstanten druk, dan krijgt men, wanneer deze druk althans hoog genoeg gekozen wordt, de eenvoudigst denkbare T-X-figuur van een stelsel van twee komponenten, waarvan elk een stabiele vloeiendkristallijne modificatie bezit.

De andere mogelijke gevallen laten zich gemakkelijk uit deze ruimtefiguur afleiden.

Amsterdam Juni 1908. *Anorg. Chem. Laboratorium der Universiteit*

Plantkunde. — De Secretaris biedt namens den Heer TH. VALETON, te Buitenzorg, eene mededeeling aan: „*Lindeniopsis. Een nieuw subgenus der Rubiaceae.*"

Ter gelegenheid van een dienstreis door het eiland Billiton in Maart 1907 werd door den Heer HAM, Inspecteur van het Boschwezen in Ned. Indië, een kleine doch niet onbelangrijke collectie herbarium bijeengebracht welke hij mij ter bewerking afstond.

Het belangrijke van deze verzameling berust voornamelijk hierop, dat zij is bijeengebracht op terreinen, die, in den Indischen archipel uiterst zeldzaam, floristisch nog nagenoeg onbekend zijn. Het zijn de zoogenaamde „*padang*" terreinen, (zie VERBEEK in Jaarboek Mijnwezen 1897, p. 60 en 61). De bodem dezer gronden bestaat uit jonge losse sedimenten van recenten oorsprong n.l. kwartszand en klei, beide dikwijls ijzer- en mangaanhoudend, maar verkrijgt zijn eigenaardig karakter door het voorkomen van een gesteente dat door de Chineezen *fo sau kak* genoemd wordt en bestaat uit kwartszand dat door organische zuren tot een tamelijk vasten donkerbruinen zandsteen is verbonden.

„Deze *padang*terreinen zijn gekenmerkt door een schaarschen en bijzonderen plantengroei, een gevolg van het geringe water doorlatende vermogen van den „*fo sau kak*" waardoor vlak padangterrein na zware regens dikwijls onder water staat, en de wortels der planten, die moeilijk in den harden „*fo sau kak*" kunnen dringen, verrotten en afsterven." (VERBEEK l.c.).

Behalve op Billiton komen deze padangterreinen ook voor op Banka tusschen Doeren en Boekit (VERBEEK l.c.). Van andere deelen van den Archipel schijnen zij niet nader bekend te zijn. De voornaamste dezer terreinen bevinden zich in het Noorden en Noordoosten van het eiland tusschen Boeding en Manggar en werden daar door den Heer HAM floristisch onderzocht.

Aan mondelinge mededeelingen alsmede aan het Reisjournaal dat de Heer HAM mij welwillend ter inzage afstond ontleen ik het volgende:

Het voorkomen der padang terreinen is niet overal hetzelfde.

De Heer HAM onderscheidt *gras padang* dikwijls rijk aan grint, waar grassen en cypergrassen de overhand hebben, *varen padang* waar varens (*Pteris aquilina L.*, *Nephrolepis acuta* PRESL.), bijna de geheele begroeiing vormen, slechts gemengd met *Xyris microcephala* HASSK., *Fimbristylis* spec., *Melastoma* spec., *Calophyllum pulcherrimum* WALL., *Psychotria viridiflora* BL. en *zand padang*, waar de grond uit verblindend wit kwartszand bestaat. De witte laag heeft

een afwisselende dikte van $^1/_2$—5 cm., daaronder grijs blijkbaar door humus, soms dadelijk grijs, waar op den bodem fijne zwarte humus of mossen voorkomen. De begroeiing vormt nergens een aaneengesloten geheel of een zode. Groepen lage en hoogere struiken en dan in den regel in het midden hoogere struiken of kleine boomen, wisselen af met lagere begroeiing, deze echter ook steeds pleksgewijs of afzonderlijke pollen vormend, zoodat men overal het witte zand er tusschen door ziet, en dit op vele plaatsen zelfs de overhand heeft. Van de hier verzamelde planten worden de volgende als karakter gevende vermeld:

Drosera Burmanni VAHL. in de vochtigste gedeelten, op een afstand gezien donkerroode vlekken vormend, dikwijls op kleine zandzuiltjes geplaatst. *Fimbristylis* spec., *Rhynchospora* spec., *Xyris microcephala* HASSK. en *Xyris bancana* MIQ.; zeldzamer *Salomonia oblongifolia* D. C., *Lindernia stemodioides* MIQ., *Thuarea sarmentosa* PERS.

Van de hoogere meer struikachtige planten vallen in 't oog: *Baeckea frutescens* L., die op laaggelegen padangs meer dan de helft van de begroeiing vormt en buitengewoon aan de Calluna der Europeesche heidevelden doet denken, *Jambosa buxifolia* MIQ., *Leptospermum flavescens* SM., *Leucopogon malayanus* JACK., *Vaccinium malaccense* WIGHT, *Cratoxylon glaucum* KORTH., *Calophyllum pulcherrimum* WALL., *Timonius* spec., *Garcinia bancana* MIQ., *Syzygium variifolium* MIQ., de drie laatste boomachtig.

Op de laagst gelegen padangs ten zuiden van Manggar en bij Boeding, waar *Baeckea frutescens* met *Fimbristylis* spec. het hoofdbestanddeel vormt, worden nog *Ischaemum* spec., *Archytaea Vahlii* CHOISY, *Wormia suffruticosa* GRIFF., *Melaleuca minor* SM. en een niet bestembare *Eugeniasoort* opgemerkt. Voorts mossen en kortmossen. Verder werden op deze terreinen verzameld *Rhodomyrtus tomentosa* WIGHT, *Nepenthes* spec., *Tristamia obovata* R. BR., *Dischidia* spec. *Bromheadia palustris* LINDL. [Orchidea], *Isachne australis* R. BR. *Burmannia bancana* MIQ., een *Lucinaea* soort, die waarschijnlijk nieuw is en eindelijk een nieuwe Rubiacee, waarover ik hier een mededeeling wensch te doen.

De hier beschreven formatie heeft door het overwegend voorkomen der Calluna-achtige *Baeckea frutescens* een oppervlakkige overeenkomst met de zandige en drassige heidevelden in Noord-Europa. Reeds JUNGHUHN spreekt in zijn beschrijving der Battaklanden I bl. 158 van een Erica, die boven de woudzone met andere houtige Myrtaceae de flora van het hooggebergte kenmerkt en bedoelt hiermede ongetwijfeld *Baeckea frutescens*. Van Zuid-China en de Philippijnen tot in Nieuw Guinea, waar BECCARI haar aan de Geelvinkbaai

(zeehoogte?) en WICHMANN op den G. Siëp op ongeveer 800 M. vond, strekt zich het verspreidingsgebied dezer op Java ontbrekende soort uit, wier naaste verwanten (talrijke *Baeckea*-soorten) Australië bewonen. Overal kenmerkt zij de physiologisch droge hoogvlakten, en bereikt slechts zelden zooals hier de laagvlakte. Ook de *Drosera* en Cypergrassen strekken om deze gelijkenis met de heidevelden te vermeerderen.

Door de overige vegetatie, waarin de sclerophylle en sclerocarpe Myrtaceen een belangrijk aandeel hebben, komt echter de formatie veel nader bij die welke door SCHIMPER (Pflanzengeogr. p. 538) „*Hartlaubformation*" genoemd wordt, en waarvan hij een aantal gebieden beschrijft, voorkomende in de omgeving der Middellandsche Zee, in Californië, Chili, in Zuid Afrika en in Zuid-Australië. Deze gebieden zijn alle gelegen in de warme gematigde luchtstreek en gekenmerkt door de droge en heete zomers, afwisselend met vochtige winters. Climatologisch is er dus tusschen deze en de padang-formatie van Banka en Billiton, waar het nagenoeg het geheele jaar regent, weinig overeenkomst. In de gesteldheid van den bodem is daarentegen wel overeenkomst met die der Zuid-Australische „*scrublands*" beschreven door SCHOMBURGK in Flora of South-Australie 1875. (Zie SCHIMPER l. c. p. 559).

Niet te betwijfelen valt hier de overwegende invloed van den bodem op het karakter der formatie, een verschijnsel dat volgens SCHIMPER in de tropen betrekkelijk zeldzaam is, en nog slechts weinig onderzocht. (Zie SCHIMPER l. c. p. 405. Edaphische Wirkungen in den Tropen).

Met geen enkel der in dat hoofdstuk opgenoemde vegetatie-beelden en formaties komt de padang-formatie ook maar eenigermate overeen. Alleen met de flora der tropische hooggebergten en met de „*Hartlaubformation*" laat zij zich zooals gezegd is eenigermate vergelijken.

Wat nu de verspreiding der boven opgenoemde door den Heer HAM verzamelde planten betreft, welke wel waarschijnlijk geen volledig, maar toch zeker een zeer typisch beeld van deze vrij armoedige flora opleveren; zoo valt al dadelijk in 't oog dat geen enkele der verzamelde soorten, met uitzondering van een paar zeer verspreide, van het strand ingekropen grassen, *Thuarea sarmentosa* en *Isachne australis*, alsmede van de beide pantropische varens en van *Psychotria viridiflora*, die ook niet op de typische zandpadang zijn aangetroffen, op Java voorkomt. Een wijde verspreiding van Malacca tot aan Australië door het noordelijk gedeelte van den archipel, met voorbijgang van Java (waarschijnlijk tot en met Timor) hebben, behalve *Baeckea frutescens*, ook nog *Leptospermum flavescens*, *Rhodomyrtus tomentosa*, *Melaleuca minor*, *Drosera Burmanni*, *Salomonia*

oblongifolia, *Bromheadia palustris*; van Malacca en Borneo zijn bekend: *Calophyllum pulcherrimum*, *Garcinia bancana*, *Vaccinium malaccense*, *Leucopogon malayanus*, *Archytaea Vahlii*, *Wormia suffruticosa*. Uitsluitend van Banka en Billiton zijn bekend: *Jambosa buxifolia*, *Syzygium variifolium*, *Tristania obovata*, *Schima bancana*, *Xyris bancana* en *Lindernia* (Vandellia) *stemodioides*, terwijl *Cratoxylum glaucum* en een *Lucinaea* spec. nova alleen van Borneo bekend waren. Twijfelachtig zijn in dit opzicht de nog onbestemde *Eugenia*, *Nepenthes*, *Dischidia* en *Ischaemum*, en enkele andere.

Endemisch, voor zoover onze tegenwoordige kennis strekt, is alleen de thans te beschrijven nieuwe soort. Over de afmetingen en het uiterlijk dezer plant ontbreken ongelukkig de gegevens, maar zij behoort tot de lage struikachtige, $^3/_4$—2 meter hooge bewoners der lage zand-padang, waarvan boven gesproken is en onder deze tot de aan individuen arme soorten. De dikwijls 6 dM. lange opgerichte roedevormige takken, met kleine stijve, doornachtig-spitse, opstaande bladeren, aan den top de dicht grijsbehaarde bloeiwijzen dragende, duiden op een sterk xerophiel karakter.

Bij het eerste onderzoek scheen deze soort mij een geheel nieuw geslacht te vormen. Zij behoort tot den tribus der *Cinchoneae* van de onderfamilie der *Cinchonoideae* (K. Schumann) en hierin tot den subtribus der *Hillieae*. Door toepassing van den door K. Schumann samengestelden sleutel (Naturl. pflanz. fam. IV 14 p. 42) komt men nu niet tot een bepaald geslacht, maar wel in de onmiddellijke nabijheid, hetzij van *Cosmibuena* Ruiz en Pavon, hetzij van *Coptosapelta* Korth., al naarmate men aanneemt dat de stijl weinig of veel langer is dan de kroonbuis. Een nadere vergelijking met het geslacht *Cosmibuena* waartoe een klein aantal epiphytische heesters uit Zuid- en Midden-Amerika behooren, toont echter dadelijk belangrijke verschillen in bouw van kelk, meeldraden, stempel en wijze van openspringen der vruchten, zoodat van een vereeniging met dit geslacht geen kwestie zijn kan, ofschoon in den habitus en de vorm der bloemen de overeenkomst grooter is dan met *Coptosapelta*. Wat dit laatste geslacht betreft hiervan wordt in den bedoelden sleutel opgegeven. „stijl 4-hoekig en behaard", zoodat men, zich strikt hieraan houdende, voor onze soort waar de stijl rolrond en onbehaard is, gedwongen zou zijn een nieuw geslacht op te stellen. De verdere kenmerken van *Coptosapelta* in de geslachtsbeschrijving nalezende, vindt men nog de navolgende verschillen: Kelk klein napvormig vijftandig bij *Coptosapelta*; bij de nieuwe soort veel langer dan de kelkbuis, tot aan den voet vijfdeelig met lancetvormige spitse opstaande slippen. — Kroonbuis zeer kort, even lang of korter dan

de zoomlobben met behaarden keelmond bij *Coptosapelta*; bij de nieuwe soort 4—6 cm. lang, dun en recht, veel langer dan de zoomslippen met onbehaarden keelmond. — Helmknoppen bijna zoo lang als de zoomslippen en van achteren dicht behaard, met diep gedeelden voet bij *Coptosapelta*; hier veel korter dan de zoomslippen, onbehaard en met tweelobbigen voet. Zaden met een regelmatig gefransden vleugel bij *Coptosapelta*; hier door een gaven vleugel omgeven; eindelijk wat de habitus betreft zijn de beide bekende soorten van *Coptosapelta* hoogklimmende vrij groot-bladige heesters met veelbloemige hangende pluimen van kleine bloemen, terwijl de nieuwe soort een kleine opgerichte heester is met opgerichte armbloemige bijschermen en in 't oogvallende bloemen.

Oppervlakkig scheen er dus reden genoeg om voor deze nieuwe soort een nieuw geslacht op te stellen en wegens de groote overeenkomst in uiterlijk, in bladeren, bloeiwijze, kelk en bloemkroon met het Amerikaansche geslacht Lindenia, dat tot den tribus der *Rondeletieae* behoort, gaf ik hieraan den naam *Lindeniopsis*.

Een meer nauwkeurige vergelijking met de op Java voorkomende *Coptosapelta flavescens* KORTH, deed mij echter besluiten dit nieuwe geslacht weer in te trekken en de nieuwe soort tot het geslacht *Coptosapelta* te brengen. Eenige der uit de literatuur afgeleide punten van verschil bleken op fouten in de bestaande beschrijvingen te berusten. Zoo is de stijl bij *C. flavescens* niet *vier-kant* en *behaard*, zooals SCHUMANN opgeeft, maar behalve aan den top rolrond en onbehaard even als bij de nieuwe soort; de kelk is niet napvormig, maar diep 5-deelig en gelijkt, afgezien van de geringe grootte, op die van de nieuwe soort, en de keelmond is niet behaard maar geheel kaal. Hiermede vervallen dus al een gedeelte der opgegeven verschilpunten. Let men verder op den volmaakt gelijken bouw van eierstok en vrucht bij beide, op den zeer bijzonderen stempel, die in tegenstelling met de verwante geslachten, niet tweelobbig maar volkomen ongedeeld is, over zijn geheele behaarde oppervlakte de stempel-papillen draagt en het stuifmeel recipieert, op de helmknoppen, op geheel gelijksoortige wijze gebouwd en ingeplant, en, wat zeer belangrijk is op het stuifmeel dat bij de nieuwe soort, evenals bij *C. flavescens* een netvormig-verdikte, wijdmazige, exine heeft en hierin, afgaande op de afbeeldingen in Flora brasiliensis, van de overige geslachten der *Hillieae* totaal verschilt, dan kan er geen twijfel zijn, dat onze nieuwe soort tot het geslacht *Coptosapelta* moet gebracht worden, maar daarin een speciaal monotypisch ondergeslacht vormt.

Als een morphologische bijzonderheid, die de verwantschap met

C. flavescens bevestigt wil ik hier nog wijzen op de met de kelklippen afwisselende klieren, welke zoover ik weet nog niet bij een andere Rubiacee zijn beschreven (tenzij misschien bij *Dichilanthe* HOOK.).

Zij zijn in structuur gelijk aan de op darmklieren gelijkende colleteren welke bij dit geslacht evenals bij de meeste Rubiaceen aan de binnenzijde van den voet der stipulae geplaatst zijn [1]) en in den bladvoet ook bij Apocynaceae en Loganiaceae worden aangetroffen. Men vindt ze bij de nieuwe soort evenals bij *C. flavescens* ten getale van één of twee afwisselend met de kelkslippen; bij de laatste soort zijn zij echter slechts $^1/_4$ m.m. lang, en tot dusver door de onderzoekers over 't hoofd gezien; bij de nieuwe soort zijn ze ruim 1 tot 1.5 m.m. lang.

Wellicht zullen zij bij nader onderzoek ook nog bij andere Rubiaceae gevonden worden. Klaarblijkelijk moeten zij als rudimenten van stipulae der kelkbladen worden opgevat.

Coptosapelta KORTH. Descriptio nova: Calycis tubus ellipsoideus, limbus eo nunc brevior nunc duplo longior, persistens, dentatus vel ad basin usque 5-partitus, segmentis erectis imbricatis cum glandulis parvis stipularibus erectis teretibus singulis vel binis alternantibus. Corolla coriacea tomentosa, hypocraterimorpha, tubo brevi vel longo, gracili, tereti, intus glabro vel fauce hirta, limbi lobi obovato-lineares aestivatione contorti. Stamina 5 ori corollae inserta, filamentis brevibus subulatis; antherae oblongae vel lineares apice apiculatae, basi subbilobae vel bipartitae glabrae vel dorso hirsutissimae, dorso prope basin affixae, patentes demum saepe tortae. Pollinis granula subglobosa, poris 3?, insigniter reticulata. Discus carnosus cupularis. Ovarium biloculare. Stylus teres glaber elongatus corollae tubum aequans apice exsertus. Stigma magnum integrum, fusiforme velclavatum, in alabastro per longitudinem striatum, puberulum; ovula in loculis numerosa, placentis magnis septo affixis peltatis linearibus apice et basi liberis dense imbricatim affixa, peltata, marginata, ascendentia. Capsula obovoidea lateraliter compressa obsolete costata calyce longius persistente coronata, glabrescens ad medium versus loculicide bivalvis, vel demum saepe quadrivalvis. Semina placentae cylindricae, subcarnosae, loculum implenti extus affixa, peltata, imbricata, erecta, testa membranacea in alam hyalinam nunc insigniter fimbriatam nunc subintegram crenulatam radiatim striulatam expansa, albumine carnoso; embryo rectus parvus radicula tereti infera.

---

[1]) Zie SOLEREDER, Anat. Charakt. der Rubiaceae 1893, p, 179.

Frutices nunc alte scandentes nunc parvi erecti, canescenti-sericeo-villosi, ramulis tetragonis foliis coriaceis, subtus ± villosulis. Stipulae interpetiolares parvae ovato-trigonae.

Cymae terminales et in axillis superioribus trichotomae nunc densiflorae et ample paniculatae pendentes, nunc pauciflorae erectae. Flores brevissime pedicellati, bracteolis (prophyllis) 2, pedicello insertis calyce appressis eoque brevioribus instructi, nunc parvi nunc conspicui.

Subgenus I *Eucoptosapelta* VAL. Calycis limbus ovario brevior. Corollae tubus brevis, limbi lobos aequans vel illo brevior, faucis orificium glabrum vel hirsutum. Antherae lineares, basi bifidae, dorso dense villosae, demum tortae. Stigma elongato-fusiforme vel quadrangulare. Seminum ala fimbriata. Frutices alte scandentes ramulis subteretibus. Foliis majusculis patentibus subtus ad nervos villosis. Paniculae terminales foliatae multiflorae, densiflorae, pendentes.

1. *C. flavescens* KORTH., (*Stylocoryne racemosa* haud CAVANILLES, MIQ.; *St. tomentosa* BL.): Corollae tubus limbi lobos circiter aequans, faux glabra. Calycis tubus brevis.

Habitat: Malacca, Burma, Borneo, Java.

2. *C. Griffithii* HOOK.: Corollae tubus limbi lobis multo brevior. Faux dense hirsuta. Calycis tubus elongatus.

Habitat: Malacca, Singapore.

Subgenus II. *Lindeniopsis* VAL. Calycis limbus ovario plus duplo longior, ad basin usque partitus segmentis erectis lanceolatis acutis. Corollae tubus gracilis lobos pluries superans, faucis orificio glabro. Antherae oblongae basi bilobae, glabrae. Stigma magnum, clavatum. Seminum ala subintegra.

Frutices parvi erecti, ramulis acute tetragonis erectis elongatis, foliis parvis erectis rigide-coriaceis, spinuloso-apiculatis subtus appresse villosis. Cymae terminales et in axillis superioribus trichotomae, pauciflorae, erectae.

3. *C. Hammii* VAL. Characteres subgeneris.

Habitat: Biliton.

Plantkunde. — De Heer S. H. Koorders biedt een mededeeling aan: *„Bijdrage N°. 1 tot de kennis der Flora van Java."* (3de vervolg)[1]).

§ 6. Nadere gegevens over Oreiostachys Pullei Gamble.

§§. 1. Addenda et emendanda van p. 674—686 der „Proceedings".

De door den heer Gamble aan mij toegezonden drukproefcorrecties van de op 24 April 1908 als „Proceedings" verschenen engelsche uitgave van het Verslag v. d. Gew. Verg. d. K. A. v. W. te Amst. werden, ofschoon zij nog in April j.l. door den heer G. aan mij uit Engeland verzonden waren, tot mijn leedwezen te laat op de drukkerij ontvangen om nog in genoemde publicatie afgedrukt te kunnen worden. Die in manuscript alle van April j.l. dateerende en van de hand door den Heer J. S. Gamble verstrekte drukproef-verbeteringen laat ik thans hier volgen, onder dankbetuiging voor de toezending:

p. 683 regel 11 v. o.: *achter* Kurz, *voeg bij:* Munro in Trans. Linn. Soc. London. XXVI. 146.

p. 683 regel 4 v. o.: vóór (Gamble msc.) *voeg bij*: and possibly so establishing a connection between it and the *Schizostachyum*, the description of which by Hasskarl and Kurz are somewhat imperfect".

p. 683 regel 4 v. o.: *achter* additional, *voeg bij*: material.

p. 684 regel 16 v. o.: *vóór* conspecific, *voeg bij:* very probable.

§§ 2. Over de door den Heer K. A. R. Bosscha ontdekte vruchten van Oreiostachys Gamble.

Op p. 656 van het (hollandsche) Verslag v. d. Gew. Vergad. der K. A. v. W. te Amsterdam van 28 Februari 1908 werd er door mij de aandacht op gevestigd, dat het mogelijk zoude zijn om de soort in loco met behulp van den constanten inlandschen naam te doen opsporen, o. a. ter verkrijging der nog aan de wetenschap onbekend gebleven vruchten.

Thans heb ik het voorrecht, onder dankbetuiging voor de toezending, hieronder over de in de literatuur nog niet vermelde inzameling der vruchten, en over een paar andere punten mede te kunnen deelen hetgeen door mij ontleend wordt aan een schrijven van

---

[1]) Vervolg van p. 814 v. h. Verslag v. d. Gew. Vergad. Wis- en Natuurk. Afd. der Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam v. 9 April 1908,

Dr. TH. VALETON gedateerd Buitenzorg 12 Mei 1908 en aan de daarbij gevoegde bijlagen.

„Hierbij ingesloten zend ik u een drietal vruchten van *Oreiostachys* GAMBLE, waarvan mij in November 1903 door den Heer K. A. R. BOSSCHA een 10-tal werden toegezonden, nadat ik in Mei van dezelfde vindplaats bloemen had ontvangen. Ik stel u voor om deze aan den Heer GAMBLE te zenden om zijne door u gepubliceerde geslachtsbeschrijving daarmede te voltooien. Tevens zend ik u eenige aanteekeningen betreffende waarnemingen in loco door den Heer BOSSCHA en verder een en ander van de literatuur, die reeds over deze soort bestaat." (Dr. VALETON msc. 12 Mei 1908).

De op de bedoelde waarnemingen van den Heer BOSSCHA in het aangehaalde schrijven van 12 Mei j.l. betrekking hebbende alinea's laat ik hier woordelijk volgen:

„De Heer BOSSCHA maakte er mij opmerkzaam op, dat de plant op twee wijzen bloeit, n.l. eensdeels aan het eind van dichtbebladerde takjes [1]), anderdeels dicht bij den stengel aan geheel bladerlooze zijtakken."

„Tevens deelde de Heer BOSSCHA mij mede dat bij zijn komst op Malabar in het jaar 1896 aan de oude in de bosschen door en door bekende inlanders in de streek waar zij voorkomt het feit, dat de bamboe ooit gebloeid had niet bekend was. In 1902 is het bloeien begonnen en heeft zich tot aan 1906 vrij geregeld herhaald. Sedert is de soort daar op de meeste plaatsen afgestorven en is zij tegenwoordig bepaald schaarsch. Echter is zij dit jaar nog weer bloeiend op Taloen (onderneming op de Malabar) aangetroffen Mei 1908."

„Nu echter beginnen zich overal jonge planten te vertoonen klaarblijkelijk door zelfuitzaaiing ontstaan."

„Dit verschijnsel komt dus voor een deel overeen met wat ook voor andere bamboe-soorten in Britsch-Indië is waargenomen, ofschoon de bloeiperiode hier wel bijzonder lang geduurd heeft." (Dr. VALETON msc. 12 Mei 1908).

Terwijl ik hier met bijzondere waardeering melding maak van het feit, dat door Dr. TH. VALETON de drie vruchten en de bedoelde gegevens te mijner beschikking gesteld zijn, is het wellicht overbodig hier mede te deelen, dat ik dadelijk aan het bovenstaande verzoek voldaan heb en de drie op 17 Juni j.l. door mij ontvangen vruchten dadelijk naar den Heer GAMBLE doorgezonden heb.

---

[1]) De Heer GAMBLE en ik hadden tot dusver nog geen beschikking over deze dichtbebladerde, aan het eind bloeiende takken, maar beschikten alleen over de door den Heer GAMBLE beschrevene steriele bebladerde takken van JUNGHUHN en over nagenoeg bladerloos bloeiende twijgen, zonder vruchten van PULLE.

Ofschoon nu het onderzoek van deze vruchten nog niet beeindigd is, en later daarop teruggekomen zal worden, zoodra van den Heer GAMBLE de aanvulling van zijne diagnose ontvangen zal zijn, zoo schijnt mij toch het feit der ontdekking van de vruchten van de meerbedoelde bamboesoort door den Heer K, A. R. BOSSCHA van zoo veel belang, dat ik gemeend heb reeds thans hier op die ontdekking de aandacht te moeten vestigen. Want uit het bovenaangehaalde schrijven van Dr. VALETON blijkt mij, dat te Buitenzorg de tot op heden in de literatuur onbekend gebleven vruchten van *Oreiostachys* GAMBLE met de bloemen reeds te Buitenzorg door Dr. V. van den Heer BOSSCHA ontvangen waren geworden, vóórdat de Heer GAMBLE er in slaagde om in de door Dr. PULLE verzamelde bloemen het type van een nieuw geslacht te ontdekken.

Hier moge nog vermeld worden, dat de bovenbedoelde door den Heer BOSSCHA ontdekte vruchten en de door Dr. PULLE in 1906 op den Wajang-Windoe verzamelde bloemen uit een en dezelfde streek, afkomstig zijn, n.l. van de vindplaats, die op p. 658 van dit Verslag omschreven is geworden.

Aangezien de door Dr. VALETON in de bijlage van zijn brief van 12 Mei j.l. aan mij als synoniemen beschouwde soortnamen (Bambusa elegantissima Hassk., enz.) en ook de overige daarop betrekking hebbende literatuur [behalve „MUNRO" (zie hierboven in §§ 1)], reeds in de op 24 April j. l. verschenen „Proceedings" op p. 683 regel 1—13 v.o. door den Heer GAMBLE en mij gepubliceerd zijn geworden, kan m.i., ter voorkoming van herhalingen,met het thans door mij hiermedegedeelde volstaan worden.

Ofschoon ik de bovenbedoelde, door den Heer K. A. R. BOSSCHA ingezamelde, dichtbebladerde, aan het eind bloeiende takken, waarop Dr. VALETON's hierboven geciteerde aanvulling van GAMBLE's diagnose gebaseerd is, niet te mijner beschikking gehad heb, kan ik deze door Dr. V. 12 Mei jl. aan mij gezonden aanvulling van GAMBLE's diagnose thans bevestigen, dank zij het heden (27. VI. '08) door mij van Dr. A. PULLE (Utrecht) ontvangen en dadelijk door mij naar den Heer GAMBLE doorgezonden aanvullingsmateriaal. Nu blijft voor de voltooing van de diagnose van *Oreiostachys* GAMBLE en voor eene beslissing betreffende het reeds door GAMBLE en mij in de Proceedings van 24 April j.l. uitgesproken vermoeden over de verdere synonymie van deze interessante soort, alleen nog de inzameling van de bladscheeden en het onderzoek van de tot dusver nòch door Dr. V. te Buitenzorg, nòch door mij te Leiden en Utrecht aangetroffen authentieke specimina van *Bambusa elegantissima* HASSK. en *Schizostachyum elegantissimum* KURZ gewenscht.

Leiden 27 Juni 1908.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt een mededeeling aan van Prof. Dr. J. D. VAN DER WAALS Jr.: „*Over de wet der moleculaire attractie bij electrische dubbelpunten.*"

(Mede aangeboden door den Heer P. ZEEMAN).

Reeds meermalen is de onderstelling uitgesproken, dat de moleculaire krachtswerking van electrischen oorsprong zou zijn. Een van de meest eenvoudige onderstellingen, die men kan maken, wanneer men tracht de moleculaire krachten op electrischen grondslag te verklaren, is, dat de moleculen zich zullen gedragen als electrische dubbelpunten. Dit is dan ook aangenomen en wel door REINGANUM[1]) en door SUTHERLAND[2]).

Daar de formule voor de krachtswerking tusschen electrische dubbelpunten, die met die voor elementair-magneten[3]) overeenkomt, den factor $\frac{1}{r^4}$ bevat (waar r den afstand der twee dubbelpunten voorstelt), concludeerden zij, dat de moleculen elkaar zouden aantrekken met een kracht evenredig aan $\frac{1}{r^4}$. Op grond hiervan wordt nog meermalen aangenomen, dat de onderstelling van een moleculaire krachtswerking evenredig met $\frac{1}{r^4}$ op grond van de electronen-theorie een zekere voorkeur verdient.

Bij nader inzien blijkt dit echter geheel ongegrond. Wanneer de dubbelpunten niet aan de richtende koppels, die zij op elkander uitoefenen, hebben gehoor gegeven, en dus nog op alle wijzen tenopzichte van elkaar georienteerd kunnen zijn, zullen zij even vaak afstootende als aantrekkende krachten op elkaar uitoefenen, zoodat de gemiddelde krachtswerking nul zal zijn. Wanneer wij daarentegen mochten aannemen, dat zij geheel door elkaar gericht waren, zouden zij elkaar aantrekken met krachten evenredig aan $\frac{1}{r^4}$. Het is echter duidelijk, dat de moleculen slechts gedeeltelijk aan elkaar's richtende koppels zullen hebben gehoor gegeven, en dat wel in hooger mate, naarmate zij elkander dichter genaderd zijn, waar zij zich in een zooveel sterker krachtenveld bevinden. Het gevolg hiervan is, dat een moleculaire aantrekking zal resulteeren, die sneller varieert dan

---

1) M. REINGANUM, Phys. Zeitschr. 2, 241 (1901); DRUDES Ann. 10, 334 (1903).
2) W. SUTHERLAND, Phil. mag. (6) 4, 625 (1902).
3) Verg. J. C. MAXWELL, A treatise on el. and magn. Art. 387.

$\frac{1}{r^4}$. Deze omstandigheid is aan REINGANUM en SUTHERLAND niet ontgaan. Zij hebben echter gemeend, dat de attractie-wet hierdoor slechts weinig van $\frac{1}{r^4}$ zou afwijken, zoodat zij die wet toch, als bij benadering juist, aannamen.

Schrijver dezes heeft in 1900 het vermoeden uitgesproken, dat de resulteerende aantrekkende krachten sneller dan $\frac{1}{r^7}$ zouden varieeren [1]). Wel is waar geldt die berekening voor een eenigszins andere onderstelling aangaande den aard der moleculen, namelijk dat deze zich niet als constante, maar als periodieke dubbelpunten zouden gedragen, maar dit verschil is waarschijnlijk niet essentieel, daar bij afstanden, die klein zijn vergeleken bij de golflengte (en deze voorwaarde is bij gasmoleculen bij drukken van de orde van één atm. vervuld) de attractiewet voor dergelijke vibratoren niet onwaarschijnlijk in hooge mate met die van constante dubbelpunten overeenkomt.

Het is thans mijn bedoeling meer nauwkeurig na te gaan, wat de wet der resulteerende krachtswerking voor constante dubbelpunten zal zijn. Wij zullen zien dat de attractie in dat geval inderdaad sneller varieert dan evenredig met $\frac{1}{r^7}$. Om een strenge behandeling van het vraagstuk mogelijk te maken, zullen wij aannemen, dat de volgende voorwaarden vervuld zijn:

1e. De moleculen zijn electrische dubbelpunten met constant moment m.

2e. De gemiddelde afstand is zoo groot, dat wij van wisselwerking van meer dan twee moleculen gelijktijdig mogen afzien.

3e. De snelheden en de versnellingen der moleculen hebben een relatief zoo geringe waarde, dat wij mogen aannemen, dat het electromagnetische krachtenveld met het electrostatische veld der dubbelpunten in hun oogenblikkelijken stand overeenkomt. Een gevolg van deze onderstelling is, dat de energie van het stelsel kan voorgesteld worden door

$$L - {}^1/_2 \Sigma m \mathfrak{E} \cos \varphi + C$$

waarin L voorstelt de levende kracht van het stelsel, $\mathfrak{E}$ de veldsterkte, φ den hoek tusschen de as van een molecuul en de electrische kracht daar ter plaatse en C een constante, die van de snelheid der moleculen en de plaats, waar zij zich bevinden, onafhankelijk is.

---

[1]) J. D. VAN DER WAALS Jr., Akad. Proefschrift, Amsterdam, p. 85.

Wanneer aan deze laatste voorwaarde voldaan is, zijn de statistisch-mechanische beschouwingen van BOLTZMANN en van GIBBS direct op ons vraagstuk van toepassing. Is er echter niet aan voldaan, dan houden deze beschouwingen op toepasselijk te zijn, en is het niet mogelijk het vraagstuk op te lossen, vóór dat een analoge statistische behandeling voor continua als het electromagnetisch veld is opgesteld; wat vooralsnog niet het geval is. Het is daarom ook nog onmogelijk het geval, dat de moleculen vibratoren zouden zijn, nader uit te werken, zoodat wij ons tot de onderstelling van constante dubbelpunten zullen moeten beperken.

Denken wij nu een molecuul A en een ander molecuul B, op een afstand r daarvan verwijderd. De hoek tusschen de as van A en den voerstraal noemen wij ϑ, dan is de electrische kracht, die in het punt, waar B zich bevindt door A wordt uitgeoefend:

$$\mathfrak{E} = \frac{m}{3r^3}\sqrt{4\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta} = \frac{m}{3r^3}\sqrt{3\cos^2\vartheta + 1}.$$

Zij weder φ de hoek tusschen $\mathfrak{E}$ en de as van B, dan is de potentieele energie van B:

$$-\frac{m^2}{3r^3}\sqrt{3\cos^2\vartheta + 1}\,.\cos\varphi$$

Volgens de bekende theorie van BOLTZMANN en GIBBS is nu de kans, dat de hoek φ ligt tusschen de grenzen φ en $\varphi + d\varphi$ en de hoek ϑ tusschen ϑ en $\vartheta + d\vartheta$:

$$\tfrac{1}{4}\sin\varphi\, d\varphi\,.\sin\vartheta\, d\vartheta\,.\, e^{\frac{m^2\sqrt{3\cos^2\vartheta+1}\,.\cos\varphi}{3r^3 t}},$$

waarin t tweemaal de gemiddelde kinetische energie voor één graad van vrijheid voorstelt of $\frac{2}{3}$ van de gemiddelde kinetische energie van de zwaartepuntsbeweging van een molecuul. Hieruit vinden wij voor de gemiddelde waarde van de potentieele energie, die een molecuul heeft wanneer het op een afstand r van een ander verwijderd is:

$$E = -\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{m^2}{3r^3}\sqrt{3\cos^2\vartheta + 1}\;\cos\varphi\,.\, e^{\frac{m^2\sqrt{3\cos^2\vartheta+1}\,.\cos\varphi}{3r^3 t}}\,\frac{1}{4}\sin\varphi\, d\varphi.\sin\vartheta\, d\vartheta.$$

of [1])

$$E = +\frac{t}{4}\int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^\pi \cos\varphi\,.\, de^{\frac{m^2\sqrt{3\cos^2\vartheta+1}\,.\cos\varphi}{3r^3 t}}$$

[1]) De herleiding van deze integraal ben ik verschuldigd aan Prof. Dr. W. KAPTEYN te Utrecht, wien ik hier gaarne mijn dank betuig voor zijn welwillende voorlichting.

Stellen wij hierin $\frac{m^2}{3r^3t} = c$ en $\sqrt{3\cos^2\vartheta + 1} = x$, dan vinden wij door partieele integratie:

$$E = -\frac{t}{4}\int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \left\{e^{cx} + e^{-cx} - \frac{1}{cx}(e^{cx} - e^{-cx})\right\}$$

Merken wij op dat $\int_0^\pi f(\vartheta)\, d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(\vartheta) + f(\pi - \vartheta)\}\, d\vartheta$, dan zien wij, dat wij in plaats van bovenstaande integraal tusschen 0 en π, mogen nemen twee keer die integraal tusschen 0 en $^1/_2\,\pi$. Wij kunnen nu x als onbekende invoeren, waarbij:

$$\cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2 - 1}, \quad \text{dus} \quad -\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

Verder is:

$$e^{cx} + e^{-cx} - \frac{1}{cx}(e^{cx} - e^{-cx}) = 4\left\{\frac{c^2x^2}{3!} + \frac{2c^4x^4}{5!} + \frac{3c^6x^6}{7!} \cdots\right\}$$

waardoor wij vinden:

$$E = -\frac{2t}{\sqrt{3}}\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}\left\{\frac{c^2x^2}{3!} + \frac{2c^4x^4}{5!} + \frac{3c^6x^6}{7!} + \cdots\right\}$$

$$= -\frac{t}{\sqrt{3}}\int_1^4 \frac{dy}{\sqrt{y-1}}\left\{\frac{c^2y}{3!} + \frac{2c^4y^2}{5!} + \frac{3c^6y^3}{7!} + \cdots\right\}$$

Stellen wij nu weer $\sqrt{y-1} = z$, dan nemen de verschillende termen de volgende gedaante aan:

$$\int_1^4 \frac{y^k dy}{\sqrt{y-1}} = 2\int_0^{\sqrt{3}} (1 + z^2)^k\, dz =$$

$$= 2\sqrt{3}\left\{1 + k\frac{3}{3} + \frac{k(k-1)}{2!}\frac{3^2}{5} + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\frac{3^3}{7} + \cdots\right\}$$

Zoo vinden wij voor E een reeks van den volgenden vorm:

$$E = -\frac{tc^2}{\sqrt{3}}\left\{\frac{p_1}{3!} + \frac{2c^2}{5!}p_2 + \frac{3c^4}{7!}p_3 + \cdots\right\}$$

waarin de coëfficienten p de volgende waarden hebben:

$$p_1 = 2\sqrt{3}.2$$

$$p_2 = 2\sqrt{3}\,\frac{2^2 . 6}{5}$$

$$p_3 = 2\sqrt{3}\,\frac{4^2 . 29}{5 . 7}$$

$$p_4 = 2\sqrt{3}\,\frac{6^2 . 602}{5 . 7 . 9}$$

$$p_5 = 2\sqrt{3}\,\frac{8^2 . 70 . 0}{5 . 7 . 9 . 11}$$

Om na te gaan of deze reeks convergeert, merken wij op, dat in $\int_1^4 \frac{y^k dy}{\sqrt{y-1}}$ de factor $\sqrt{y-1}$ steeds positief is tusschen de grenzen 1 en 4 zoodat de waarde in ligt tusschen $y'^k \int_1^4 \frac{dy}{\sqrt{y-1}}$ en $y''^k \int_1^4 \frac{dy}{\sqrt{y-1}}$ waarin y' de minimumwaarde en y'' de maximumwaarde voorstelt die y tusschen de gegeven grenzen vertoont. Hier zijn $y' = 1$ en $y'' = 4$. De k-de term van de reeks voor E ligt dus in tusschen de k-de termen der reeksen:

$$E' = -2t \left\{ \frac{c^2}{3!} + \frac{2c^4}{5!} + \frac{3c^6}{7!} \ldots \right\}$$

en

$$E'' = -2t \left\{ \frac{(2c)^2}{3!} + \frac{2 . (2c)^4}{3!} + \frac{3 . (2c)^6}{7!} \ldots \right\}$$

En daar de limietverhouding voor twee opeenvolgende termen dezer reeksen 0 is, zal ook de reeks voor E moeten convergeeren.

Wij vinden nu de krachtenwet door van deze uitdrukking voor E het teeken om te keeren en vervolgens naar r te differentieeren na eerst c weer door $\frac{m^2}{3r^3 t}$ vervangen te hebben. Het negatieve teeken, dat de kracht dan verkrijgt, toont aan, dat wij met attractie te doen hebben, zooals vooraf duidelijk was, dat wij vinden moesten. Wij zien, dat de laagste macht van $1/r$, die voorkomt, de zevende is, zoodat de kracht sneller varieert dan evenredig met $\frac{1}{r^7}$.

Naar aanleiding van deze uitkomst zou ik de volgende opmerkingen willen maken:

1°. Bij vibratoren, waarvan de afstand klein is vergeleken bij de golflengte, komt het mij voor dat wij een soortgelijke attractiewet kunnen verwachten, ofschoon deze vraag nog niet met zekerheid is uit te maken.

2°. Wanneer wij aannemen, dat m, zonder periodiek te zijn, onder invloed van $\mathfrak{E}$ vergroot of verkleind kan worden, heeft dit een snellere variatie met r tengevolge.

Wanneer wij aannemen, dat de moleculen niet eenvoudige dubbelpunten, maar meer samengestelde configuraties zijn, b.v. viervoudige of achtvoudige punten, heeft dit eveneens een snellere variatie met r tengevolge. De hier onderstelde dubbelpunten schijnen wel de minst snelle variatie te geven, die men bij de verklaring van moleculaire krachten door positieve en negatieve ladingen in de moleculen kan verkrijgen. Veeleer dan te beweren, dat de onderstelling van een moleculaire attractie evenredig met $\frac{1}{r^4}$ door de electronentheorie gesteund wordt, zou men kunnen verklaren, dat zij erdoor wordt uitgesloten.

3°. Wanneer men onderstelt, dat m onafhankelijk is van de temperatuur T, dan vindt men de attractie wèl afhankelijk van de temperatuur en wel bij verhooging van temperatuur sneller dan $\frac{1}{T}$ afnemend. Daar wij echter geen grond hebben om m afhankelijk van T te stellen, en het buitendien hier een enorm verschil maakt, of wij met constante of met vibreerende dubbelpunten te maken hebben, is het nog niet mogelijk te zeggen, of de electrische verklaring der moleculaire krachten een toename of een afname der attractie met T doet verwachten.

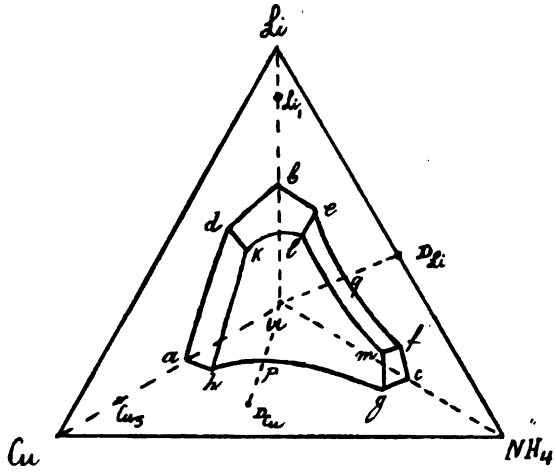
4°. Wanneer men zou willen nagaan, welke gedaante de toestandsvergelijking aanneemt bij de hier aangenomen onderstellingen aangaande de moleculaire krachtswerking, zou men bij het opschrijven van het viriaal der moleculaire krachten slechts deze resulteerende attractie behoeven in aanmerking te nemen. Immers van de krachten die in de richting van den voerstraal werken behoeven wij slechts het gemiddelde in aanmerking te nemen, want het viriaal van aantrekkende en van afstootende krachten, wanneer die tusschen verschillende molecuul-paren gelijkelijk voorkomen, heft elkaar op. En ook de niet in de richting van den voerstraal maar loodrecht daarop werkende componenten der krachten, die wij steeds buiten beschouwing lieten, dragen niet tot het viriaal bij daar die krachten op de twee moleculen werkende samen een koppel opleveren, terwijl het viriaal van twee krachten, die een koppel vormen 0 is.

Bij de berekening van het viriaal zou men natuurlijk nog wel den invloed der attractie op de verspreiding der moleculen in de ruimte moeten in aanmerking nemen.

Scheikunde. — De Heer F. A. H. Schreinemaker biedt een mededeeling aan over: *„Evenwichten in quaternaire stelsels."*

In het stelsel: Kopersulfaat, ammoniumsulfaat, lithiumsulfaat en water treden bij 30° behalve de drie sulfaten nog twee verbindingen als vaste stoffen op nl.: $Cu\,SO_4\,(NH_4)_2\,SO_4$, $6\,H_2O$ en $Li\,SO_4$, $(NH_4)_2\,SO_4$.

Wij zullen de evenwichten weer op de bekende wijze met behulp van een tetraëder voorstellen, maar nu een geheel andere projektie kiezen dan in de voorgaande mededeeling gebruikt; wij zullen nl. alle verzadigingslijnen en -vlakken loodrecht projekteeren op een van de zijvlakken van den tetraëder.



In de figuur is een dergelijke projektie voorgesteld; de punten Cu, Li, NH_4 en W geven de vier komponenten $Cu\,SO_4$, $Li_2\,SO_4$ $(NH_4)_2\,SO_4$ en water aan; driehoek $Cu\,Li\,NH_4$ is het zijvlak, waarop alles geprojecteerd is. De gestippelde lijnen Cu W, Li W en NH_4 W zijn de projecties der opstaande ribben van den tetraëder en het is duidelijk dat punt W in het middelpunt van den driehoek moet liggen.

De vraag is nu welk verband er bestaat tusschen de ligging van een punt in den tetraëder en zijn projektie op den driekoek $Cu\,Li\,NH_4$.

Nemen wij een phase met de samenstelling: Cu hoeveelheden $Cu\,SO_4$, Li hoeveelheden $Li_2\,SO_4$, N hoeveelheden $(NH_4)_2\,SO_4$ en W hoeveelheden water. De projectie van dit punt op driehoek Cu Li NH_4 kan men dan beschouwen als eene phase aan te geven, die alleen de drie komponenten $Cu\,SO_4$, $Li_2\,SO_4$ en $(NH_4)_2\,SO_4$ bevat.

Noemen wij deze hoeveelheden: Cu′, Li′ en N′. Men kan nu gemakkelijk aantoonen dat

$$Cu' = Cu + \frac{W}{3} \qquad Li' = Li + \frac{W}{3} \qquad N' = N + \frac{W}{3}$$

zoodat men, als de samenstelling eener phase bekend is, haar projektie gemakkelijk in teekening kan brengen.

Het dubbelzout $Li_2SO_4.(NH_4)_2SO_4$ wordt in de figuur door D_{Li} voorgesteld; het is duidelijk dat het, daar het slechts uit de komponenten Li_2SO_4 en $(NH_4)_2SO_4$ bestaat, op de lijn $Li\,NH_4$ moet liggen. Het dubbelzout $Cu\,SO_4.\,(NH_4)_2SO_4.\,6\,H_2O$, dat drie komponenten bevat, moet liggen op het zijvlak $W\,Cu\,NH_4$ en wordt door D_{Cu} voorgesteld.

Het koper- en het lithiumsulfaat treden beide als hydraten op nl. als $Cu\,SO_4.\,5\,H_2O$ en $Li_2SO_4.\,H_2O$; zij zijn in de figuur door Cu_5 en Li_1 voorgesteld; Cu_5 moet natuurlijk op de ribbe Cu W en Li_1 op Li W liggen.

Beschouwen wij eerst de drie ternaire evenwichten.

1°. *Kopersulfaat—ammoniumsulfaat—water.* De in dit stelsel bij 30° optredende evenwichten zijn door Mej. W. C. DE BAAT bepaald; de uitkomsten van dit onderzoek zijn door de verzadigingslijnen *ah*, *hpg*, en *gc* voorgesteld, *ah* geeft de oplossingen aan verzadigd met $Cu\,SO_4.\,5\,H_2O$; *gc* is de verzadigingslijn van het vaste $(NH_4)_2SO_4$ en *hpg* stelt de met $Cu\,SO_4\,(NH_4)_2SO_4.\,6\,H_2O$ verzadigde oplossingen voor. Daar de lijn $W\,D_{Cu}$ de verzadigingslijn *hpg* snijdt is het dubbelzout in water zonder ontleding oplosbaar; zijn oplosbaarheid wordt door *p* voorgesteld.

2°. *Lithiumsulfaat—ammoniumsulfaat—water.* De bij 30° in dit stelsel optredende evenwichten zijn door de verzadigingslijnen *be*, *eqf* en *fc* voorgesteld, de eerste is de verzadigingslijn van het $Li_2SO_4.\,H_2O$; de tweede die van het dubbelzout $Li_2SO_4.\,(NH_4)_2SO_4$, de laatste die van het $(NH_4)_2SO_4$. Daar de lijn $W\,D_{Li}$ de verzadigingslijn van het dubbelzout snijdt, is het in water zonder ontleding oplosbaar.

Wat den tak *be* betreft heb ik gezegd dat deze oplossingen aangeeft die met $Li_2SO_4.\,H_2O$ in evenwicht zijn; dit is niet volkomen juist, want het lithiumsulfaat geeft, al is het ook maar voor enkele procenten, mengkristallen met het ammoniumsulfaat.

3°. *Lithiumsulfaat—kopersulfaat—water.* Terwijl in de beide vorige ternaire stelsels een dubbelzout optreedt is dit in dit stelsel bij 30° niet het geval; de isotherme bestaat daarom uit slechts twee takken; *ad* is de verzadigingslijn van het $Cu\,SO_4\,5\,H_2O$ en *bd* die van het $Li_2SO_4.\,H_2O$.

Deze beide takken zijn door den heer KOOPAL bepaald.

De quaternaire evenwichten worden bij 30° voorgesteld door vlakken, lijnen en punten.

Het vlak *ahkd* is het verzadigingsvlak van het $Cu\,SO_4,\,5\,H_2O$

het geeft dus de quaternaire oplossingen aan, die met $CuSO_4 . 5 H_2O$ verzadigd zijn.

Het vlak *dkleb* is het verzadigingsvlak van het $Li_2SO_4 . H_2O$.

Het vlak *cfmg* is het verzadigingsvlak van het $(NH_4)_2SO_4$.

De drie hiervoor beschouwde vlakken zijn de verzadigingsvlakken der komponenten of van hunne hydraten; behalve deze heeft men ook nog de verzadigingsvlakken der dubbelzouten; dat van het $Li_2SO_4 . (NH_4)SO_4$ wordt door *elmfq* voorgesteld; dat van het $CuSO_4 . (NH_4)_2SO_4 . 6 H_2O$ door *hklmgph*.

De verzadigingslijnen ontstaan door de snijding der verzadigingsvlakken twee aan twee genomen; zij stellen dus oplossingen voor die met twee vaste stoffen verzadigd zijn.

Men ziet nu gemakkelijk dat oplossingen, voorgesteld door punten:

van *hk* verzadigd zijn met $CuSO_4 . 5 H_2O$ en D_{Cu}
„ *dk* „ „ „ $CuSO_4 . 5 H_2O$ en $Li_2SO_4 . H_2O$
„ *kl* „ „ „ $Li_2SO_4 . H_2O$ en D_{Cu}
„ *le* „ „ „ $Li_2SO_4 . H_2O$ en D_{Li}
„ *lm* „ „ „ D_{Li} en D_{Cu}
„ *mf* „ „ „ D_{Li} en $(NH_4)_2SO_4$
„ *mg* „ „ „ D_{Cu} en $(NH_4)_2SO_4$

Men kan de quaternaire verzadigingslijnen onderscheiden in zijlijnen en middenlijnen; de zijlijnen, zooals *kh*, *kd*, *le*, *mf* en *mg* eindigen ieder in een punt van een zijvlak, dus in eene ternaire oplossing; de middenlijnen, zooals *kl* en *lm* liggen geheel binnen den tetraëder.

In ieder der verzadigingspunten komen drie verzadigingsvlakken en dus ook drie verzadigingslijnen tezamen; zoo'n punt stelt dus eene oplossing voor met drie vaste stoffen verzadigd.

Hieruit volgt dat de oplossing, voorgesteld:

door *k* verzadigd is met $CuSO_4 . 5 H_2O$, $Li_2SO_4 . H_2O$ en D_{Cu}
„ *l* „ „ „ D_{Li}, $Li_2SO_4 . H_2O$ en D_{Cu}
„ *m* „ „ „ D_{Li}, $(NH_4)_2SO_4$ en D_{Cu}.

Hieruit blijkt dat ieder dezer oplossingen met het $CuSO_4 . (NH_4)_2SO_4 . 6 H_2O$ verzadigd is.

Met behulp dezer figuur kan men nu gemakkelijk enkele gevolgtrekkingen afleiden. Beschouwen wij daartoe de zijlijnen b.v. *dk*. Punt *d* stelt eene ternaire oplossing voor bij 30° verzadigd met $CuSO_4 . 5 H_2O$ en $Li_2SO_4 . H_2O$. Wij voegen aan deze oplossing $(NH_4)_2SO_4$ toe; de oplossing zal hierdoor hare samenstelling veranderen tot eindelijk eene derde vaste phase optreedt. Welk is deze?

Het $(NH_4)_2SO_4$ vormt zoowel met het koper- als met het lithiumsulfaat een dubbelzout en het is nu de vraag welk van deze beide het eerst zal optreden. De proef leert dat zich het $CuSO_4 . (NH_4)_2SO . 6 H_2O$ vormt. Gaat men uit van de ternaire oplossing *h*, die bij 30° met $CuSO_4 . 5 H_2O$ en $CuSO_4 . (NH_4)_2SO_4 . 6 H_2O$ verzadigd is en voegt men $Li_2SO_4 . H_2O$ toe, dan doorloopt de oplossing de samenstelling door punten der lijn *hk* voorgesteld, tot eindelijk in *k* de derde vaste phase verschijnt, in dit geval het $Li_2SO_4 . H_2O$.

Gaat men uit van de ternaire oplossing *f*, bij 30° verzadigd met $(NH_4)_2SO_4$ en $Li_2SO . (NH_4)_2SO_4$ en voegt men $CuSO_4 . 5 H_2O$ toe dan vormt zich, als de oplossing door *m* voorgesteld wordt, als derde vaste phase het $CuSO_4 . (NH_4)_2SO_4 . 6 H_2O$; gaat men uit van de ternaire oplossing *g*, die met $(NH_4)_2SO_4$ en $CuSO_4 . (NH_4)_2SO_4 . 6 H_2O$ verzadigd is dan zal zich bij toevoeging van $Li_2SO_4 . H_2O$ als derde phase in *m* het $Li_2SO_4 . (NH_4)_2SO_4$ vormen.

Als men van de ternaire oplossing *e* uitgaat, die met $Li_2SO_4 . H_2O$ en $Li_2SO_4 . (NH_4)_2SO_4$ verzadigd is, en $CuSO_4 . 5 H_2O$ toevoegt dan doorloopt de oplossing tak *el*; in *l* vormt zich echter eene nieuwe vaste phase nl. $CuSO_4 . (NH_4)_2SO_4 . 6 H_2O$.

Wij denken ons door de punten W, Cu en D_{Li} van den tetraëder een plat vlak gebracht; de punten van dit vlak stellen oplossingen voor met konstante verhouding der komponenten Li_2SO_4 en $(NH_4)_2SO_4$; deze verhouding is dezelfde als die, waarin ze in het dubbelzout $Li_2SO_4 . (NH_4)_2SO_4$ optreden. Dit platte vlak doorsnijdt het verzadigingsvlak *leqfm* van dit dubbelzout, zoodat dit niet alleen in water maar ook in kopersulfaatoplossingen tot eene bepaalde sterkte zonder ontleding oplosbaar is.

Om de samenstellingen der vaste stoffen te vinden, die met bepaalde oplossingen in evenwicht kunnen zijn heb ik op dezelfde wijze gehandeld als ik vroeger bij ternaire stelsels heb gedaan; ik heb nl. de restmethode toegepast.

Is de oplossing nl. in evenwicht met ééne vaste stof, dan moet de konjugatielijn oplossing-rest door het punt gaan dat deze vaste stof aangeeft; is zij met twee vaste stoffen in evenwicht dan snijdt de konjugatielijn vloeistof-rest de verbindingslijn der twee vaste stoffen, en is zij met drie vaste stoffen in evenwicht dan doorsnijdt zij den driehoek, welke die drie vaste stoffen tot hoekpunt heeft.

Deze konstrukties zijn het gemakkelijkst uit te voeren als men in plaats van een gelijkzijdigen een rechthoekigen tetraëder neemt en alles op twee der zijvlakken projekteert.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan: *„Bijdrage tot de theorie der binaire mengsels."* VII.

OVER DE BETREKKING TUSSCHEN DE GROOTHEDEN a_{12} EN a_1 EN a_2, WELKE IN DE THEORIE VAN EEN BINAIR MENGSEL VOORKOMEN.

Reeds meermalen heb ik den loop der thermodynamische krommen geteekend voor het geval, dat bij een binair stelsel minimum plooipuntstemperatuur voorkomt, en dus ook voor zekere waarde van x de grootheid $\frac{a_x}{b_x}$ minimumwaarde vertoont. Zoowel de loop der isobaren, als de loop der lijnen $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ en $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$ kan voor dat geval als bekend worden aangenomen. En het experiment heeft aangetoond, dat de door de theorie voorspelde gedaante dezer lijnen ten minste kwalitatief juist is.

Ik stel mij voor in deze bladzijden aan te toonen dat de loop dezer lijnen in het genoemde geval (men zie o.a. fig. 1 bladz. 691 Deel XV van deze verslagen 1907) zich niet laten vereenigen met de onderstelling: $a_{12}^2 = a_1 a_2$.

Ik begin met in herinnering te brengen dat de lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ een asymptoot bezit bij zoodanige waarde van x, waarvoor $MRT\frac{db}{dx} = \frac{da}{dx}$ is, welke asymptoot of aanwezig is, of gedacht moet worden bij een waarde van x welke negatief is, en dat deze kromme voor steeds grootere waarden van x asymptotisch de lijn $v = b$ nadert — ten minste als $a_1 + a_2 - 2\,a_{12}$ positief is. Op deze onderstelling kom ik straks terug, maar op bladz. 691 heb ik deze onderstelling uitdrukkelijk genoemd onder den vorm: $\frac{d^2a}{dx^2}$ positief. Bij het stijgen van T gaat deze lijn naar grootere waarde van x en v.

De lijn $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$ bestaat bij lage temperaturen uit twee afzonderlijke takken. Uit $\frac{d^2p}{dv^2}\frac{dv}{dx} + \frac{d^2p}{dx\,dv} = 0$ volgt dat de vloeistoftak maximumvolume heeft op de lijn $\frac{d^2p}{dx\,dv} = 0$ en de damptak minimumvolume op deze zelfde kromme, welke kromme een analogen loop heeft als $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$. Zij heeft dezelfde asymptoten, maar is steeds tot grooter volume beperkt. Bij $T =$ minimum kritische temperatuur

komen de twee takken samen in een punt waarvoor èn $\frac{d^2p}{dv^2}$ èn $\frac{d^2p}{dx\,dv}$ gelijk nul is, dus in zoodanig punt der lijn $\frac{d^2p}{dx\,dv} = 0$, waarvoor $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$ is en evenzoo $\frac{d^2p}{dv^2} = 0$. Bijgevolg in het kritisch punt van het ongesplitste mengsel, waarvoor $\frac{a_x}{b_x}$ minimumwaarde heeft.

Bij nog hoogere waarde van T is de kromme $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$ gesplitst in een linkertak en rechtertak, welke beide takken raaklijnen bezitten evenwijdig aan de v-as, in punten waarvoor evenzoo $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$ en $\frac{d^2p}{dv^2} = 0$ is. Onder de bijzondere waarden van deze steeds stijgende waarde van T moet in de eerste plaats genoemd worden, die waarbij het laatst genoemde punt op de lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ is gekomen, het punt P van fig. 31. Dit is het merkwaardige punt, waarvoor *plooipunt* en *kritisch punt van het ongesplitste mengsel* samenvallen. Bij die temperatuur snijden de twee krommen $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ en $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$ elkander dus nog in twee punten. Het tweede snijpunt ligt natuurlijk bij grooter volume. Bij nog verder stijgen der temperatuur trekken zich beide krommen nog verder samen. De lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ beweegt zich rechts, en de lijn $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$ beweegt zich links. En bij zekere temperatuur raken deze beide krommen elkander, om bij nog hoogere temperatuur elkander geheel te hebben losgelaten. Dat raakpunt dezer beide krommen ligt natuurlijk op den damptak van $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$ en heeft dus grooter volume dan het kritisch volume.

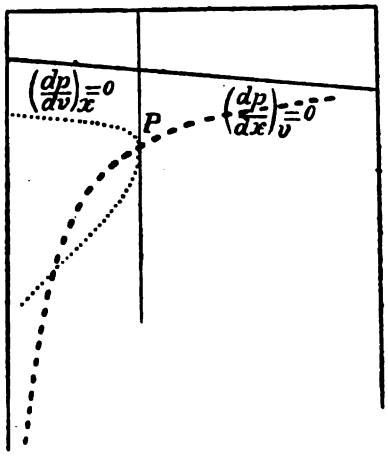


Fig. 31.

Wij kunnen het volume voor het geval van raking berekenen. De voorwaarde voor raking van $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$ en $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ is gegeven

door gelijke waarde van $\frac{dv}{dx}$ in de twee volgende vergelijkingen:

$$\frac{d^2p}{dv^2}\frac{dv}{dx}+\frac{d^2p}{dxdv}=0$$

en

$$\frac{d^2p}{dxdv}\frac{dv}{dx}+\frac{d^2p}{dx^2}=0$$

of uit:

$$\frac{d^2p}{dv^2}\frac{d^2p}{dx^2}=\left(\frac{d^2p}{dxdv}\right)^2 \quad \text{(zie pag. 691).}$$

Deze laatste vergelijking, en de beide vergelijkingen $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v=0$ en $\left(\frac{dp}{dv}\right)=0$ vormen een drietal, dat voldoende is ter bepaling van de drie grootheden x, v en T van het raakpunt. Deze vergelijkingen hebben, als wij in de toestandsvergelijking b constant aannemen, den volgenden vorm:

$$\left[\frac{MRT}{(v-b)^3}-\frac{3a}{v^4}\right]\left[\frac{MRT\left(\frac{db}{dx}\right)^2}{(v-b)^3}-\frac{1}{2}\frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{v^2}\right]=\left[\frac{MRT\frac{db}{dx}}{(v-b)^2}-\frac{\frac{da}{dx}}{v^2}\right]^2 \quad . \; . \; . \quad (1)$$

$$\frac{MRT}{(v-b)^2}\frac{db}{dx}=\frac{da}{dx}\frac{1}{v^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

en

$$\frac{MRT}{(v-b)^2}=\frac{2a}{v^3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Maakt men nu van (2) en (3) gebruik ter eliminatie van MRT en van $\frac{db}{dx}$, dan verkrijgt men een eenvoudige gedaante voor $\frac{v}{b}$ nl.

$$\frac{v}{b}=\frac{3a\frac{d^2a}{dx^2}-2\left(\frac{da}{dx}\right)^2}{a\frac{d^2a}{dx^2}-\left(\frac{da}{dx}\right)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Men kan ook een tweedemachtsvergelijking in $\frac{v}{b}$ verkrijgen, maar dan blijkt dat een der waarden van $\frac{v}{b}=1$ is, en dat de lijn $v=b$, bij $T=0$ samenvallend kan beschouwd worden met den tak der kleine volumes van $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x=0$ en ook met $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v=0$. Evenzoo de lijn $v=\infty$.

Schrijven wij nu voor de verhouding van $\left(\frac{da}{dx}\right)^2$ en $a\frac{d^2a}{dx^2}$ de grootheid m, zoodat $m = \frac{\left(\frac{da}{dx}\right)^2}{a\frac{d^2a}{dx^2}}$ is, dan wordt (4)

$$\frac{v}{b} = \frac{3-2m}{1-m}.$$

En $\frac{v}{b}$ als ordinaat teekenende, als m langs de as der abscissen wordt uitgezet, verkrijgen wij de teekening van fig. 32. Voor $m = 0$ is $\frac{v}{b} = 3$ en voor $m = 1$ is $\frac{v}{b} = \infty$. Voor $m > 1$ is in den beginne $\frac{v}{b}$ negatief, maar voor $m = {}^2/_3$ is $\frac{v}{b} = 0$ en voor grootere waarden van m is $\frac{v}{b}$ positief en steeds stijgende. De limietwaarde is $\frac{v}{b} = 2$. Voor negatieve waarde van m is $\frac{v}{b}$ steeds positief; afdalende van $\frac{v}{b} = 3$ tot $\frac{v}{b} = 2$. De geteekende kromme is een gelijkzijdige hyperbool. Er is dus slechts dan een waarde van $\frac{v}{b}$ grooter dan 3 mogelijk als v ligt tusschen 0 en 1. Zoo eischt $\frac{v}{b} = 4$ een waarde van $m = {}^1/_2$.

Een gedrag der stoffen met minimumplooipuntstemperatuur is dus niet te verklaren als m niet tusschen 0 en 1 ligt.

Nu heb ik reeds herhaaldelijk gewezen op de betrekking:

$$2a\frac{d^2a}{dx^2} = \left(\frac{da}{dx}\right)^2 + 4\,(a_1a_2 - a_{12}^2)$$

welke volgt uit de onderstelling dat a een tweede machtsvorm van x is, en reeds in mijn Molekulair Theorie voor een binair mengsel heb ik, in het besef van de wenschelijkheid dat er een betrekking tusschen a_{12} en a_1 en a_2 zou gevonden kunnen worden, er op gewezen dat de vergelijking der spinodale lijn bij een binair mengsel zeer vereenvoudigd zou worden als men de betrekking zou mogen aannemen: $a_{12}^2 = a_1a_2$. Ook op andere betrekkingen tusschen deze

grootheden heb ik gewezen; maar ik heb er mij zorgvuldig van onthouden een bepaalde betrekking zelfs maar als waarschijnlijk voor te stellen. Alleen heb ik herhaaldelijk, toen of later, als betrekking voor mengsels met minimum plooipuntstemperatuur gesteld $a_1 + a_2 > 2a_{12}$ en omgekeerd, als er ook mengsels met maximum plooipuntstemperatuur zouden kunnen voorkomen: $a_1 + a_2 < 2a_{12}$. En herhaaldelijk heb ik er dan ook op gewezen dat er geen enkele grond aanwezig is om bijv. te stellen: $a_{12}^2 = a_1 a_2$. En de volgende overwegingen hebben mij voornamelijk daartoe geleid.

In de toestandsvergelijking voor een enkele stof zijn de twee constanten b en a niet op even afdoenden grond en met dezelfde zekerheid ingevoerd. Tot het bestaan van de grootheid b besluit men met volkomen zekerheid, zoodra men gelooft dat tot de noodwendige eigenschap der materie het innemen van ruimte behoort. Ja, zelfs MAXWELL die de molekulen geen eigen volume wilde toekennen, en ze als zoogenaamde stoffelijke punten wilde beschouwen, begrijpende dat tusschen stoffelijke punten geen botsingen kunnen plaatsgrijpen moest ze tenminste een schijnvolume toekennen. Door een afstootende kracht aan te nemen moest hij begrijpelijk maken dat ze nimmer elkander ontmoeten, en zich bij de omkeering der beweging bij nadering gedragen als lichaampjes welke *ondoordringbaarheid* bezitten. Een onderstelling welke zeker niet van onwaarschijnlijkheid is vrij te pleiten. De kracht zou een afstootende zijn en waarschijnlijk omgekeerd evenredig met de vijfde macht van den afstand. Hoe en waarom de aantrekking op iets grooteren afstand overgaat in een dergelijke afstootende kracht, dat is een vraag welke misschien nimmer door hem gesteld is — in geen geval door hem beantwoord. De invoering van de grootheid b in de toestandsvergelijking is dus volkomen begrijpelijk — en voor ieder die het bestaan der stof als wezenlijk aanneemt noodzakelijk. Maar dit is niet, ten minste niet in dezelfde mate, het geval met de grootheid a. Waarom is molekulaire aantrekking een noodwendig attribuut van stof. Uit het denkbeeld: „stof is iets dat noodwendig ruimte inneemt" volgt toch niet dat stof ook attractie zal moeten bezitten. Misschien zullen wij vroeger of later een zoodanige conceptie over het wezen van een molekuul leeren maken, dat daaruit volgt dat zij elkander noodwendig aantrekken en dan ook de grootte van die attractie leeren berekenen. Daarom worden in den laatsten tijd pogingen in het werk gesteld om in het wezen van een molekuul dieper door te dringen, en worden zij ondersteld te zijn of vibreerende of permanente electrische dubbelpunten [1]). Maar al bleek die onderstelling behoorlijk rekenschap

[1]) Zie deze verslagen pag. 130.

te geven van de molekulaire attractie, ook dan is nog niet daaruit af te leiden dat attractie bestaat. Dan is de vraag in zoover veranderd dat zij luidt: zijn er in het molekuul electrische dubbelpunten of niet? En in mijn Proefschrift (1873) pag. 92 heb ik, toen de vraag zich voordeed of ook waterstof een kritische temperatuur zou bezitten, wel geantwoord in den zin van hoogen graad van waarschijnlijkheid, maar alleen op een grond, die toch voor eenige weifeling vrijheid liet, nl. „Stof zal wel altijd aantrekking vertoonen moeten". 't Is niet te ontkennen dat al wat wij als stof erkennen, onderworpen is aan de zwaartekracht; maar daaruit af te leiden dat uit het bestaan der NEWTON'sche attractie ook volgt het bezit van molekulaire attractie is meer dan gewaagd. Dit alles heeft niet tot doel om twijfel te wekken aan het bestaan van a bijv. voor helium, want nu alle andere stoffen een waarde voor a bezitten, kunnen wij weder herhalen wat ik vroeger voor waterstof zei. Maar om te doen opmerken dat de waarde van a niet alleen afhangt van de molekulairgewichten. Was dat wel het geval dan zou $\frac{a_1}{m_1^2} = \frac{a_2}{m_2^2}$ zijn, een betrekking die zeker niet vervuld is. Dan zou ook $\frac{a_1}{m_1^2} = \frac{a_2}{m_2^2} = \frac{a_{12}}{m_1 m_2}$ en $a_{12}^2 = a_1 a_2$ zijn, wat zeer waarschijnlijk ook nimmer vervuld is.

Dat men door zulk een uit de lucht gegrepen onderstelling tal van verschijnselen die bij binaire mengsels voorkomen, niet zou kunnen verklaren, stond van den beginne af aan bij mij vast. Reeds voor langen tijd heeft KORTEWEG in zijn verhandeling „La surface ψ dans le cas de symétrie" aangetoond in hoe hooge mate de verschijnselen, die een binair mengsel vertoont, afhangen van de waarde die men aan a_{12} toekent. Zelfs zou er bij waarden van a_{12} tusschen bepaalde grenzen niet alleen driephasen-evenwicht maar zelfs vierphasen-evenwicht mogelijk zijn, dan natuurlijk telkens bij een enkele waarde van T. De onderstelling $a_{12}^2 = a_1 a_2$ is dus niet een onderstelling zonder ingrijpende beteekenis. Toch ziet men telkens dat die onderstelling gemaakt wordt. En nu heb ik dit onderzoek ondernomen om te doen zien dat zulk een onderstelling ook het bestaan van minimumplooipuntstemperatuur zou onmogelijk maken. Tegelijkertijd wilde ik doen opmerken hoe de loop der isobaren, die ik in fig. 1 van deze Bijdragen heb gegeven geheel zou moeten gewijzigd worden bij andere onderstellingen omtrent a_{12} dan waarvan ik ben uitgegaan. Stellen wij in vergelijking:

$$2a \frac{d^2a}{dx^2} = \left(\frac{da}{dx}\right)^2 + 4\,(a_1 a_2 - a_{12}^2)$$

voor $\left(\frac{da}{dx}\right)^2$ de waarde $ma\frac{d^2a}{dx^2}$, waarin, als er minimumplooipunts-temperatuur bestaat, voor het raakpunt van $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ en $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$ de waarde van m ligt tusschen 0 en 1, dan vinden wij:

$$\left(\frac{2}{m} - 1\right)\left(\frac{da}{dx}\right)^2 = 4\,(a_1a_2 - a_{12}^2)$$

$$(2 - m)\,a\frac{d^2a}{dx^2} = 4\,(a_1a_2 - a_{12}^2)$$

Nu is $\frac{d^2a}{dx^2} = 2\,(a_1 + a_2 - 2a_{12})$. Daar niet tegelijkertijd $a_1a_2 = a_{12}^2$ en $a_1 + a_2 = 2a_{12}$ kan zijn, tenzij in het geval $a_1 = a_2$, kan aan deze vergelijking niet voldaan worden dan door $a_1a_2 > a_{12}^2$ te stellen.

De onderstelling $a_1a_2 = a_{12}^2$ geeft voor m de waarde 2, maar dan ook voor $\frac{v}{b}$, in het raakpunt van $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ en $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$, de waarde

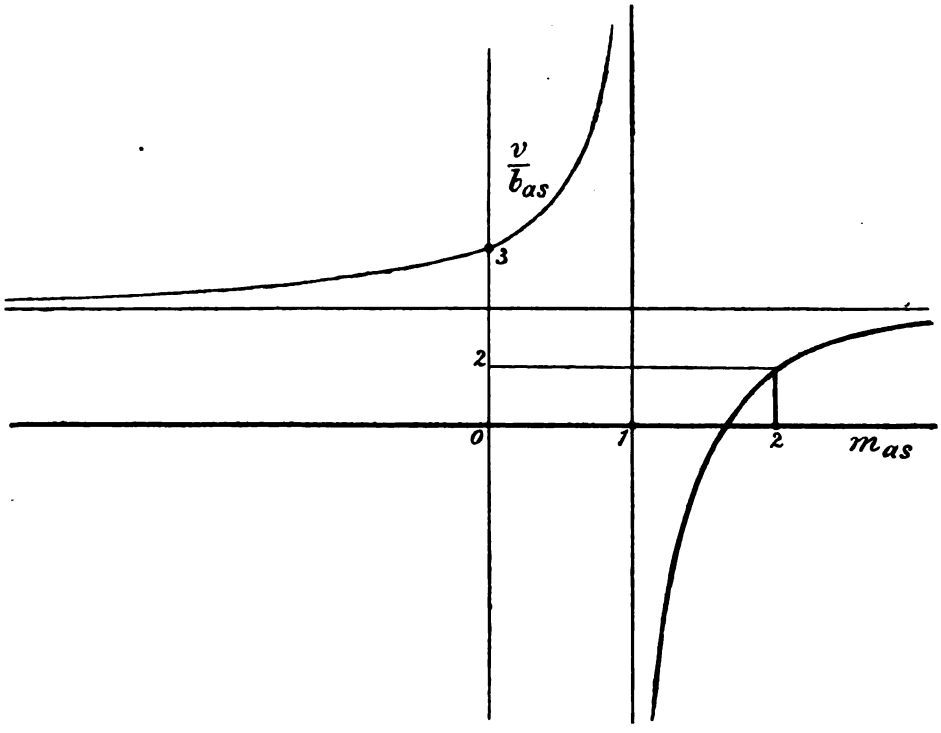


Fig. 32.

1 (zie fig. 32). — Eerst als wij $a_1\,a_2 < a_{12}^2$ stellen wordt $m > 2$ en vinden wij voor het raakpunt der genoemde krommen waarden van $\frac{v}{b}$ die weder grooter dan 1 zijn en dus bestaan kunnen; maar

dan kan deze waarde toch hoogstens tot 2 stijgen. In zulke gevallen is er raking van $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ met den vloeistoftak van $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$. En dit beteekent voor fig. 1 van deze Bijdragen dat dan weder de vloeistoftak van $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$ aan de rechterzijde zou kunnen naderen tot $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$, maar dan tot dat gedeelte van deze kromme dat voorbij het minimumvolume ligt, en waar zij zich weder naar grooter volumes beweegt. Bij de onderstelling, dat a_{12}^2 zou kunnen stijgen boven $a_1 a_2$, zou fig. 1 niet alle mogelijke gevallen van den loop der isobaren ten opzichte van $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ voorstellen. Maar ik heb reeds opgemerkt pag. 695 hoe, als men meerdere onderstellingen omtrent $a_1 + a_2 - 2a_{12}$ toelaat bijv. $a_1 + a_2 - 2a_{12} = 0$ of $a_1 + a_2 - 2a_{12}$ negatief, en de onderstelling $a_1 a_2 < a^2_{12}$ ligt in deze richting, fig. 1 zou moeten uitgebreid worden.

Gaat men voort met het vergrooten van a_{12}, niet alleen boven $\sqrt{a_1 a_2}$, maar zelfs boven $\frac{a_1 + a_2}{2}$, dan is $m = \frac{\left(\frac{da}{dx}\right)^2}{a\frac{d^2a}{dx^2}}$ negatief en is $\frac{v}{b}$, voor het raakpunt van $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ en $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$, gelegen tusschen 2 en 3, en ligt dat raakpunt dus steeds op den vloeistoftak van $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$.

Men zou tot de hierboven verkregen uitkomsten ook langs een anderen weg hebben kunnen komen, en dan gelegenheid hebben om enkele nieuwe opmerkingen te maken. Denken wij uit de twee vergelijkingen n.l. $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ en $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$ de grootheid v geelimineerd, dan verkrijgen wij een betrekking tusschen x en T. In het algemeen vinden wij bij dezelfde waarde van T twee waarden van x. De waarde van T waarbij deze waarden van x samenvallen, of met andere woorden de maximum-waarde van T, geeft ons dan de waarde van x voor het raakpunt der beide krommen.

Uit:

$$\frac{MRT}{(v-b)^2} = \frac{2a}{v^3}$$

en

$$\frac{MRT}{(v-b)^2}\frac{db}{dx}=\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

vinden wij $$\frac{2\frac{db}{dx}}{v}=\frac{\frac{da}{dx}}{a} \text{ voor een snijpunt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Daar voor waarden van v die realiseerbaar zullen zijn $v > b$ en v positief moet zijn, kan een snijpunt der beide krommen alleen voorkomen als $\frac{da}{dx}$ positief is en $\frac{\frac{da}{dx}}{a} < \frac{2\frac{db}{dx}}{b}$ is. De laatste voorwaarden kan geschreven worden $\frac{d\frac{a}{b^2}}{dx} < 0$. De beide krommen zullen elkander dus nimmer kunnen snijden in een regio van toenemenden kritischen druk. Beperken wij ons dus tot afnemenden kritischen druk. De meetkundige plaats (6) heeft tot differentiaal vergelijking:

$$-\frac{2\frac{db}{dx}}{v^2}\frac{dv}{dx}=\frac{a\frac{d^2a}{dx^2}-\left(\frac{da}{dx}\right)^2}{a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Zoolang dus $m=\frac{\left(\frac{da}{dx}\right)^2}{a\frac{d^2a}{dx^2}} < 1$ is, is $\frac{dv}{dx}$ negatief. Eerst in een gebied waar $m = 1$ is geworden zal $\frac{dv}{dx}$ positief zijn geworden. En mocht men $a_1 a_2 = a_{12}^2$ aannemen en dus $m = 2$ stellen, dan zou de meetkundige plaats van de snijpunten der beide krommen met toenemende x naar grooter volume loopen en dus geheel anders loopen dan het geval is bij mengsels met minimum-plooipunts-temperatuur. Substitueert men de waarde van v, welke uit (6) volgt in:

$$MRT=\frac{2a}{b}\frac{b}{v}\left(1-\frac{b}{v}\right)^2$$

dan verkrijgt men:

$$MRT=\frac{a}{b}\frac{\frac{1}{a}\frac{da}{dx}}{\frac{1}{b}\frac{db}{dx}}\left\{1-\frac{\frac{1}{2a}\frac{da}{dx}}{\frac{1}{b}\frac{db}{dx}}\right\}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Voor waarden van x waarvoor $\frac{da}{dx} = 0$ is en $\frac{2}{b}\frac{db}{dx} = \frac{1}{a}\frac{da}{dx}$ of $\frac{d \log \frac{a}{b^2}}{dx} = 0$ is, is de waarde van $T = 0$. Zoo behoort telkens bij een paar elkander naderende waarden van x gelijke waarde van T. En bij de maximumwaarde van T zijn de twee waarden van x samengevallen. Door (7) te differentieeren verkrijgt men dan ook een vergelijking, welke onder den vorm kan geschreven worden:

$$\frac{2a}{b}\frac{db}{dx} = \frac{3a\frac{d^2a}{dx^2} - 2\left(\frac{da}{dx}\right)^2}{a\frac{d^2a}{dx^2} - \left(\frac{da}{dx}\right)^2}\frac{da}{dx}$$

waaruit met inachtneming van (6) weder (4) verkregen wordt.

Uit het voorgaande blijkt dat het stellen van $a_{12}^2 = a_1 a_2$ gelijk staat met het stellen van $m = 2$. Bij mengsels met minimumplooipunt verschilt de waarde van m veel van deze waarde, daar zij dan kleiner dan 1 is, en dan zal ook a_{12}^2 betrekkelijk veel van $a_1 a_2$ moeten verschillen. Stellen wij $a_{12}^2 = l^2 a_1 a_2$, waarin $l^2 < 1$ is, dan vinden wij uit:

$$2a\frac{d^2a}{dx^2} = \left(\frac{da}{dx}\right)^2 + 4(1-l^2)a_1 a_2$$

$$(2-m)a\frac{d^2a}{dx^2} = 4(1-l^2)a_1 a_2$$

of

$$\left(1 - \frac{m}{2}\right)(a_1 + a_2 - 2a_{12})a = (1 - l^2)a_1 a_2$$

Uit deze vergelijking kan afgeleid worden, dat m dicht bij 2 kan liggen zelfs als l betrekkelijk veel van 1 verschilt.

Daar de waarde van a met x verandert, zal ook de verhouding van $1 - \frac{m}{2}$ en $1 - l^2$ met x veranderen. Laat, wat wel in het algemeen waar zal zijn, a met x toenemen, dan is a_1 de kleinste waarde van a en a_2 de grootste waarde, terwijl de waarde van a bij $x = \frac{1}{2}$ gelijk zal zijn aan $\frac{a_1 + a_2 + 2a_{12}}{4}$.

De verhouding $\dfrac{1-\frac{m}{2}}{1-l^2}$ is dus voor $x=0$, $x=\frac{1}{2}$ en $x=1$

$$\frac{1-\frac{m}{2}}{1-l^2}=\frac{a_2}{a_1+a_2-2a_{12}}=\frac{\frac{a_2}{a_1}}{\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}-1\right)^2+2(1-l)\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}}$$

$$\frac{1-\frac{m}{2}}{1-l^2}=\frac{4a_1a_2}{(a_1+a_2)^2-4a^2_{12}}=\frac{4\frac{a_2}{a_1}}{\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)^2+4(1-l^2)\frac{a_2}{a_1}}$$

$$\frac{1-\frac{m}{2}}{1-l^2}=\frac{a_1}{a_1+a_2-2a_{12}}=\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}-1\right)^2+2(1-l)\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}}$$

Kiezen wij de 2de dezer vergelijkingen, uit welke het gemakkelijkst conclusiën te trekken zijn ten opzichte van de waarde van m bij gegeven waarde van l^2, dan schrijven wij ze eerst onder den volgenden vorm:

$$\frac{2}{m}-1=\frac{4(1-l^2)\frac{a_2}{a_1}}{\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)^2}.$$

Nemen wij steeds dezelfde waarde van $1-l^2$, maar verschillende waarden van $\frac{a_2}{a_1}$, dan vinden wij zeer groote verschillen in de waarde van m. Bijv. met $\frac{a_2}{a_1}=2$ wordt $\frac{2}{m}-1=8(1-l^2)$, of $m=\frac{2}{1+8(1-l^2)}$; maar met $\frac{a_2}{a_1}=11$, wordt m gelijk gevonden aan $m=\frac{2}{1+0{,}44(1-l^2)}$. Met $l^2=1$ vindt men natuurlijk in beide gevallen $m=2$. Maar met kleinere waarde van l verschillen de waarden van m aanmerkelijk. Met $l=0$ zijn deze waarden $\frac{2}{9}$ en $\frac{2}{1{,}44}$.

Hadden wij de 3de der vergelijkingen bediscussieerd, dan zouden de waarden van m nog grooter gevonden zijn. Volgens de eerste der vergelijkingen natuurlijk kleiner.

Vragen wij ten slotte naar den loop van de lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ in de gevallen waarin er geen aanraking met de lijn $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$ kan plaats hebben, of alleen aan de zijde der vloeistofvolumes. Wij hebben hierboven reeds gezien, dat dan de meetkundige plaats der snijpunten van beide genoemde krommen (vergel. 7) naar grooter volumes loopt als men x laat toenemen. Dan bestaat van de lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ bij gegevens T ook alleen dat gedeelte, waarbij deze lijn naar grooter volume loopt. Het linkergedeelte, waarbij deze kromme oneindig groot volume bereiken kan, is dan vervallen. Dit oneindig groot volume ligt in het gewone geval bij een waarde van x te berekenen uit $MRT \frac{db}{dx} = \frac{da}{dx}$. Dan is $\frac{v-b}{v} = \sqrt{\frac{MRT \frac{db}{dx}}{\frac{da}{dx}}}$ en het eerste lid dezer vergelijking is dan gelijk aan de eenheid omdat $\frac{v}{b} = \infty$. Maar $\frac{v-b}{v}$ kan nog in een ander geval gelijk aan 1 zijn, nl. als $b = 0$ mocht zijn. Dat kan alleen voorkomen, als men extrapoleerende ook negatieve waarden van x toelaat, en bovendien voor b een zoodanige functie van x kiest dat zij voor negatieve waarde van x gelijk 0 kan worden. Met een lineaire functie is dit het geval, maar het stellen van $b = b_1 (1 - x) + b_2 x$ is slechts een benadering. Of dit ook met een meer exacte gedaante van $b = f(x)$ het geval zou kunnen zijn, moeten wij in het midden laten. Daarenboven is het dan noodig, dat als men steeds grootere negatieve waarde van x kiest, men eerst $b = 0$ vindt, alvorens $\frac{da}{dx} = 0$ te vinden. Maar de loop der p-lijnen moet dan ook wijziging ondergaan. Ik zal dit echter achterwege laten, ook omdat Dr. KOHNSTAMM mij mededeelde, dat hij zich met de studie van den veranderden loop der isobaren reeds had bezig gehouden en hij ook reeds tot het besluit was gekomen, dat de relatieve ligging van de waarden van x, waarvoor $b = 0$ en $\frac{da}{dx} = 0$ is, in deze beslissend is. Ook laat ik het voor het oogenblik onbeslist of ook met andere onderstellingen dan voor tusschen 0 en 1 er sprake kan zijn van minimumplooipuntstemperatuur, wel te onderscheiden van minimumwaarde van $\frac{ax}{bx}$.

Sterrekunde. — De Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN biedt eene mededeeling aan van den Heer J. WEEDER: „*Het onderzoek der gewichten in vereffeningen naar het beginsel der kleinste vierkanten.*"

(Mede aangeboden door den Heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN).

Wanneer uitkomsten van metingen, die zijn voortgevloeid uit verschillende wijzen van meting of afkomstig zijn van verschillende waarnemers, onderling vereffend worden, is het veelal gewenscht de gewichten vóór het vereffenen aan die uitkomsten toegekend, te toetsen aan de schijnbare fouten door de vereffening opgeleverd, ten einde te kunnen beoordeelen of het noodig is ze te verbeteren en te onderkennen, in welke richting verbetering verkregen wordt. Laat het waarnemingsmateriaal zich naar zijn oorsprong splitsen in groepen en wordt uit de schijnbare fouten van elke groep afzonderlijk de middelbare fout der gewichtseenheid afgeleid, dan is het een vereischte dat de verschillen dier waarden klein zijn, althans niet de grenzen overschrijden, die men, rekening houdende met de aantallen der schijnbare fouten in elke groep, kan vaststellen.

Bij den aanvang van zulke onderzoekingen reeds doet het vraagstuk zich dus voor, hoe de middelbare fout der gewichtseenheid wordt becijferd, indien men zich slechts van een deel der schijnbare fouten bedienen wil.

Bij het vereffenen van deelfoutbepalingen van den Leidschen meridiaancirkel heb ik daarvoor de volgende formule in toepassing gebracht:

$$\mu = \sqrt{\frac{\Sigma gf^2}{n-k}}.$$

Hierin beteekent

μ de middelbare fout der gewichtseenheid

g het gewicht eener waarnemingsuitkomst

f de schijnbare fout voor deze uitkomst berekend

n het aantal der fouten uit de groep

k een getal dat afhangt van de gewichten der meetuitkomsten en van de coëfficienten der door de vereffening bepaalde onbekenden in de vergelijkingen, die het verband uitdrukken tusschen deze onbekenden en de meetuitkomsten der groep.

Op welke wijze k van bovengenoemde grootheden afhankelijk is, zal duidelijk worden door een voorbeeld als hoedanig ik het geval kies dat 3 onbekenden x y z bepaald zijn door N vergelijkingen van den vorm $ax + by + cz = l$, terwijl aan de hierin voorkomende

door meting verkregene grootheden l de gewichten g toekomen. In dit geval is:

$$k = \Sigma\, g\,(a^2\, Q_{xx} + 2ab\, Q_{xy} + b^2\, Q_{yy} + 2ac\, Q_{xz} + 2bc\, Q_{yz} + c^2\, Q_{zz})$$

waarbij de summeeringen in de formules voor k en μ uitdrukkingen omvatten, die op dezelfde meetuitkomsten betrekking hebben. In bovenstaande formule zijn de grootheden Q, de bekende gewichtsgetallen, te berekenen met behulp van de coëfficienten der normaalvergelijkingen.

Ter afleiding van deze formule dienen dezelfde overwegingen, welke leiden tot de middelbare fout der gewichtseenheid uit *alle* waarnemingen. Worden de ware fouten door h aangegeven, dan is $n\mu^2 = \Sigma\, gh^2$; deze som wordt uitgedrukt in de schijnbare fouten die men berekenen kan, en in de fouten Δx, Δy en Δz der uit de normaalvergelijkingen berekende grootheden x, y en z, met behulp van de betrekking $h = f + a\Delta x + b\Delta y + c\Delta z$, zoodat

$$\begin{aligned} n\mu^2 = {} & \Sigma\, gf^2 + 2\,(\Delta x\, \Sigma\, gfa + \Delta y\, \Sigma\, gfb + \Delta z\, \Sigma\, gfc) + \\ & + (\Delta x)^2\, \Sigma\, ga^2 + 2\,(\Delta x)\,(\Delta y)\, \Sigma'\, gab + (\Delta y)^2\, \Sigma'\, gb^2 + \\ & + 2\,(\Delta x)\,(\Delta z)\, \Sigma\, gac + 2\,(\Delta y)\,(\Delta z)\, \Sigma\, gbc + (\Delta z)^2\, \Sigma\, gc^2 \end{aligned}$$

Bezigde men het geheele foutenmateriaal, dan zouden de eerste 3 der onbekende termen wegvallen wegens $[gfa] = 0$, $[gfb] = 0$ en $[gfc] = 0$. (Hier en voortaan gebruik ik [ ] als teeken van eene summeering die zich over *alle* waarnemingen uitstrekt). Om zoo goed mogelijk rekening te houden met de onbekende termen in 't bovenstaande vervangt men ze door hare middelwaarden in de veronderstelling dat hetzelfde waarnemingscomplex zich menigvuldig herhaalt, zoodat alle berekenbare grootheden ongewijzigd terugkeeren in elke herhaling. In die veronderstelling hebben Δx, Δy en Δz nul tot middelwaarden, en de middelwaarden harer vierkanten en producten zijn in de boven aanwezige volgorde:

$$Q_{xx}\,\mu^2\ ,\ Q_{xy}\,\mu^2\ ,\ Q_{yy}\,\mu^2\ ,\ Q_{xz}\,\mu^2\ ,\ Q_{yz}\,\mu^2 \text{ en } Q_{zz}\,\mu^2$$

Vereenigt men deze middelwaarden, die μ^2 tot factor hebben, met den term $n\mu^2$ in bovenstaande vergelijking, stelt men

$$\Sigma\, g\,(a^2 Qxx + 2abQxy + b^2 Qyy + 2acQxz + 2bcQyz + c^2 Qzz),$$

gelijk k en lost μ uit de vergelijking op, dan verkrijgt me $\mu = \sqrt{\dfrac{\Sigma g f^2}{n-k}}$, d. i. de formule waarvan ik mij heb bediend ter bepaling van de middelbare fout der gewichtseenheid uit eene bizondere groep van schijnbare fouten.

Tot *ongeveer* dezelfde uitkomst kwam ik door eene andere beschou-

wing, mij het vraagstuk stellende om de middelbare waarde M_{fi} te bepalen van eene bepaalde schijnbare fout f_i. In de betrekking:

$$f_i = l_i - a_i\, x - b_i\, y - c_i\, z$$

verving ik x y en z respectievelijk door $[\alpha l]$, $[\beta l]$ $[\gamma l]$ om f_i te verkrijgen in den vorm van eene lineaire uitdrukking der meetuitkomsten l, welke geacht worden geheel onafhankelijk van elkaar te zijn. Dan is:

$$M^2{}_{fi} = \left\{1 - 2\,(a_i\, \alpha_i + b_i\, \beta_i\, c_i\, \gamma_i)\right\} \frac{\mu^2}{g_i} + \left[(a_i\, \alpha + b_i\, \beta + c_i\, \gamma)^2 \frac{\mu^2}{g}\right]$$

Het zou nu de aangewezen weg van herleiding dezer uitdrukking zijn om gebruik te maken van de bekende betrekkingen bestaande tusschen de coëfficienten α, β, γ en a, b, c en de gewichtsgetallen Q, nl.

$$\alpha = g\,(a\, Qxx + b\, Qxy + c\, Qxz)$$
$$\beta = g\,(a\, Qxy + b\, Qyy + c\, Qyz)$$
$$\gamma = g\,(a\, Qxz + b\, Qyz + c\, Qzz)$$

ten einde te bewijzen, dat

$$\left[a_i\, \alpha + b_i\, \beta + c_i\, \gamma)^2 \frac{1}{g}\right] = \frac{a_i\, \alpha_i + b_i\, \beta_i + c_i\, \gamma_i}{g_i}$$

Ik stel mij evenwel voor deze gelijkheid rechtstreeks af te leiden uit de minimumvoorwaarde der vereffening:

$$[g\,(l - ax - by - cz)^2] = \text{minimum}.$$

Worden ook hierin x, y en z vervangen door $[\alpha l]$, $[\beta l]$ en $[\gamma l]$, dan ontstaat na uitwerking en samenvoeging der gelijke machten en producten der grootheden l eene uitdrukking van den vorm $\Sigma\,\Sigma\, C^{\nu}_{\mu}\, l_\mu\, l_\nu$, welke voor het juiste stel coëfficienten α, β, γ een minimale waarde heeft. Ik merk hierbij op, dat de coëfficienten α, β, γ aan deze minimumvoorwaarde hebben te voldoen onafhankelijk van de bijzondere waarden welke de metingen voor de grootheden l opleverden. Uit deze opmerking volgt, dat de partieele afgeleiden van C^{ν}_{μ} naar elk der coëfficienten α, β, γ nul opleveren bij substitutie van de juiste waarden dezer coëfficienten.

Door uitwerking en rangschikking van de termen der minimumvoorwaarde wordt verkregen:

$$C^{\nu}_{\mu} = 2\,[g\,(a\alpha_\mu + b\beta_\mu + c\gamma_\mu)(a\alpha_\nu + b\beta_\nu + c\gamma_\nu)] -$$
$$- 2\, g_\mu\,(a_\mu \alpha_\nu + b_\mu\, \beta_\nu + c_\mu\, \gamma_\nu) - 2\, g_\nu\,(a_\nu\, \alpha_\mu + b_\nu\, \beta_\mu + c_\nu\, \gamma_\mu)$$

De uitdrukking $[g\,(a\,\alpha_\mu + b\,\beta_\mu + c\,\gamma_\mu)\,(a\,\alpha_\nu + b\,\beta_\nu + c\,\gamma_\nu)] = F$ gesteld zijnde, geven de voorwaarden voor het minimum de volgende vergelijkingen:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_\mu} = g_\nu a_\nu \frac{\partial F}{\partial \beta_\mu} = g_\nu b_\nu \frac{\partial F}{\partial \gamma_\mu} = g_\nu c_\nu$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_\nu} = g_\mu a_\mu \frac{\partial F}{\partial \beta_\nu} = g_\mu b_\mu \frac{\partial F}{\partial \gamma_\nu} = g_\mu c_\mu$$

Zulk eene uitdrukking F, die, voor zoover de coefficienten $\alpha\,\beta\,\gamma$ er in optreden, alleen producten bevat van één der $\alpha_\mu\,\beta_\mu\,\gamma_\mu$ met één der $\alpha_\nu\,\beta_\nu\,\gamma_\nu$ laat zich als lineaire uitdrukking in elk dier stellen van coëfficienten op de volgende wijzen schrijven:

$$F = \alpha_\mu \frac{\partial F}{\partial \alpha_\mu} + \beta_\mu \frac{\partial F}{\partial \beta_\mu} + \gamma_\mu \frac{\partial F}{\partial \gamma_\mu} = \alpha_\nu \frac{\partial F}{\partial \alpha_\nu} + \beta_\nu \frac{\partial F}{\partial \beta_\nu} + \gamma_\nu \frac{\partial F}{\partial \gamma_\nu}$$

Zoodat wij door substitutie der uit het minimum voortgevloeide vergelijkingen de volgende betrekking verkrijgen:

$$F = g_\nu (a_\nu \alpha_\mu + b_\nu \beta_\mu + c_\nu \gamma_\mu) = g_\mu (a_\mu \alpha_\nu + b_\mu \beta_\nu + c_\mu \gamma_\nu)$$

In woorden luidt deze betrekking, dat bij gelijke gewichten zekere fout in l_μ gelijken invloed heeft op de schijnbare fout f_ν, als eene even groote fout in l_ν heeft op de schijnbare fout f_μ. Indien de gewichten der beide meetuitkomsten ongelijk zijn, zullen fouten in deze, welke met hare gewichten omgekeerd evenredig zijn, elkanders schijnbare fouten evenveel doen afwijken van de ware.

Stellen wij in de voorwaarde

$$[g\,\{l - a\,[\alpha l] - b\,[\beta l] - c\,[\gamma l]\}^2] = \text{minimum}$$

$l_i = 1$ en alle andere grootheden $l = 0$, dan ontstaat daaruit

$$g_i\,(1 - 2a_i\alpha_i - 2b_i\beta_i - 2c_i\gamma_i) + [g\,(a\alpha_i + b\beta_i + c\gamma_i)^2] = \text{min.}$$

uit welke men $[g\,(a\alpha_i + b\beta_i + c\gamma_i)^2] = G$ stellende, afleidt:

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha_i} = 2g_i a_i \quad \frac{\partial G}{\partial \beta_i} = 2g_i b_i \quad \frac{\partial G}{\partial \gamma_i} = 2g_i c_i$$

en hieruit volgt dan weer:

$$G = \frac{1}{2}\alpha_i \frac{\partial G}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{2}\beta_i \frac{\partial G}{\partial \beta_i} + \frac{1}{2}\gamma_i \frac{\partial G}{\partial \gamma_i} = g_i\,(a_i\alpha_i + b_i\beta_i + c_i\gamma_i)$$

Met behulp van de bovenafgeleide stelling kan in de uitdrukking $[g\,(a\alpha_i + b\,\beta_i + c\,\gamma_i)^2]$ elke term der sommeering worden vervangen door eene overeenkomstige in welke de vaste index i wordt gegeven aan de coëfficenten $a\,b\,c$, derhalve:

$$G = \left[\frac{g_i^2}{g}\,(a_i\,\alpha + b_i\,\beta + c_i\,\gamma)^2\right] = g_i\,(a_i\,\alpha_i + b_i\,\beta_i + c_i\,\gamma_i)$$

waaruit na deeling door g_i^2 de betrekking voortvloeit, welke ik bewijzen zou.

Gebruik makende van deze betrekking wordt gevonden:

$$M_{h^2} = (1 - a_i\,\alpha_i - b_i\,\beta_i - c_i\,\gamma_i)\frac{\mu^2}{g_i}.$$

Noemen wij $a\,\alpha + b\,\beta + c\gamma = \varkappa$, dan is $f\sqrt{\frac{g}{1-\varkappa}}$ uit elke schijnbare fout te berekenen en de middelbare waarde van dit foutensysteem is gelijk μ evenals die van het systeem der onbekende fouten $h\sqrt{g}$. Het schijnt mij daarom niet alleen geoorloofd, maar voor een toets der gewichten zelfs doelmatig, dit foutenstelsel op te maken, hetwelk toelaat de middelbare fout der gewichtseenheid af te leiden uit elk bepaald gedeelte dier fouten. Het verband tusschen de grootheden $\varkappa$ en het getal k der eerstgenoemde, door mij aangewende formule laat zich door $\Sigma\,\varkappa = k$ aangeven.

Plantkunde. — De Heer S. H. Koorders biedt een mededeeling aan: *„Bijdrage N°. 1 tot de kennis der Flora van Java."* (4de Vervolg)[1]).

§ 7. Plantae Junghuhnianae ineditae. I. Opmerkingen over eenige javaansche soorten van eene in 's Rijks Herbarium te Leiden aangetroffen collectie onbewerkt gebleven Junghuhn'sche planten.

Eenige maanden geleden werd bij het zoeken naar eenige door mij benoodigde herbariumexemplaren van Junghuhn'sche hooggebergteplanten van Java in 's Rijks Herbarium te Leiden, door een der daaraan verbonden ambtenaren, bij de afzonderlijk bewaarde collectiën *„Indeterminata"* eene nogal omvangrijke collectie van Junghuhn gevonden, welke reeds in 1896 (gedurende een kortstondig verblijf te Leiden) op verzoek van den Heer Dr. J. Valckenier Suringar, door mij voorloopig gedetermineerd was geworden, maar welke collectie overigens geheel ongedetermineerd was gebleven.

Aangezien ik in die collectie een aantal javaansche hooggebergte planten opmerkte en het mij nuttig scheen de collectie in haar geheel te bestudeeren, besloot ik de in 1896 door mij aangevangen determinatie te voltooien en de resultaten mijner bewerking in het licht te geven. Die resultaten zijn, voor zoover eene enumeratio der Javaansche specimina betreft, persklaar, maar zullen later gepubliceerd worden; slechts enkele opmerkingen over deze Junghuhn'sche collectie laat ik hier volgen.

De geheele collectie bestond uit een 15-tal groote pakketten en uit ruim 560 inzamelingsnummers.

---

[1]) Vervolg van p. 129 van dit Verslag

Zooals met zeer vele oude herbariumcollecties het geval is, liet ook de etiketteering der specimina van een groot deel dezer verzameling te wenschen over. Daartegenover stond, dat enkele exemplaren van uitvoerige, door JUNGHUHN eigenhandig geschreven inzamelingsetiketten voorzien waren. Met enkele uitzonderingen waren nagenoeg alle specimina geheel ongedetermineerd (ook zonder familie of geslachts-determinatie). En de meeste specimina waren ook niet van een inzamelingsnummer op de etikette voorzien. Daarom werd onlangs, in overleg met Dr. J. C. GOETHART, Conservator van 's Rijks Herbarium besloten om deze geheele collectie „*Plantae Junghuhnianae ineditae*" doorloopend te nummeren en wel onafhankelijk van de soms reeds aanwezige oude, maar door geen lijst of publicatie toegelichte nummers, en een gedrukte etikette bij de javaansche exemplaren bij te voegen, o.m. van den volgenden inhoud: „*Plantae Junghuhnianae ineditae*". *In insula Java legit* Dr. FR. JUNGHUHN *anno* 1838—1863 *sub n....*" Behalve het woord „Sumatra" in plaats van „Java" zijn de etiketten der sumatraansche exemplaren dezer verzameling met dergelijke etikette voorzien.

Waarom deze omvangrijke collectie JUNGHUHN'sche planten zoo vele tientallen jaren geheel onbewerkt is blijven liggen en nooit in handen geweest schijnt te zijn van MIQUEL, is mij niet met zekerheid bekend geworden. Ik vermoed, 1e dat de buiten op de collectie, met een onbekende hand aangeteekende ontvangst „uit Bandong" van JUNGHUHN eerst plaats gehad heeft òf in het tijdvak 1855—1864 òf na den dood van JUNGHUHN, dus na 1864 en voorts, 2e dat deze onbewerkte collectie door een of ander toevallige omstandigheid tusschen de reusachtige hoeveelheden materiaal in 's Rijks Herbarium te Leiden op den achtergrond geraakte en dientengevolge tijdens het beheer van 's Rijks Herb. door MIQUEL (1862—1871) niet teruggevonden werd.

Want indien die collectie in handen geweest ware van een zóó goed kenner der O. I. Flora als MIQUEL. dan zoude hij m. i. daarin zonder twijfel de toen nog voor de Flora van Java nieuw zijnde hieronder vermelde 9 soorten dadelijk ontdekt hebben, welke in 1896 daarin in ongedetermineerden toestand door mij gevonden werden, en dan zouden die soorten in de publicatie [1]) „*Plantae Jung-*

---

[1]) De volledige titel van genoemde publicatie is: *Plantae Junghuhnianae. Enumeratio plantarum quas in insulis Java et Sumatra detexit* FR. JUNGHUHN, *Leiden*, 1854. In den Index Kewensis wordt zij dikwijls geciteerd als MIQUEL Pl. Jungh., ofschoon MIQUEL's naam niet op den titel voorkomt. De meeste der in die publicatie behandelde phanerogamen zijn door MIQUEL zelf, eenige andere families door anderen bewerkt, o.a. door BENTHAM (*Leguminosae*), MOLKENBOER (*Loranthaceae*), W. H. DE VRIESE (*Primulaceae, Dipterocarpaceae*, etc.), HASSKARL

huhnianae" van 1854 en ook in de andere publicaties van MIQUEL (o. a. Flora Ind. Bat., Ann. Mus. bot. Lugd. Bat., etc.) voor de Javaansche flora niet onvermeld zijn gebleven.

Als zoodanig noem ik de volgende soorten:

Pl. Jungh. inedit. n. 368, 380, 381, 385 en 394 = *Turpinia parva* KOORD. et VALETON (in 1903 het eerst gepubliceerd); Pl. Jungh. ined. n. 545 = *Ilex Hookeri* KING (ook thans in de literatuur nog niet voor Java vermeld), *Itea macrophylla* Wall. (toen nog niet voor Java bekend); Pl. Jungh. ined. n. 207 = *Aglaia heptandra* KOORD. et VALETON (in 1896 het eerst gepubliceerd); Pl. Jungh. ined. n. 91 et 103 = *Mallotus campanulatus* J. J. SMITH (het eerst in 1907 in Icones Bogoriensis gepubliceerd); Pl. Jungh. ined. n. 113 = *Ostodes macrophylla* BENTH. et HOOK (ook nù nog niet in de literatuur voor Java bekend); Pl. Jungh. ined. n. 462 = *Elaeocarpus Griffithii* A. GRAY (toen nog niet voor Java bekend); Pl. Jghn. ined. n. 438 = *Saurauja dasyantha* DE VRIESE (in de literatuur ook nu nog niet voor Java vermeld); Pl. Jghn. ined. n. 256 = *Eugenia cuprea* KOORD. et VALETON (in 1900 voor het eerst gepubliceerd); Pl. Jghn. ined. n. 426 = *Symplocos Junghuhnii* (hieronder voor het eerst gepubliceerd).

De soortbeschrijving volgt hieronder:

Symplocos Junghuhnii KOORD., nova spec. — Arbor ramulis glabris. Folia tenuiter coriacea, supra glaberrima, subtus praeter costam laxe appresse pilosam glabra; 12—15 cm. longa et 4—5 cm. lata, subintegra v. valde indistincte serrulata, basi angustata, apice sensim vel abrupte acute acuminata; nervis secundariis plerumque impressis, petiolo 1—1$^1/_2$ cm. longo. Racemi simplices axillares et terminales villosi petiolo 4—5-plo longiores; bracteae ovato-acutae extus basi puberulae calycem aequantes; pedicelli calyce paullo breviores, calycis tubus extus villosus, lobi rotundati glabri marginibus ciliatis, corolla calyce duplo longior utrinque glabra stamina ultra; 100 satis distincte

---

(*Commelynaccae, Amaranthaceae*), BÜSE (*Graminae*), BURGERSDIJK (*Violaceae*), en A. J. DE BRUYN (*Polygonaceae*).

De meergenoemde publicatie *Plantae Jungh. Enumeratio plant. etc.* (1854) staat in den catalogus van de bibliotheek van 's Rijks Universiteit te Leiden vermeld als verschenen 1851—1855. Ik vond echter op het eenige in het 's Rijks Herbasium aangetroffen exemplaar het jaar 1854 als jaar van publicatie vermeld. Dit ingebonden exemplaar eindigt met p. 552, terwijl bleek, dat het aan de Kon. Acad. van Wetensch te Amst. toebehoorende exemplaar dezer, naar het schijnt, ontijdig gestaakte publicatie iets vollediger is, nl. tot p. 570 doorloopt. Evenwel eindigt dit minder onvolledige exemplaar der Kon. Acad. v. W. p. 570 *midden in een woord* en is dus blijkbaar evenmin een afgerond geheel als het te Leiden door mij gevonden exemplaar. En als jaar van uitgave staat op den titel van dat laatste exemplaar het jaar 1853 gedrukt.

pentadelpha; filamenta filiformia glaberrima; ovarium 3-loculare glabrum, stylus glaber; fructus ignotus.

West-Java (Preanger). — Pl. JUNGH. ined. n. 426 in Herb. L. B.

In blad gelijkt deze soort zeer veel op *Sympl. Henschelii* BRAND [in Engler Monogr. Symploc. Pflanzenw. IV. 242. (1901) 89], maar de bloembouw is, zooals uit bovenstaande diagnose blijkt, verschillend.

In het systeem der Symplocacae van BRAND l.c. zal de soort geplaatst moeten worden in het subgenus *Hopea* (L. f.) CLARKE en wel in de sectie *Bobua* (DC.) BRAND. en vermoedelijk in de subsectio *Palura* (Buch.-Hamilt.) BENT, et HOOK. onmiddellijk naast *Symplocos ribes* JUNGH. et DE VRIESE [in DE VRIESE, Pl. nov. Ind. bat. (1845) 11; BRAND l.c. 39.] Door het buitengewoon groot aantal (100) meeldraden schijnt mij *Symplocos Junghuhnii* van *S. ribes* en van de eveneens aan deze species min of meer verwante javaansche soorten *S. aluminosa* BLUME BRAND l.c., S. *odoratissima* (BL.) Choisy en *S. sessilifolia* (BL.) GÜRKE verschillend.

De eveneens verwante op de Filippijnen voorkomende *S. polyandra*, BRAND. l.c. 36, die ook ca 100 meeldraden heeft, onderscheidt zich van deze javaansche plant o.m. door „paniculae" in plaats van „racemi simplices."

MIQUEL heeft blijkbaar in 1856 het plan gehad om een tweede stuk als vervolg op de in 1854 uitgegeven publicatie (*Pl. Jungh, Enum. pl.*) te bewerken. Dit blijkt o. a. daaruit, dat hij in zijne Flora Ind. Bat. II (1856) p. 1053 citeert „Pl. Jungh. I. p. 84". De thans door mij bewerkte publicatie over de Pl. Jghn. ined. zoude dus misschien als „Pl. Jungh. II" aangeduid kunnen worden. Aangezien evenwel op het eenige in 1854 uitgegeven eerste stuk niet speciaal aangegeven is, dat het stuk I is, heb ik voor de duidelijkheid mijne thans in het licht gegeven publicatie niet eveneens als Pl. JUNGH., maar als *Plantae Junghuhnianae ineditae*" aangeduid.

Deze laatste omschrijving vond ik het eerst vermeld in MIQUEL Fl. Ind. Bat. I. 2. (1859) p. 356. Dáár is een door JUNGHUHN op Java in de hooge bergstreken verzameld en door mij in het Herbarium der Rijks universiteit te Utrecht aangetroffen authentiek herbarium-exemplaar van *Flueggea serrata* MIQ. voor het eerst beschreven en geciteerd als *Pl. Jungh. inedit.*

Op de authentieke, te Leiden berustende authentieke gedrukte herbarium-etiketten der in genoemde publicatie (*Pl. Jungh. Enum. pl.*, 1854) behandelde soorten komen volgnummers voor, die met genoemde publicatie correspondeeren en soms ook in latere publicaties als *Pl. Jungh. n.* 1, 2, 3, etc. aangehaald worden. Ten einde nu elke

mogelijke vergissing met die nummers te voorkomen heb ik voor de thans door mij bewerkte collectie de specimina als volgt geciteerd: *Pl. Jungh. ined. n.* 1, 2, etc.

Het aantal der op Java uitsluitend in de hoogste bergstreken voorkomende soorten, dat in de meergenoemde collectie door mij aangetroffen werd, is niet groot. Toch vond ik verscheidene meer of minder karakteristieke javaansche hooggebergteplanten daarin door soms zeer rijk ingezamelde specimina vertegenwoordigd. Als zoodanig kunnen hier o.m. de volgende genoemd worden: *Urtica grandidenta* MIQ., *Thalictrum javanicum* BL., *Myrica javanica* BL., *Euphorbia Rothiana* SPRENG., *Viola serpens* WALL., *Leptospermum iavanicum* BL., *Clethra canescens* REINW., *Leucopogon javanicus* (JUNGH.) DE VRIESE, *Lysimachia ramosa* WALL. var. *typica* KNUTH., *Primula imperialis* JUNGH., *Buddleia asiatica* LOUV., *Vaccinium Teijsmanni* MIQ., *Vaccinium varingaefolium* MIQ., *Rhododendron retusum* BENN., *Lonicera oxylepis* MIQ., etc.

Bij sommige specimina der thans bewerkte collectie vond ik etiketten, waarop vermoedelijk ongeveer een halve eeuw geleden met de hand van wijlen Professor W. H. DE VRIESE aangeteekend was: „*legit Junghuhn, herb. de Vriese*". Het schijnt dus, dat vóórdat 's Rijks Herbarium te Leiden deze Junghuhn'sche collectie door koop of door geschenk verwierf, zij geheel of gedeeltelijk deel uitmaakte van dat herbarium.

De determinatie der meergenoemde JUNGHUHN'sche collectie werd door mij in hoofdzaak te Leiden met behulp van het vergelijkingsmateriaal van 's Rijks Herbarium ten uitvoer gebracht en voor enkele zeldzame soorten met behulp van de collecties van het Herbarium van de Rijks-Universiteit te Utrecht.

Leiden, 23 Juni 1908.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt voor de werken der Akademie eene verhandeling aan van den Heer Prof. Dr. MAX BRÜCKNER te Bautzen i/S: „*Ueber die Ableitung der allgemeinen Polytope in R_4 und die nach Isomorphismus verschiedenen Typen der allgemeinen Achtzelle (Oktatope).*"

In handen gesteld van de Heeren SCHOUTE en CARDINAAL om advies.

Scheikunde. — De Heer HOOGEWERFF biedt voor de werken der Akademie eene verhandeling aan van den Heer Dr. W. VAN DAM, assistent aan het Rijkslandbouwproefstation te Hoorn: „*Bijdrage tot de kennis van de lebstremming.*"

In handen gesteld van de Heeren PEKELHARING en HOOGEWERFF om advies.

Plantkunde. — De Heer MOLL biedt voor de werken der Akademie eene verhandeling aan van den Heer Dr. J. C. SCHOUTE: *„Die Bestockung des Getreides."*

In handen gesteld van de Heeren MOLL en WENT om advies.

Voor de Bibliotheek wordt aangeboden door den Heer VAN DER STOK: *a.* „Oceanographische en meteorologische waarnemingen in den Indischen Oceaan, Sept., Oct., Nov. 1856—1904." *b.* E. VAN EVERDINGEN: „De uitkomsten der weersverwachtingen van het Kon. Nederl. Meteorologisch Instituut in 1904 en 1905 en in den zomer van 1907"; 2°. door den Heer PRINSEN GEERLIGS: Deel I, 2de druk van het „Handboek ten dienste van de suikerriet-cultuur en de rietsuiker-fabricatie op Java."

De vergadering wordt gesloten.

(13 Juli, 1908).

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

BIJVOEGSEL

AAN HET

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 27 Juni 1908.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling N°. 108, uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: *„Het vloeibaarmaken van het helium."*

§ 1. *Methode.* Als eerste stap op den weg naar het vloeibaar maken van het helium wees de theorie van VAN DER WAALS het bepalen der isothermen er van aan, in 't bijzonder bij de temperaturen, die met vloeibare waterstof te bereiken zijn. Uit de isothermen kunnen, zooals VAN DER WAALS in zijne dissertatie o.a. voor de toen nog niet vloeibaar gemaakte permanente gassen van FARADAY deed, de kritische grootheden worden berekend, hetzij door eerst a en b te bepalen, of wel door de wet der overeenstemmende toestanden toe te passen. De voorwaarden voor het vloeibaar maken van het onderzochte gas zijn met behulp van de kritische grootheden, volgens de beschouwingen van Med. N°. 23 (Jan. 1896), op te sporen door uit te gaan van een ander gas met hetzelfde aantal atomen in het molecuul, dat in een bepaalden toestel vloeibaar gemaakt is. Door een overeenstemmend proces in een gelijkvormigen toestel, zal dan ook het onderzochte gas vloeibaar gemaakt kunnen worden.

Het JOULE-KELVIN effect, dat bij het vloeibaar maken van gassen wier kritische temperatuur beneden de laagste temperatuur, tot welke men blijvend afkoelen kan, ligt, zulk een groote rol speelt, kan, als ten minste de specif. warmte in den gastoestand niet onbekend is,

uit de isothermen berekend worden, en de bepaling er van, schoon omslachtiger dan die der isothermen, kan eene belangrijke contrôle op deze metingen zijn. Zal er van statisch vloeibaar maken van het gas met behulp van het JOULE-KELVIN effect sprake zijn, dan moet dit in allegevalle bij de laagste reeds bereikbare temperatuur eene afkoeling geven, wat, gelijk in bovengenoemde Mededeeling werd aangetoond, bij soortgelijke gassen bij overeenstemmende toestanden het geval zal worden, terwijl bij vergelijking van een eenatomig gas met een tweeatomig, het eerste in het voordeel zal zijn.

Maar met het teeken van het JOULE-KELVIN effect onder bepaalde omstandigheden is de vraag, of een proef betreffende het statisch vloeibaar maken van een gas zal gelukken, nog niet uitgemaakt. *Theoretisch* gesproken zal wel, wanneer er bij eene bepaalde temperatuur een afkoeling door het JOULE-KELVIN effect, hoe gering dan ook, verkregen kan worden, door een adiabatisch proces met regeneratorspiraal en expansiekraan bij voorafgaande afkoeling van het gas tot die temperatuur, vloeistof verkregen kunnen worden. Doch zoolang men te dicht bij het omkeerpunt blijft, zal het JOULE-KELVIN effect een gering bedrag hebben; de processen, bij welke werkelijk met een toestel van deze soort gas in statischen toestand vloeibaar verkregen is, zooals die, welke op lucht door LINDE en HAMPSON en op waterstof door DEWAR zijn toegepast, verloopen dan ook bij veel lager gereduceerde temperatuur nl. bij ongeveer de helft van de gereduceerde temperatuur, waarbij het teeken van het JOULE-KELVIN effect bij kleine dichtheden omkeert, of juister, iets beneden het BOYLE-*punt*, d. w. z. die temperatuur, waarbij het minimum van *pv* bij zeer kleine dichtheden valt. En practisch is het dus volgens bovengenoemde stelling de vraag of de laagste temperatuur, over welke men beschikt, beneden dit, uit de isothermen te berekenen, BOYLE-*punt* ligt en het JOULE-KELVIN effect derhalve een voldoend bedrag heeft om in een bepaalden toestel en in een bepaalden tijd eene merkbare hoeveelheid vloeistof te leveren.

Voor ongeveer drie jaren was ik met de onderzoekingen, die naar de isothermen van het helium voerden, zoover gereed, dat deze bepalingen zelve met vrucht terhand genomen konden worden.

Eene groote moeilijkheid bleef eerst nog het verkrijgen van voldoende hoeveelheden van dit gas. Gelukkig wist het Bureau van Handelsinlichtingen te Amsterdam onder directie van mijn broeder, den Heer O. KAMERLINGH ONNES, wien ik daarvoor hartelijk dank, in het monazitzand het als grondstof voor de bereiding meest geschikte handelsartikel op te sporen en mij de gelegenheid te openen groote hoeveelheden daarvan op gunstige voorwaarden aan te schaffen. Daar

het monazitzand weinig kostbaar is, werd de bereiding van zuiver helium op ruime schaal dus verder voornamelijk een zaak van volharding en zorg.

Tot de bepaling van isothermen van het helium kwam het eerst in 1907.

De uitkomsten der isothermenbepalingen waren zeer verrassend. Zij maakten het zeer waarschijnlijk, dat het JOULE-KELVIN effect bij het smeltpunt van waterstof niet alleen eene duidelijke afkoeling zou geven, maar dat deze zelfs aanzienlijk genoeg zou zijn om een LINDE-HAMPSON proces te doen slagen.

Vóór dat de isothermenbepalingen waren verricht, had ik tengevolge van het mislukken van OLZEWSKI's en DEWAR's pogingen om het helium vloeibaar te maken daarover geheel anders gedacht en zelfs ernstig rekening gehouden met de mogelijkheid, dat de kritische temperatuur van het helium, zooal niet bij het absolute nulpunt, dan toch wel eens uiterst laag kon liggen. Om ook in dit geval toch de lagere temperaturen te kunnen verkrijgen, die o. a. voor het voortzetten der isothermen bepalingen beneden de met vaste waterstof te verkrijgen temperaturen noodig zouden zijn, had ik mij bijv. bezig gehouden met het ontwerpen van een heliummotor (verg. Med. N°. 23), bij welke een vacuumglas als zuiger in een ander als cylinder heen en weer zou gaan. En toen het zinken van samengeperst helium in vloeibare waterstof werd waargenomen (Med. N°. 96, Nov. 1906), heb ik mij ook weder gemakkelijk laten lokken op denzelfden dwaalweg van het onderstellen van een zeer lage kritische temperatuur.

Intusschen was ik er steeds van overtuigd gebleven, dat alleen de bepaling der isothermen kon uitmaken, hoe het helium vloeibaar gemaakt zou kunnen worden. Er was dan ook voortgegaan met hetgeen kon dienen om van een gunstige uitkomst voor de kritische temperatuur onmiddellijk partij te kunnen trekken. Zoo werd o. a. doorgewerkt aan het vervaardigen van een (beneden het omkeerpunt in allegevalle te gebruiken) regeneratorspiraal met expansiekraan in vacuumglas en aan de bereiding van zuiver helium. Van het laatste was langzamerhand zelfs eene hoeveelheid verzameld groot genoeg om eene bepaling van het JOULE-KELVIN effect met een reeds in voorloopige onderzoekingen op de proef gestelden toestel mogelijk te maken en om doelmatige expansieproeven te kunnen verrichten.

Al deze voorbereidingen bleken op eens van het grootste nut toen in het vorige jaar (Med. N°. 102[a]) de isothermen voor de kritische temperatuur 5° K. tot 6° K. gingen aanwijzen, een bedrag, dat volgens latere berekeningen, waarover eene volgende Mededeeling zal handelen, nog wel iets (bijv. 0,5°) hooger gesteld had kunnen worden,

en dat in overeenstemming kwam met de sterke toename van de absorptie van helium door kool bij waterstoftemperaturen, op grond waarvan DEWAR de kritische temperatuur van het helium op 8° K. geschat had. Want nu was het volgens de bovengenoemde stelling niet meer onmogelijk te achten het helium met behulp van een regenerator-spiraal vloeibaar te maken, al was dit ook in strijd met de laatste proeven van OLSZEWSKI, die de kritische temperatuur beneden 2° stelde.

Wel was de uitspraak der isothermen niet ondubbelzinnig. Het kwam mij voor, dat de isothermen bij de laagste temperatuur een lagere kritische temperatuur leverden dan uit de isothermen bij de hoogere temperaturen volgde, wat aan eigenaardigheden te wijten is, die door de bepaling van nieuwe punten op de isothermen later bevestigd zijn geworden. Er was dus ruimschoots aanleiding tot de vrees, dat het helium op eigenaardige wijze van de wet der overeenstemmende toestanden afweek en dat nog lagere isothermen dan de reeds bepaalde, ook een nog lagere kritische temperatuur dan 5° K zouden geven, en naar mate de kritische temperatuur naar lagere temperaturen liep, werd de kans om het helium bij de laagste met vloeibare waterstof bereikbare temperaturen (vaste waterstof brengt nieuwe complicaties mede) met behulp van het JOULE-KELVIN effect vloeibaar te kunnen maken, geringer. Die vrees kon ook niet weggenomen worden door de expansieproef, die ik voor eenige maanden verrichtte, en bij welke ik een vloeistofneveltje had meenen waar te nemen. Want in de eerste plaats kon alleen door een opzettelijk onderzoek worden uitgemaakt of het wolkje sterk genoeg, en of de spectroscopisch nog aan te toonen sporen waterstof gering genoeg waren, om aan het verschijnsel beteekenis te mogen hechten. En in de tweede plaats was het neveltje wel zeer zwak, wat op eene lagere kritische temperatuur, dan afgeleid was, kon wijzen.

Het bleef dus eene zeer spannende vraag, wat de kritische temperatuur van het helium zou zijn. En in elke richting waarin men, nadat de onderhanden genomen isothermen zouden zijn afgewerkt, daaromtrent meer kennis zou willen trachten te verkrijgen, deden zich groote moeielijkheden voor.

Waar deze echter in het inrichten van een kringloop met afgekoeld helium bestonden, kon de sedert jaren aan het inrichten der Leidsche cascade voor nauwkeurige metingen besteede arbeid aan het overwinnen er van ten goede komen. Op dit punt gekomen besloot ik dan ook mij het bereiken van het einde van den weg in eens ten doel te stellen en te beproeven met eene circulatie, zooveel mogelijk „gelijkvormig" aan de door mij ingerichte waterstofcirculatie het statisch vloeibaar maken van het helium te beproeven.

Ik gaf mij daarbij wel degelijk rekenschap van de moeilijkheden om aan de verschillende voorwaarden voor het welslagen te gelijk te voldoen. Immers lag de bereikbare voorafgaande afkoeling nog maar even binnen de grens waarbij zij nog doel treffen kon, ook met de overige omstandigheden, die verwezenlijkt konden worden, was het niet gunstiger gesteld.

Natuurlijk werd de schaal, waarop de voor de proef bestemde toestel, in navolging van den toestel, die mij bij waterstof doelmatig was gebleken, gebouwd zou worden, niet alleen in overeenstemming met de kleiner geschatte waarde van *b* kleiner gekozen, maar zoo klein mogelijk genomen. Dat het verkleinen van HAMPSON's spiraal geen afbreuk aan de werking er van doet was door vroegere proeven gevonden, en is zeer duidelijk bewezen door wat OLSZEWSKI omtrent de doelmatigheid van zijne kleine waterstof-toestellen mededeelt. Beneden eene zekere grens van verkleinen kon ik echter niet gaan, zonder in constructievraagstukken te vervallen, omtrent welke de waterstoftoestel geene ervaring had gegeven. Men moest er zeker van blijven, dat de capillairen niet verstoppen zouden, dat de kranen onberispelijk werkten, dat warmtegeleiding, wrijving enz. niet hinderlijk werden. Toen in verband met de beschikbare materialen, de kleinste schaal, bij welke ik nog voldoende vertrouwen op den toestel had, verkleining tot op de helft, was vastgesteld, bleken de afmetingen van de regeneratorspiraal, schoon even klein als die van OLSZEWSKI's spiraal, toch nog zoo groot, dat er van de afmetingen van de noodige vacuumglazen het uiterst bereikbare gevorderd werd; wat temeer in aanmerking kwam, omdat het springen van de vacuumglazen onder de proef niet alleen een alleronaangenaamst incident zoude zijn, doch tevens het werk van vele maanden zoude kunnen vernietigen.

Behalve de moeilijkheden, die de heliumliquefactor zelf opleverde, bood de verdere inrichting van den kringloop, waarin hij zou worden opgenomen, er nog verscheidene andere aan.

Het gas moest door den compressor op hoogen druk worden gebracht en met groote snelheid worden rondgevoerd. Daarbij moest elke verontreiniging vermeden worden, en moesten de ruimten, die met gas op hoogen druk gevuld moesten worden van zoo kleinen inhoud zijn, dat zij slechts op een deel van de beschikbare, uit den aard der zaak geringe, hoeveelheid helium beslag legden.

Als compressor kwam alleen in aanmerking de gewijzigde compressor van CAILLETET, een compressor met kwikzuiger, die voor bewerkingen met zuivere en kostbare gassen was ingericht en in Med. n°. 14 (Dec. 1894) en Med. N°. 54 (Jan. 1900) beschreven is, en

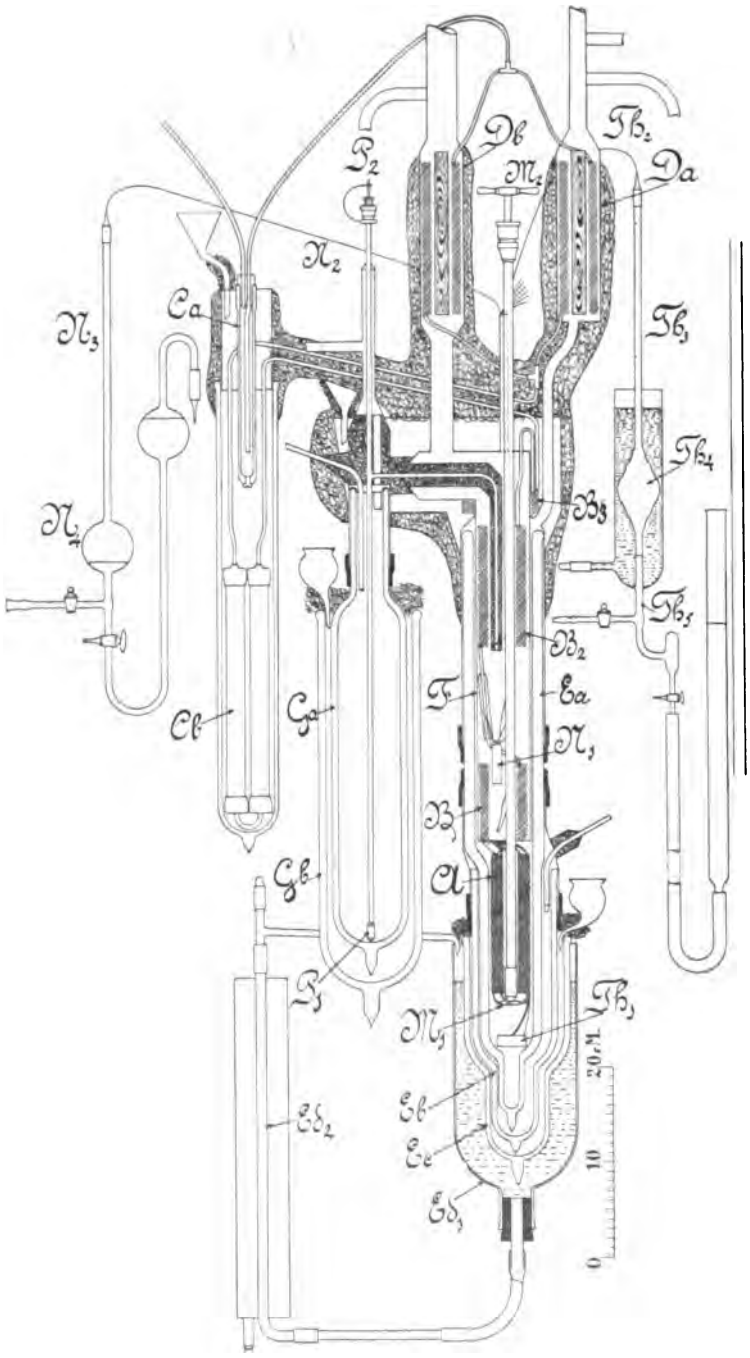
die ook gediend heeft voor het samenpersen van het helium bij de expansieproeven van Maart ll.

Dat hij slechts tot 100 atm. belast kon worden, iets, wat mij vroeger wel eens een nadeel had geschenen, wanneer het tot proeven met het helium zoude komen, was niet meer een bezwaar te achten nadat de isothermenbepalingen geleerd hadden, dat, al wordt de druk van het boven 100 atm. samengeperst helium bij de lage temperaturen ook veel verhoogd, de dichtheid van het gas toch slechts weinig toeneemt. Bij mijne expansieproeven ben ik dan ook niet hooger dan 100 atm. gegaan. De hoogere drukkingen, welke DEWAR en OLSZEWSKI bij hunne expansieproeven toepasten, zijn, omdat zij het gebruiken van een nauwere expansiebuis meebrachten, een bepaald nadeel geweest. Wat de nu in te richten circulatie betrof, bij schatting van den kritischen druk op 7 of 5 atm., al naarmate *b* een derde of de helft van die van waterstof werd gesteld, moest volgens de wet der overeenstemmende toestanden een druk van 100 atm. in de regenerator spiraal als voldoende worden beschouwd.

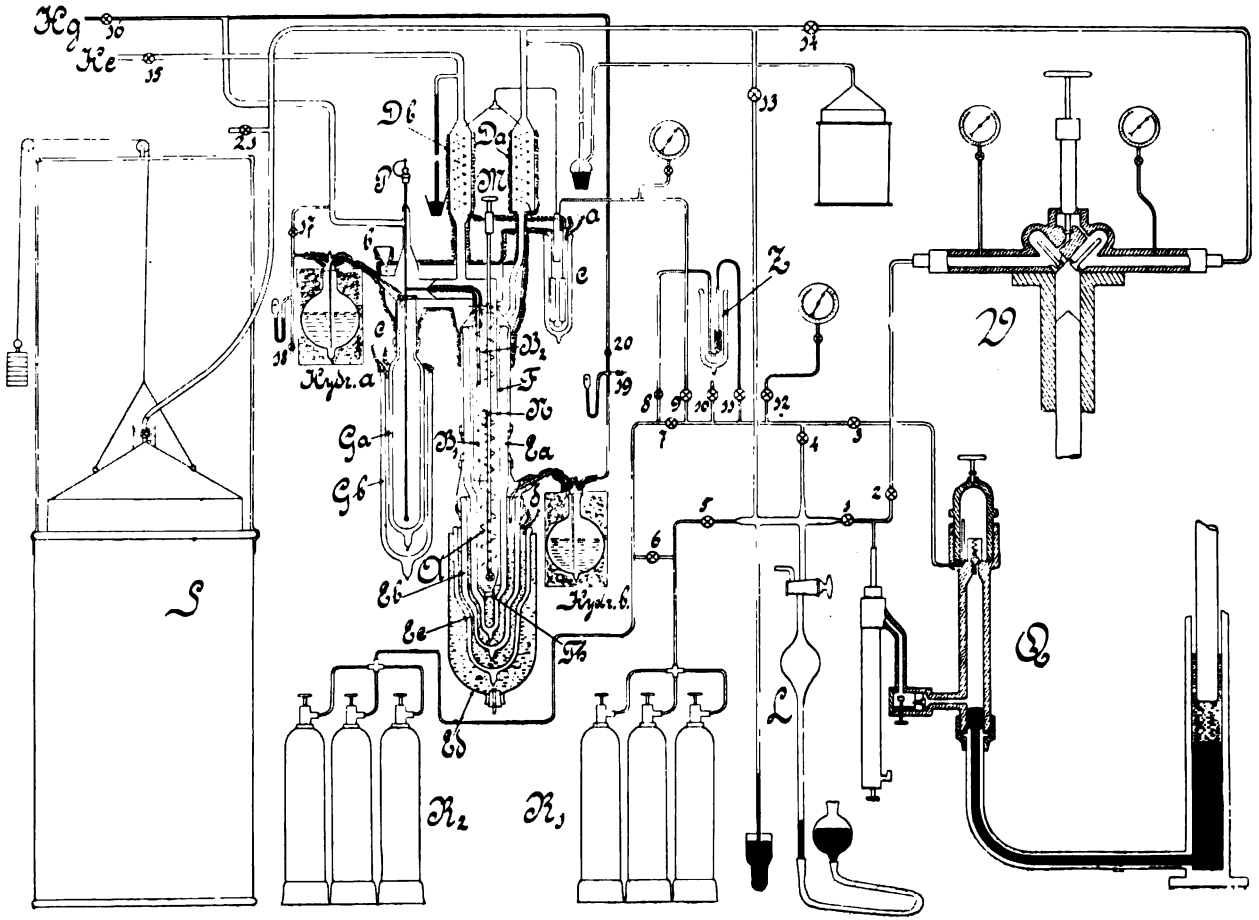
Maar een overwegend bezwaar mocht het geruimen tijd geacht worden, dat de compressor met den hulpcompressor geconjugeerd hoogstens 1400 liter bij de gewone temperatuur gemeten gas per uur rondvoeren kon, $^1/_{16}$ van de verplaatsing bij de waterstofcirculatie. Eerst toen proeven met de laatste verricht waren, bij welke de voorafgaande afkoeling van de waterstof, niet met aan de luchtpomp (dus op — 205°), maar met onder gewonen druk (dus op — 190°) verdampende lucht geschiedde, en bovendien de waterstof compressor 4 maal langzamer liep dan gewoonlijk, en bij deze proeven toch nog vloeibare waterstof verkregen werd, mocht worden aangenomen dat het te verwezenlijken circulatieproces nog voldoende zou zijn om vloeibaar helium te accumuleeren.

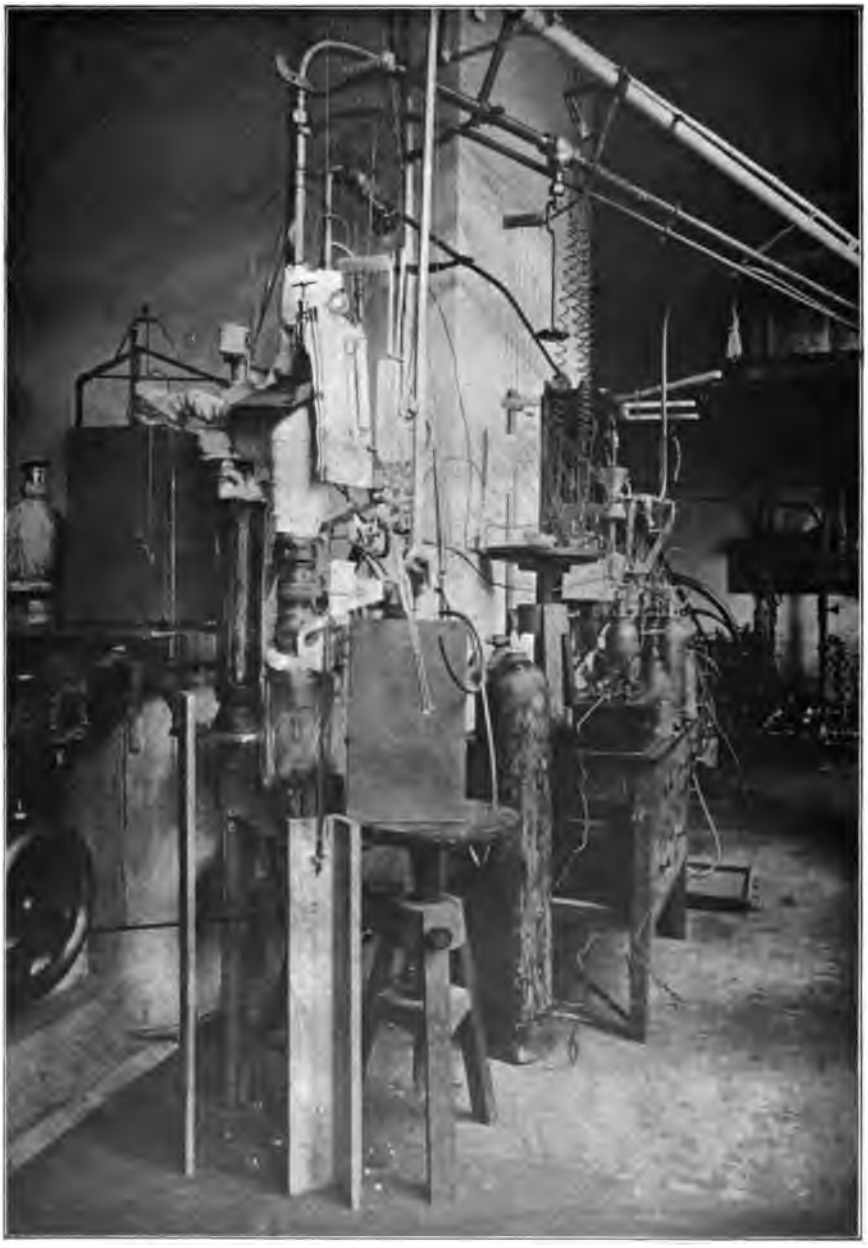
Wat de ruimten in de compressoren, de hulptoestellen, en de geleidingen betreft, die bij het werken op denzelfden druk komen als de regenerator spiraal, hun gezamenlijke inhoud was klein genoeg om de proef te kunnen nemen met een hoeveelheid van 200 liter. Deze hoeveelheid zuiver helium benevens eene reserve kon binnen niet te langen tijd gereed komen.

Een groot bezwaar van geheel anderen aard dan de vorige was daarin gelegen, dat met de beschikbare krachten niet te gelijk de waterstofcirculatie en de heliumcirculatie in bedrijf konden zijn. Wel zijn beide circulaties niet alleen op continu, doch bij voldoende bediening, ook op gelijktijdig gebruik ingericht, maar bij een eerste proef was er niet aan te denken behalve voor de heliumcirculatie ook nog voor de waterstofcirculatie, waarvan de bediening natuurlijk


20 cM.
10
0

Plaat II.





groote ervaring eischt, te zorgen. Op denzelfden dag dus, dat de heliumproef zou gebeuren, moest te voren een voorraad waterstof bereid worden groot genoeg om gedurende den geheelen duur van de heliumproef in de daarbij vereischte afkoeling te voorzien. Het was al weder geleid door de wet der overeenstemmende toestanden, dat de duur der proef en de benoodigde hoeveelheid vloeibare waterstof werden geschat. Zij bleven juist beneden de grens, waarbij het inrichten van de proef op de ontworpen wijze zou moeten worden ontraden, doch, hoe nabij die grens was, is later gebleken.

Bij al deze overleggingen bleef het ten slotte de vraag of op alles, wat bij de proef kon blijken bij de voorbereiding voldoende was gerekend. Zeer welkom was het dus, dat de berekening der laatst bepaalde punten op de isotherme van — 259° kort voor het ondernemen van de proef bevestigde, dat het *Boyle-punt* iets boven deze laagste temperatuur van voorafgaande afkoeling lag en althans de grondslag van de proefneming juist was.

Bij de uitvoering heb ik partij getrokken van verschillende hulpmiddelen, over welke DEWAR ons heeft leeren beschikken. Heb ik elders (Comm. Suppl. N°. 9, Febr. 1904) de groote beteekenis van zijn werk op het gebied van de lage temperaturen in het algemeen uiteengezet, hier is het mij een aangename taak er op te wijzen dat zijne geniale vindingen, het gebruik van verzilverde vacuumglazen, het vloeibaar maken van waterstof, de absorptie van gassen in kool bij lage temperaturen, naast de theorie van VAN DER WAALS, een belangrijk aandeel in het vloeibaar maken van het helium hebben gehad.

§ 2. *Beschrijving van de toestellen.* De inrichting in haar geheel is afgebeeld op Pl. I. Gelijk vermeld, werd zooveel mogelijk bij de constructie van den heliumliquefactor (zie Pl. II en III) op grond van de in Med. N°. 23 ontwikkelde beginselen gevolgd het model van den vroeger (Med. N°. 94*f*, Mei 1906) beschreven waterstofliquefactor, waarheen ik dus in de eerste plaats verwijs. Een bijzondere moeilijkheid leverde het op om de waterstof, die onder 6 cM. druk verdampend het samengeperste helium tot 15° K. (juist even boven het smeltpunt van waterstof) moet afkoelen, in den daarvoor bestemden refrigerator op het juiste peil te houden. Zij werd op de volgende wijze overwonnen.

De vloeibare waterstof wordt niet onmiddellijk uit de voorraad flesschen in den refrigerator, maar eerst, op de vroeger aangegeven wijze, die bij vergelijking van de figuur uit Med. N°. 94*f* geen nadere toelichting vereischt, in een maatglas *Ga* overgebracht, een niet verzilverd vacuumglas, staande in een verzilverd vacuumglas *Gb* met

vloeibare lucht, waarin ter weerszijden over een verticale strook de verzilvering is weggenomen, zoodat men den vloeistofspiegel van de waterstof in het maatglas kan volgen. Uit dit vacuummaatglas wordt de vloeibare waterstof door een regelkraantje *P* overgeheveld in den waterstof refrigerator. Om na te gaan of de vloeistofspiegel in den refrigerator den juisten stand inneemt, is ter hoogte van het waterstofniveau aan de buis, die het samengeperste verder af te koelen helium op een begintemperatuur van — 190° aanvoert, het nieuwzilveren reservoir N_1 van een heliumthermometer gesoldeerd, dat door een stalen capillair N_2 (als in Med. no. 27, Mei 1896) naar een reservoir N_4 met steel N_3 voert. De hoeveelheid helium en de druk zijn zoo geregeld, dat het kwik boven in de steel staat, wanneer het thermometerreservoir in waterstof van 15° K geheel ondergedompeld is, terwijl, zoodra het niveau daalt, dit door het dalen van het kwik wordt aangewezen. Voor hetzelde doel zijn verder twee thermo-elementen constantan-ijzer (zie Med. N°. 89 Nov. 1903 en N°. 95*a* Juni 1906) aangebracht, het een op den bodem, het ander gesoldeerd aan de spiraal ter zelfder hoogte als het thermometerreservoirtje. Zij hebben bij de proef van 10 Juli, doordat iets in het ongereede kwam, niet voor het aanwijzen van het niveau gediend. De verdampte waterstof werkt in den regenerator *Db* mede om vloeibare lucht bij de afkoeling van het samengeperst helium te besparen, en wordt opgezogen in den grooten cylinder van de geconjugeerde chloormethyl pomp (Med. N°. 14 Dec. 1894), die anders dienst doet in de chloormethylcirculatie van de cascade voor vloeibare lucht; door een olievanger en over kool wordt zij verder naar den waterstofgashouder (Med. no. 94*f*) gevoerd, waaruit de waterstofcompressor (Med. no. 94*f*) het gas weder in de voorraadcylinders perst.

Om de helium circulatie te vullen wordt het zuivere helium uit de cylinders R_1 (zie Pl. II), waarin het bewaard wordt, gelaten in de op olie drijvende gasklok (verg. bij Med, no. 94*f*), die in verbinding staat met de ruimte, waarin het helium zich bij het uittreden uit de kraan ontspant, een nieuwzilveren cylinder, waarin het bovendeel van het vacuumglas *Ea* opgenomen is. Het gas uit den gashouder en later het koude wegstroomende helium, dat de regeneratorspiraal *A* heeft omspoeld, en van welks koude in den regenerator *Da* partij getrokken wordt om vloeibare lucht bij het afkoelen van het samengeperste helium te besparen, wordt opgezogen door den hulpcompressor *V* om vervolgens in den compressor met kwikzuiger *Q* te worden opgenomen. Deze perst het langs de leiding:

a. door een buis *Ca*, die aan het benedeneinde door damp van vloeibare lucht ver beneden het vriespunt wordt afgekoeld en aan het

boveneinde op gewone temperatuur wordt gehouden. Hier wordt het helium volkomen gedroogd.

b. door een in tweeën gedeelde buis langs twee koelslangen (in *Da* en *Db*) waarin het in de een door de afgevoerde waterstof en in de andere door het afgevoerde helium wordt afgekoeld, waarna het zich weer vereenigt.

c. door een met uitgegloeide en uitgepompte kool gevulde buis *Cb* gedompeld in vloeibare lucht. Hier blijven sporen lucht, die bij het circuleeren mochten zijn opgenomen, achter.

d. door een koelslang B_3 liggende in de vloeibare lucht, welke het deksel van de waterstof- en van de helium-ruimte afgekoeld houdt.

e. door een koelslang B_2, waarin het door de verdampte vloeibare waterstof afgekoeld wordt.

f. door de koelslang B_1 liggende in de onder 6 cM. druk verdampende vloeibare waterstof; hierin wordt het samengeperste helium tot 15° K. afgekoeld;

g. en van hier in de regeneratorspiraal *A*, die als in HAMPSON's toestel voor lucht en in den waterstofliquefactor van Med. 94*f* viervoudig gewonden is.

Vervolgens ontspant het door de kraan M_1, mocht deze te veel gas uitlaten dan kan dit door een veiligheidsbuis ontwijken. Wanneer de temperatuur zoover gedaald is, dat het vloeibare helium uitstroomt, verzamelt zich dit in het benedenste deel van het vacuumglas *Ed*, dat tot de hoogte van de kraan doorzichtig en daarboven verzilverd is.

Het wegstroomend gasvormige helium kan door den compressor der circulatie opnieuw in circulatie worden gebracht of in de voorraadbussen R_2 worden geperst.

Op eenigen afstand onder de expansiekraan M_1 is het nieuw zilveren reservoir Th_1 van een heliumthermometer aangebracht, het is gesoldeerd aan een stalen capillair Th_2, welke verbonden is aan een manometerreservoir Th_4 met steel Th_3. Wordt het kwik zoo ingesteld, dat het bij 15° K. wijst aan het beneden einde van de zooeven genoemde steel dan heeft de steel voldoende lengte om bij verdere daling van de temperatuur overstorten van kwik in de capillair te voorkomen.

De circulatie is met tal van hulpmiddelen voor verschillende bewerkingen voorzien. Vermelding verdient een hulpbus *Z* gevuld met uitgegloeide en uitgepompte kool, die bij het gebruik afgekoeld wordt door vloeibare lucht. Nadat de geheele toestel met zuiver gas gevuld is, laat men, terwijl de koolbuis *Cb*, die bij den liquefactor behoort, afgesloten is (door *M* en 9), door deze zijleiding (langs 11 en 8) het gas circuleeren om het van de laatste sporen lucht, die

in den compressor en de leidingen mochten zijn achtergebleven, te bevrijden.

Thans blijft nog te beschrijven op welke wijze er voor gezorgd is, dat het vloeibare helium kan worden waargenomen. Om het benedenste doorzichtige deel van het vacuumglas is een bescherming van vloeibare waterstof gebracht. Het tweede vacuumglas E_b, dat hiertoe dient, vormt met het eerste een afgesloten ruimte en er is bij de constructie op gerekend, dat deze vooraf luchtledig gepompt en met zuiver waterstofgas gevuld kan worden, wat noodig is om later de vloeibare waterstof volmaakt helder te houden. De vloeibare waterstof wordt al weder op de wijze van Med. N°. 94*f* in deze ruimte gebracht; de verdampte waterstof ontwijkt bij *Hg* naar den waterstofgashouder. Het waterstofglas is omgeven door een vacuumglas E_c met vloeibare lucht, hetwelk op zijne beurt door een glas E_{d_1} met alcohol, die door circulatie verwarmd wordt, omgeven is.

Door deze kunstgrepen en de ver gedreven zuiverheid van het helium werd bereikt, dat de toestel ook bij het einde van de proef, na 5 uren, nog geheel helder doorzichtig was. Bescherming met vloeibare waterstof is noodig om de verdamping van het helium tot op een gering bedrag terug te brengen niettegenstaande de verzilvering van het vacuumglas is weggenomen. Het uitloopen in een nauwer deel, het plaatsen van het heliumthermometer-reservoir niet op het laagste punt, geschiedde omdat het mogelijk was, dat er slechts uiterst weinig vloeistof kwam. Het doorzichtig maken tot aan de kraan, om, zoo er slechts een nevel optrad, dien te zien, en zoo er integendeel veel vloeistof kwam, te voorkomen dat het beneden deel geheel gevuld geraakte, zonder dat men het bemerkte. Dit laatste is inderdaad toch een oogenblik het geval geweest en zou niet zoo spoedig bemerkt zijn, wanneer de wanden verder verzilverd waren geweest. Maar is het glas niet verzilverd dan is de warmtetoevoer naar het helium veel grooter en zonder bescherming met vloeibare waterstof had dan wel eens het helium, dat gevormd werd, onmiddellijk kunnen verdampen.

Bij de vervaardiging der vacuumglazen heeft de Heer O. Kesselring, glasblazer aan het laboratorium, aan de hooge eischen, die gesteld werden, met toewijding voldaan, waarvoor ik hem hier gaarne mijn dank breng.

§ 3. *Het helium.* Bij het bereiden van dit gas werd ik achtereenvolgens wat het chemisch gedeelte betreft terzijde gestaan door de Heeren J. Waterman t., J. G. Jurling t., W. Meyer-Cluwen t. en H. Filippo Jzn. Chem. Docts., die daarbij samenwerkten met den

Heer G. J. Flim, bedrijfschef van het cryogeen laboratorium. Aan hen allen breng ik hier gaarne mijn dank voor hetgeen zij tot de inrichting, de verbetering en de vereenvoudiging van de bewerking, ieder voor zich, hebben bijgedragen. In 't bijzonder ook aan den Heer Filippo voor de zorgvuldige wijze, waarop de laatste verbranding over CuO onder toevoeging van zuurstof en vermijding van nieuwvorming van waterstof door hem is uitgevoerd.

Uit het monazit (zie § 1) werd het gas door verhitting verkregen, het werd met waterstof ontploft, met vloeibare lucht afgekoeld en samengeperst geleid over kool bij de temperatuur van vloeibare lucht. Daarna werd het verbrand over koperoxyde. Verder werd het samengeperst over kool bij de temperatuur van vloeibare lucht en vervolgens over kool bij de temperatuur van vloeibare waterstof geleid, telkens tot in het in de kool opgenomen en later afzonderlijk opgevangen gas geen merkbare bijmengselen meer bevatte.

Deze bereiding is ook ten behoeve van Med. N°. 105 toegepast.

§ 4. *De proef.* Nadat 9 Juli de reeds beschikbare hoeveelheid vloeibare lucht tot 75 liter was aangevuld, alle toestellen op sluiten onderzocht, luchtledig gepompt en met zuiver gas gevuld waren, werd 10 Juli te $5^3/_4$ uur 's morgens begonnen met het bereiden van vloeibare waterstof, waarvan te $1^u.30$, 20 liter in verzilverde vacuumglazen afgetapt (verg. Med. N°. 94*f*) gereed stonden. Intusschen was de heliumtoestel, bij verwarming van de daarbij behoorende buis met kool, luchtledig gepompt, en werd, bij afsluiting van deze buis, het in de overige heliumcirculatie bevatte gas door rondleiden over kool in vloeibare lucht door de zijleiding van de laatste sporen lucht bevrijd. De waterstofcirculatie van den heliumtoestel verbonden werd aan den waterstofgashouder en aan de luchtpomp, die den vorigen dag nog als chloormethylpomp bij de luchtbereiding gediend had, en deze geheele circulatie, voor zoover dit nog niet geschied was, luchtledig gepompt en met zuivere waterstof gevuld. Tevens werden de ruimten der vacuumglazen, die ter bescherming tegen warmtetoevoer met vloeibare waterstof gevuld moesten worden, luchtledig gepompt en met zuivere waterstof gevuld, ook werden de thermometers en thermoelementen ingesteld.

Te $1^u.30$ begon het afkoelen en vullen der glazen, die, met vloeibare lucht gevuld, de met vloeibare waterstof te vullen glazen beschermen, met zoodanige voorzorgen, dat toen zij op hun plaats gebracht waren, alles helder bleef. Te $2^u.30$ werd een aanvang gemaakt met het afkoelen van het vacuummaatglas en van den waterstofrefrigerator van den heliumliquefactor met behulp van waterstof geleid door een koelslang, die

in vloeibare lucht gedompeld was. Te 3 uur was de temperatuur van den refrigerator volgens een der thermoelementen tot — 180° gedaald. Toen werd vloeibare waterstof in het beschermingsglas gebracht en na eenig oponthoud door onbeteekenende stoornissen te 4ᵘ.20′ begonnen met het overtappen van vloeibare waterstof in het vacuummaatglas en in den waterstofrefrigerator.

Tegelijkertijd werd het helium in circulatie door den liquefactor geleid. De druk, waaronder de waterstof verdampte, werd geleidelijk tot 6 cM. verlaagd, waarop hij van 5ᵘ.20 af bleef. Voortdurend werd het niveau in den refrigerator naar de aanwijzing van den thermometer-niveauwijzer en de aflezing van het maatglas geregeld en voor het bijvullen van vloeibare waterstof (*Hydr. a*, *Hydr. b* Pl. II) en vloeibare lucht overal waar dit noodig was (*a*, *b*, *c*, *d*, Pl. II) gezorgd. De druk van het helium in de spiraal werd inmiddels langzaam opgevoerd en tusschen 5ᵘ.35 en 6ᵘ.35 geleidelijk van 80 tot op 100 atmosferen gebracht.

In het eerst was de daling van den heliumthermometer, die de temperatuur beneden de expansiekraan aanwees, zoo gering, dat gevreesd werd, dat hij in 't ongereede was geraakt, hetgeen een dubbel groote teleurstelling geweest zou zijn omdat ook juist te voren zich bij het goudzilver thermoëlement, dat bestemd was om dezelfde temperatuur aan te wijzen, eene onregelmatigheid had voorgedaan. Na langen tijd echter begon de eerst onbeduidende daling merkbaar te worden en daarna te versnellen. Eerst toen te 6ᵘ.35 een versnelde expansie werd toegepast, waarbij de druk in de spiraal van 95 tot 40 atm. daalde, werd er afkoeling van den thermometer beneden de waterstoftemperatuur opgemerkt. Bij volgende versnelde expansies, vooral als de druk niet te hoog was, werd telkens een duidelijk schommelen van de temperatuur naar lagere waarden bespeurd. Op den thermometer werd zoo bijv. eenmaal ruwweg 6° K. afgelezen.

Intusschen werd de laatste flesch van den voorraad vloeibare waterstof aan den toestel verbonden: En steeds was er nog niet anders dan eenig gewarrel bij de kraan op te merken geweest. De thermometer wees bij het versnelde expandeeren van 100 atm. af eerst zelfs eene verwarming aan, wat een vingerwijzing was om bij het verder werken den circulatiedruk tot op 75 atm. te verlagen. Terwijl ook nu in de heliumruimte niets opgemerkt werd begon de thermometer bij een aanwijzing van minder dan 5° K. van nu af merkwaardig constant te worden. Toen nog eens versnelde expansie van 100 atm. af beproefd werd kwam er eerst verwarming dan terugkeeren tot dezelfde standvastige temperatuur.

Het was, zooals Prof. SCHREINEMAKERS, die bij dit gedeelte van de

proef tegenwoordig was, opmerkte, alsof de thermometer in vloeistof stond. Inderdaad bleek dit het geval. Er was (zie § 3) bij de constructie van den toestel op gerekend, dat de toestel wel eens zich met vloeistof kon vullen, zonder dat men het toenemen der vloeistof had opgemerkt. En de eerste maal is het verschijnen der vloeistof inderdaad aan de waarneming ontsnapt. Misschien is het waarnemen van het vloeistofoppervlak, dat voor de eerste maal toch al moeilijk kan zijn, nog moeilijker geworden, doordat het zich verscholen had bij het thermometerreservoirtje. Hoe het zij, later werd holblazen van het vloeistofoppervlak en stijgen van den vloeistofspiegel door bijstroomen van vloeistof bij versnelde expansie, wat nog voortging zelfs toen de druk tot 8 atm. daalde, duidelijk gezien. De kritische druk ligt dus ook boven één atmosfeer. Had zij daar beneden gelegen, dan had de toestel in eens geheel met boven den kritischen druk samengeperste vloeistof gevuld kunnen zijn en zou eerst bij verlaging van druk ergens midden in de vloeistof een meniscus zijn opgetreden; dit is nu niet voorgekomen.

Het vloeistofoppervlak werd door spiegeling van licht van onderen spoedig zeer duidelijk zichtbaar gemaakt en wel ontwijfelbaar, omdat het duidelijk doorboord werd door de twee draadjes van het thermoelement.

Dat was te $7^{u}30$. Toen het oppervlak eenmaal gezien was, werd het niet meer uit het oog verloren. Het stond messcherp tegen den glazen wand. Aan Prof. Kuenen, die op dit oogenblik kwam, viel het dadelijk in het oog, dat de vloeistof er uit zag alsof zij bijna op hare kritische temperatuur was. Het eigenaardige voorkomen van het helium kan inderdaad het best vergeleken worden met dat van een meniscus van koolzuur bijv. in een Cagniard de la Tour-buis. Hier echter was de buis 5 cM. wijd. Men kon de drie vloeistofspiegels in de vacuumglazen, daar zij tegelijk te zien waren, zeer goed met elkaar vergelijken; het verschil van de waterstof en het helium was daarbij zeer sprekend.

Toen het vloeistofoppervlak zoover gedaald was, dat nog 60 cM^3 vloeibaar helium aanwezig waren, — er is dus vrij wat meer afgetapt, — werd het in den gashouder aanwezige gas weggepompt en werd daarna afzonderlijk opgevangen het gas dat uit deze vloeistofhoeveelheid weder zou worden gevormd. Reeds gedurende de proef werd de zuiverheid van dit gas door eene dichtheidsbepaling (2,01) vastgesteld, die later door een ontploffingsproef met bijgevoegd knalgas en verder door een zorgvuldig spectroscopisch onderzoek werd bevestigd.

Te $8^{u}30$ was de vloeistof tot op circa 10 cM^3 verdampt, toen werd nagegaan of het helium bij verdamping onder verlaagden druk ook vast werd. Dit was niet het geval, ook niet toen de druk tot

2.3 cm. gedaald was. Er kon niet spoedig genoeg een voldoende verbinding met de groote luchtpomp, die tot 2 mM. zuigt gemaakt worden, zoodat dit een volgende maal moet worden onderzocht. Intusschen heeft de gebrekkige verbinding den druk zeker onder 1 cM. en misschien nog lager doen dalen. Dat 7 mM. bereikt is, is niet onwaarschijnlijk.

Te $9^{u}40$ waren er nog slechts een paar cM^3 vloeibaar helium. Toen werd het werk geeindigd. Niet alleen de toestellen waren bij deze proef en hare voorbereiding tot het uiterste belast geweest, ook van mijne helpers was het uiterste gevorderd.

Zonder hun volharding en bezielde samenwerking had niet elk punt van het programma zoo onberispelijk tot zijn recht kunnen komen als noodig was om dezen aanval op het helium te doen slagen.

Grooten dank ben ik vooral verschuldigd aan den Heer G. J. Flim, die mij niet alleen als bedrijfschef van het cryogeen laboratorium bij de leiding der werkzaamheden ter zijde heeft gestaan, doch ook als hoofd van de werkplaats de constructie der toestellen naar mijne aanwijzing heeft geleid en mij in beide opzichten de meest intelligente hulp heeft verleend.

§ 5. *Contrôle proeven.* Al het gas, dat bij de proef gediend had, werd in drie porties verzameld en in cylinders samengeperst. Portie A is wat het laatst in den toestel achterbleef. Portie B is gevormd door verdamping van een bepaalde hoeveelheid vloeibaar helium. Portie C al het overige, dat in circulatie is geweest. Samen leverden zij dezelfde hoeveelheid, als met welke begonnen was. Zij werden alle drie onder toevoeging van knalgas en overmaat van zuurstof ontploft; er was geen waterstof aan te toonen. Voor de dichtheid werd (bij een enkele bepaling) gevonden $(0 = 16)$ $A = 2.04$, $B = 1.99$, $C = 2.02$.

Het spectrum van het voor de proef gebruikte gas, in een electrodenloos buisje met kwikafsluiting gebracht, en vooraf bij de temperatuur van vloeibare lucht van vocht en vetdamp bevrijd, beantwoordde (alleen het spectrum van de capillair is onderzocht) aan de beschrijving door Collie van het spectrum van helium met een spoor waterstof en kwikdamp gegeven.

Spectroscopisch was het gedistilleerde C, zoowel als B, iets zuiverder dan het oorspronkelijke gas. Bij het laatste wonnen bij hooge vacua de waterstoflijnen, bij het eerste ging het helium het laatst weg. De waterstof, die aan het laatste nog onttrokken is, moet zich bevinden in A. Hieruit werd met behulp van absorptie door kool in 't geheel

8 cM.³ waterstofgas afgescheiden. Daarmede zou overeenkomen een verschil in waterstofgehalte voor en na de proef van 0.004 °/₀.

Ter schatting van de gehaltes werden de spectra der zooeven genoemde porties vergeleken met het spectrum van een helium, waarin, naar schatting volgens de hoeveelheden waterstof, die bij de opvolgende zuivering door het gecomprimeerd te leiden over kool bij de temperatuur van vloeibare waterstof de laatste malen uit het gas opgenomen waren, niet veel meer dan 0,005 °/₀ waterstof bevat kon zijn, en met het spectrum van dit helium nadat er 0,1 °/₀ waterstof bij gemengd was.

Het voor de proef gebruikte gas verschilde van het ter vergelijking dienende, waarvan de roode waterstof- en heliumlijn bij de hoogste vacua tegelijk verdwenen, niet veel, doch scheen iets minder zuiver, daar de roode waterstoflijn het bij de hoogste vacua van de heliumlijn won. In de verschillende spectra was bij 32 mM. druk de waterstoflijn *C* niet te zien, de *F* lijn met de intensiteit 0,01 van He 5016, bij 12—16 mM. was *C* zwak ten opzichte van He 6677 en *F* zwak ten opzichte van He 5016. Voor de intensiteitsverhouding werd een van 0,01 tot 0,3 wisselend bedrag geschat.

Daarentegen had in het mengsel met 0.1 °/₀ H_2 bij 32 mM. de *C* reeds dezelfde intensiteit als He 6677, *F* 0.3 van He 5016, wat bij 16 mM. (iets minder voor *C* iets meer voor *F*) het geval bleef.

Niettegenstaande de genomen voorzorgen werd een enkele maal opgemerkt dat de waterstoflijnen bij de bepaling in intensiteit toenamen, bij het overgaan tot lagere drukkingen werden de bepalingen dus onzeker. Deze vergelijkingen zijn dan ook zeer gebrekkig; het onderzoek hoe sporen van waterstof in helium langs spectroscopischen weg quantitatief bepaald kunnen worden zou trouwens een afzonderlijk werk zijn. Hier mogen de medegedeelde waarnemingen misschien, in verband met het boven bepaalde verschil in gehalte van *B* en *C* met het oorspronkelijke gas, dienen om te doen uitkomen, dat de gehalte's hiervan niet veel meer dan 0.004 °/₀ en 0.008 °/₀ zijn geweest.

Dat het helium zeer zuiver is geweest, stond trouwens van te voren reeds vast, doordat niet de minste storing in de werking van de kraan is bespeurd en doordat ook in de laatste achtergebleven 2 cM.³ vloeistof geen troebeling werd opgemerkt.

De vertrouwbaarheid van den helium thermometer werd onderzocht door het kookpunt van zuurstof te bepalen, waarvoor 89° K. inplaats van 90° K. gevonden werd. Daarbij dient in 't oog gehouden te worden, dat de thermometer niet op deze temperatuur is ingericht en

de procentische nauwkeurigheid bij de veel lagere temperatuur van het vloeibare helium aanmerkelijk grooter is.

Voor de hulp bij de verschillende contrôleproeven verleend, betuig ik gaarne mijn dank aan de Heeren Dr. W. H. KEESOM en H. FILIPPO Izn.

§ 6. *Eigenschappen van het helium.* Bij belangrijke punten van verschil leveren de eigenschappen van het helium in 't oog vallende punten van overeenkomst op met het beeld, dat DEWAR op grond van verschillende onderstellingen in 1902 in zijn presidential address er van ontwierp. Vermeld werd reeds de uiterst geringe capillariteit. Voor het kookpunt werd gevonden 4°.3 op den helium thermometer van constant volume op 1 atm. druk bij 20° K ongeveer. Deze temperatuur moet met behulp van de toestandsvergelijking van het helium nog gecorrigeerd worden tot de absolute schaal. De correctie kan als a bij lagere temperaturen toeneemt wel eenige tiende graden bedragen, zoodat het kookpunt misschien het best op 4°.5 K wordt afgerond.

De tripelpuntsdruk ligt zeker beneden 1 cM,, misschien ook beneden 7 mM. De temperatuur kan bij dezen druk volgens de wet der overeenstemmende toestanden geschat worden op nagenoeg 3° K. De vloeistof is bij deze temperatuur nog zeer licht bewegelijk. Mocht het helium zich eens gedragen als pentan, zoo zou men tot bij 1° K. kunnen dalen voordat het strooperig en, nog lager, vast werd. Hoe groot het gebied van lage temperaturen (en hooge vacua) is, dat thans geopend is, moet echter nog worden nagegaan.

Het vloeibare helium heeft een zeer geringe dichtheid, nl. 0·15. Zij geeft een vrij wat grooter waarde van b, dan die, nu de in § 1 genoemde punten op de isothermen bij — 252°.72 en — 258°.82 zijn bepaald, uit die isothermen kan worden afgeleid, n.l. voorloopig ongeveer 0.0007. De waarde van b, die uit den vloeistoftoestand volgt, is ongeveer het dubbele van de waarde van b, die verwacht werd en bij de berekeningen van Dr. KEESOM en mijzelf over mengsels van helium en waterstof werd aangenomen.

Uit de groote waarde van b volgt terstond een kleine waarde van den kritischen druk, die waarschijnlijk in de buurt van 2 of 3 atm. ligt en buitengewoon laag is in vergelijking met die voor andere stoffen. Wanneer men dus het helium aan de hoogstbereikbare drukkingen onderwerpt, worden de „gereduceerde" drukkingen veel hooger dan zij bij eenige andere stof te verwezenlijken zijn. Wat men door op helium den druk van 5000 atmosfeeren uit te oefenen in dit opzicht kan verkrijgen, overtreft wat men bereiken zou wanneer

men koolzuur bijv. aan een druk van meer dan 100.000 atmosfeeren kon onderwerpen.

De verhouding van de dichtheid van den damp tot die der vloeistof is bij het kookpunt ongeveer 1 tot 11. Zij wijst op een kritische temperatuur, die niet veel hooger dan 5° K., en een kritischen druk, die niet veel hooger dan 2,3 atm. is.

Doch omtrent al de genoemde grootheden moeten nadere metingen en berekeningen worden verricht voordat zij vaststaan en bepaalde gevolgtrekkingen kunnen worden gemaakt.

Medegedeeld moge hier alleen nog worden eene voorloopige waarde van a nl. 0.00005. Toen VAN DER WAALS in 1873 in zijne dissertatie overwoog of de waterstof een a zou hebben, kwam hij zeker niet dan na lang overleg tot de conclusie, dat deze, zoo zij ook al zeer klein mocht zijn, toch zou moeten bestaan. Stof moet wel altijd aantrekking hebben, was zijn argument, en het toeval wil dat eenige dagen voor het vloeibaar maken van het helium (Zitt. Versl. Juni 1908) die woorden door hem zijn herhaald in verband met het helium. De thans gevonden a kenmerkt den zwaksten graad van deze, zich ook bij het helium in de vloeistofvorming nog merkwaardig duidelijk uitende, aantrekking der stof.

(7 Augustus, 1908).

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 26 September 1908.

Voorzitter (Waarnd): de Heer D. J. KORTEWEG.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 182.

Gelukwensch van den Voorzitter aan den Heer KAMERLINGH ONNES, p. 182.

Verslag van de Heeren C. WINKLER en J. W. VAN WIJHE over eene verhandeling van den Heer J H. F. KOHLBRUGGE: „Die Gehirnfurchen malaischer Völker verglichen mit denen der Australier und Europäer. Ein Beitrag zur Evolutionslehre", p. 183.

Verslag van de Heeren J. W. MOLL en F. A. F. C. WENT over eene verhandeling van den Heer J. C. SCHOUTE: „Die Bestockung des Getreides", p. 184.

Verslag van de Heeren P. H. SCHOUTE en J. CARDINAAL over eene verhandeling van den Heer MAX BRÜCKNER te Bautzen i/S.: „Ueber die Ableitung der allgemeinen Polytope und die nach Isomorphismus verschiedenen Typen der allgemeinen Achtzelle (Oktatope)", p. 187.

Verslag van de Heeren C. A. PEKELHARING en S HOOGEWERFF over eene verhandeling van den Heer W. VAN DAM: „Bijdrage tot de kennis der lebstremming", p. 189.

W. H. JULIUS: „Spectroheliographisch onderzoek van verschijnselen, veroorzaakt door anomale refractie", p. 193. (Met één plaat).

F. A. F. C. WENT: „Onderzoekingen van den Heer A. H. BLAAUW omtrent de betrekking tusschen lichtsterkte en belichtingstijd bij phototropische krommingen van kiemplantjes van Avena Sativa", p. 203.

A. F. HOLLEMAN: „De nitratie van toluol", p. 208.

C. WINKLER: „Het centrale zenuwstelsel eener witte doofgeboren kat. Een bijdrage tot de kennis der gehoorvezelstelsels", p. 216.

Mevr. H. B. VAN BILDERBEEK—VAN MEURS: „Het verschijnsel van ZEEMAN bij de sterkere lijnen van het violette ijzerspectrum van af λ 2380 — λ 4416 A.E. (Aangeboden door de Heeren P. ZEEMAN en J. D. VAN DER WAALS), p. 221.

A. F. HOLLEMAN: „De nitratie van *p*-chloortoluol", p. 224.

A. F. HOLLEMAN: „Over het quantitatieve onderzoek der nitratieprodukten van *m*-chloor- en *m*-broombenzoëzuur", p. 227.

P. TESCH: „Over het gedrag der fossiele kalkschalen in koolzuurhoudend water". (Aangeboden door de Heeren S. HOOGEWERFF en G. A. F. MOLENGRAAFF), p. 234.

J. M. GEERTS: „Bijdrage tot de kennis van de cytologische ontwikkeling van Oenothera Lamarckiana". (Aangeboden door de Heeren F. A. F. C. WENT en HUGO DE VRIES), p. 242.

W. VAN BEMMELEN: „Aardstroom-registratie te Batavia" (3de mededeeling), p. 248.

J. D. VAN DER WAALS: „Bijdrage tot de theorie der binaire mengsels". VIII, p. 248, IX, p. 262.

J. A BARRAU: „Over drietalstelsels in het bijzonder die van dertien elementen". (Aangeboden door de Heeren D. J. KORTEWEG en JAN DE VRIES), p. 274.

Aanbieding eener verhandeling van den Heer M. J. VAN UVEN: „Algebraische Strahlencongruenzen und verwandte complexe Ebenen als Schnitte derselben", p. 279.

Aanbieding eener verhandeling van den Heer A. BREWSTER JZN: „Rotation du Soleil", p. 279.

Aanbieding eener verhandeling van den Heer S. H. KOORDERS: „Beitrag zur Kenntniss der Flora von Java. II. Die Piperaceae von Java", p. 279.

Aanbieding van boekgeschenken, p. 280.

Erratum, p. 280.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 20 Juli 1908 ter begeleiding van een schrijven van het Gemeentebestuur van Amsterdam, waarin bericht werd dat dit Gemeentebestuur was overgegaan tot de benoeming van een Commissie van Advies voor het Instituut van Hersenonderzoek. Deze Commissie zal zich na overleg met den Minister van Binnenlandsche Zaken in de eerste plaats hebben bezig te houden met de vaststelling van een reglement, regelende de verhouding dier Commissie tot den Directeur en diens wetenschappelijke werkzaamheden.

2°. Schrijven van de Universiteit te Cambridge d.d. Juni 1908 waarin de Akademie wordt uitgenoodigd deel te nemen aan de herdenking van den 100-jarigen geboortedag van CHARLES DARWIN, welke herdenking zal plaats hebben op 22—24 Juni 1909. In handen gesteld van het Bestuur ter afdoening.

3°. Circulaire van de Académie nationale de Médecine te Caracas (Venezuela) waarin bericht wordt dat die Akademie op 12 Februari 1909 een plechtige vergadering zal houden ter eere van de herdenking van den 100-jarigen geboortedag van CHARLES DARWIN. Voor kennisgeving aangenomen.

4°. Schrijven van de Wetterauische Gesellschaft für die gesammte Naturkunde te Hanau, waarin de Akademie wordt uitgenoodigd tot het bijwonen van de herdenking van het 100-jarig bestaan op 11 October 1908. Zal met een brief van gelukwensch beantwoord worden.

5°. Circulaire van het 16de Internationale medische Congres van 29 Augustus tot 4 September 1909 te Budapest te houden ter begeleiding van het programma van bovengenoemd Congres. Ter kennisneming voor de leden beschikbaar gesteld.

Alvorens de werkzaamheden te beginnen houdt de Voorzitter de volgende toespraak:

Mijne Heeren!

Alvorens met onze werkzaamheden voort te gaan, een enkel woord.

Er is sedert onze laatste zitting verschenen wat men zou kunnen noemen een vakantienummer van onze zittingsverslagen; een bijvoegsel tot het verslag van onze Juni-vergadering.

Dit ongewone feit had een buitengewone oorzaak.

Er is niemand onder ons die niet met een trilling van blijdschap en fierheid vernomen heeft de wetenschappelijke overwinning door ons medelid KAMERLINGH ONNES in het Leidsche laboratorium behaalt: de vloeibaarmaking van het helium.

Wij weten welk een vereeniging van wetenschappelijk inzicht, van experimenteele vindingrijkheid en van volharding er noodig is geweest om die overwinning te verkrijgen. Door de voorafgegane teleurstelling verschijnt zij slechts in een te schitterender licht.

Een nieuwe Nederlandsche naam is daarmede voor goed verbonden aan een der belangrijkste hoofdstukken der physica: de leer der aggregaattoestanden.

Naast die van VAN DER WAALS, de grondlegger van de theorie dier verschijnselen, zal de zijne als die van den overweldiger van het meest weerspannige der gassen en als die van den man die allen in de nadering tot het absolute koudepunt een aanzienlijken stap ooruit is gegaan, een der voorname plaatsen in die leer blijven innemen.

Een enkel woord van hulde en gelukwensch, meende ik, behoorde bij deze gelegenheid van deze plaats uit te gaan.

Anatomie. — De Heer VAN WIJHE brengt ook namens den Heer WINKLER het volgende verslag uit over een door Dr. KOHLBRUGGE aangeboden verhandeling getiteld: „*Die Gehirnfurchen malaischer Völker verglichen mit denen der Australier und Europäer. Ein Beitrag zur Evolutionslehre*".

In deze verhandeling is door den schrijver een zeer ernstige studie ondernomen naar den makroskopischen bouw der hersenoppervlakte van Javanen en enkele andere bewoners van den Indischen Archipel, om die met de oppervlakte der hersenen bij Europeanen te vergelijken.

De ondergeteekenden zijn van meening dat de opneming dezer studie in de verhandelingen der Academie alleszins gerechtvaardigd is.

De schrijver heeft de vruchten zijner onderzoekingen neergelegd in 39 tabellen, waarin de variaties der verschillende groeven op de hersen-oppervlakte zijn gerangschikt en in een groot aantal teekeningen. De resultaten, die hij uit het daarin neêrgelegde feitenmateriaal trekt maken den inhoud der verhandeling uit.

Het hoofdresultaat van den schrijver is, dat elke op de menschenhersenoppervlakte bekende groeve, met haar naburen door verdubbeling, onderbreking en compensatie, in zoodanige mate variabel is, dat het hem onmogelijk toeschijnt om aan de groeven een beteekenis te geven, scherp genoeg om hen als natuurlijke grenzen van windingen aan te zien.

Den schrijver gelukte het niet om een constanten samenhang tusschen groeven en de onder hen liggende hersenganglia te vinden, evenmin

kon hij een constante wet voor de uitbreiding der groeven vaststellen. Elke groeve varieert in ruime grenzen rondom een overigens constant gemiddelde.

Elke poging echter om bepaalde variaties van groeven tot kenmerken van een bepaald ras te verheffen, acht de schrijver vervroegd en dit te meer, omdat hij meent, dat de onderzoekingen van verschillende bewerkers van dit onderwerp niet met elkander kunnen of mogen worden vergeleken, en omdat, naar zijn meening, voldoende materiaal door één onderzoeker verzameld, niet voorligt.

Eveneens acht hij de poging van WINKLER om door weging onderlinge windingsverschillen vasttestellen door de groote variabiliteit der groeven principieel bedreigd en de relatieve constantie der door dien onderzoeker gevonden windingsgewichten verklaarbaar door oppervlakte-uitbreiding der winding naast convergentie der groeven in de diepte. Ook acht hij de bewijzen, die KARPLUS bijeenbracht voor de meening, dat bepaalde variaties van groeven bij leden eener zelfde familie, als erfelijke eigenschap voorkomen, onvoldoende. Kortom, de resultaten van den schrijver zijn in hoofdzaak negatieve, veeleer afbrekende dan opbouwende.

Toch blijven de feiten, dat een zeer nauwkeurig oppervlakte-onderzoek der hersenen is verricht en dat een zeer groot nieuw materiaal is verzameld, voornamelijk van Javanen-hersenen, belangrijk genoeg om de opneming in de werken der Akademie aan te bevelen. De tabellen kunnen in den tekst gedrukt worden. De teekeningen laten een eenvoudige reproductie toe.

C. WINKLER.
J. W. VAN WIJHE.

De conclusie van het verslag wordt goedgekeurd.

Plantkunde. — De Heer WENT brengt ook namens den Heer MOLL het volgende verslag uit:

De ondergeteekenden, in de Vergadering van 27 Juni l.l. aangewezen om rapport uit te brengen over eene verhandeling van den Heer Dr. J. C. SCHOUTE, getiteld „Die Bestockung des Getreides," hebben de eer de Afdeeling daaromtrent het volgende mede te deelen:

De verhandeling is de vrucht van zeer uitgebreide onderzoekingen, door den schrijver gedurende een viertal jaren verricht, omtrent de uitstoeling van Gerst, Tarwe, Rogge en Haver.

Na een inleidend hoofdstuk wordt allereerst de morphologische

bouw der bedoelde Gramineën nauwkeurig beschreven, hetgeen den schrijver bracht tot de opstelling eener methode, waardoor het mogelijk is, in iedere phase van de plant, voor iederen willekeurigen halm, met zekerheid de plaats aan te wijzen, die deze in het vertakkingssysteem toekomt. Deze volledige kennis der groeiwijze van de granen, zal ook afgezien van het gebruik, dat de schrijver zelf er bij zijn verder onderzoek van maakte, in de toekomst voor verdere studiën omtrent deze, uit een maatschappelijk oogpunt zoo gewichtige gewassen van fundamenteele beteekenis blijven.

In twee verdere hoofdstukken wordt de waardeverhouding onderzocht van de verschillende halmen en aren van het vertakkingssysteem en het bleek daartoe noodig eene uitvoerige studie te wijden aan den invloed uitgeoefend door de verschillende diepten, waarop de zaden gezaaid kunnen worden en door de periodiciteitsverschijnselen, die zich over de geheele plant openbaren.

In Hoofdstuk III wordt de uitstoeling der jeugdige plant afzonderlijk behandeld, omdat de waardeverhoudingen der verschillende halmen hier, waar nog geene nadere selectie heeft plaats gehad, andere zijn dan bij de rijpe plant.

Deze laatste wordt in Hoofdstuk IV onderzocht en wel aan drieërlei materiaal. Ten eerste van een groote hoeveelheid, van 32 practische landbouwers, uit de groot cultuur verkregen materiaal uit de provinciën: Gelderland, Groningen, Zeeland en Noord-Holland. Ten tweede werd een onderzoek, waarbij het aantal onderzochte kenmerken veel grooter werd genomen, ingesteld aan eenige culturen, grootendeels aan de proefvelden der Hoogere Land-, Tuin- en Boschbouwschool te Wageningen ontleend. Ten derde werd een eveneens zeer uitvoerig onderzoek verricht bij culturen door den schrijver zelf bezorgd en wel met verschillende standruimte der planten.

Als voornaamste resultaten mogen hier de volgende genoemd worden. Wat de periodiciteit betreft, bleek de hoofdhalm in alle opzichten verreweg de beste van de geheele plant te zijn. De zijhalmen van de verschillende orden vertoonen regelmatig perioden, waarvan het beloop met nauwkeurigheid werd vastgesteld. In verband hiermede was het den schrijver mogelijk, eene verklaring te geven van het onderscheid tusschen winter- en zomergranen.

Omtrent de diepte van onderbrenging der zaden, bleek, dat met grootere diepte een toenemend etiolement en tevens verminderde uitstoeling samengaan. Bij een bepaalde diepte komt de plant in alle opzichten tot haar beste ontwikkeling. Bij oudere planten worden echter deze invloeden langzamerhand van minder beteekenis.

Wat eindelijk de uitstoeling zelve betreft, zoo bleek, dat de waarde

daarvan niet, zooals men meende, geheel bepaald wordt door de oorspronkelijke waardeverhoudingen van hoofd- en zijhalmen. Alleen de beste planten stoelen uit, zoodat de waarde der zijhalmen slechts weinig geringer wordt dan de waarde van den gemiddelden hoofdhalm. Ook is de frequentie der minder krachtige zijhalmen veel geringer dan men dit vroeger op grond van oppervlakkiger waarnemingen meende. En eindelijk kan, bij holleren stand, door uitstoeling het productievermogen der plant wel is waar toenemen, doch deze toeneming geschiedt voor een niet gering deel buiten de uitstoeling om, door grootere zwaarte der halmen, waarvan er dan per M^2 een kleiner aantal gevormd wordt dan bij dichteren stand van het gewas.

Het probleem der uitstoeling wordt dus door des schrijvers onderzoek in zuiveren vorm gesteld en beheerscht door de volgende factoren: het eenige voordeel der uitstoeling is, de grootere vastheid der cultuur door de mogelijkheid van aanvulling van opengevallen plaatsen. Een gering nadeel daartegenover is het feit, dat de zijhalmen gemiddeld altoos minder krachtig zijn dan de hoofdhalm; maar een groot nadeel is de bij uitstoeling optredende concurrentie der halmen onderling, daar er voor elken geslaagden halm ongeveer 4 andere te gronde gaan. Waarschijnlijk zou in het vinden eener variëteit, die geen uitstoeling vertoonde, dan ook een zeker voordeel voor den landbouw gelegen zijn.

Uit het voorgaande blijkt, dat de Heer SCHOUTE zeer belangrijke resultaten verkregen heeft op een gebied, dat niet alleen uit een wetenschappelijk oogpunt, maar ook in verband met landbouwbelangen ten zeerste de aandacht verdient. Aan de verhandeling is de arbeid van eenige jaren ten koste gelegd, die er niet te vergeefs aan besteed is, want de schrijver heeft een voortreffelijk werk geleverd, dat ten allen tijde een vraagbaak zal blijven voor hen, die omtrent de hier behandelde onderwerpen voorlichting zoeken.

De ondergeteekenden meenen er alleen op te moeten wijzen, dat het in het Duitsch geschreven stuk op vele plaatsen de sporen vertoont, dat het door een Hollander geschreven is. Zij zouden het daarom wenschelijk achten, het vóór het ter perse gaat, door een Duitscher of ander deskundige te laten nazien, iets waartoe de schrijver zich trouwens reeds bereid heeft verklaard.

De ondergeteekenden meenen dan ook de Afdeeling met de meeste gerustheid te mogen adviseeren, het werk van den Heer SCHOUTE in de Verhandelingen der Akademie op te nemen.

Groningen / *Utrecht*, Juli 1908.

J. W. MOLL.
F. A. F. C. WENT.

De conclusie van het verslag wordt goedgekeurd.

Wiskunde. — Verslag over de verhandelingen: „*Ueber die Ableitung der allgemeinen Polytope und die nach Isomorphismus verschiedenen Typen der allgemeinen Achtzelle* (Oktatope)" van Prof. Dr. M. BRÜCKNER, Bautzen, Saksen.

Door den onlangs overleden wiskundige, Dr. V. SCHLEGEL uit Hagen, is het probleem: het aantal der in vorm wezenlijk van elkaar verschillende algemeene veelvlakken met een gegeven aantal zijvlakken te vinden, teruggebracht tot de verdeeling van een veelhoek in een aantal andere veelhoeken en wel — in verband met de voorwaarde van de algemeenheid van het veelvlak — zoodanig, dat door elk punt drie zijden gaan. Langs dezen weg — en op andere wijzen, die hier buiten beschouwing kunnen blijven, — hebben verschillende wiskundigen als EBERHARD, HERMES, enz. gevonden, dat er — als men zich tot de algemeene veelvlakken bepaalt — slechts een soort viervlak en een soort vijfvlak mogelijk is, terwijl er twee verschillende zesvlakken, vijf verschillende zevenvlakken, veertien verschillende achtvlakken, vijftig verschillende negenvlakken, enz. mogelijk zijn.

Geheel op dezelfde wijze laat het vraagstuk: het aantal der in vorm wezenlijk van elkaar verschillende algemeene vierdimensionale polytopen met een gegeven aantal grenslichamen te bepalen, zich terugbrengen tot de verdeeling van een gegeven veelvlak in een aantal andere veelvlakken onder de voorwaarde, dat er door elk hoekpunt vier ribben gaan. Bij de uitwerking van dit denkbeeld, kan men, wijl er uit den aard der zaak slechts een polytoop met vijf grenslichamen, het simplex der vierdimensionale ruimte, mogelijk is, met de door zes lichamen begrensde polytopen aanvangen. In een klein geschrift, dat reeds in 1894 verscheen, heeft Dr. M. BRÜCKNER langs den aangegeven weg gevonden, dat er twee verschillende polytopen zijn begrensd door zes en vijf verschillende polytopen begrensd door zeven veelvlakken [1]).

In de nieuwe verhandeling van denzelfden schrijver, in de vorige vergadering der Akademie om advies in onze handen gesteld, wordt het aangegeven onderzoek een schrede verder voortgezet door het op de polytopen begrensd door acht veelvlakken uit te breiden. Het aantal der hierbij optredende verschillende vormen is 39; van deze is de bekende achtcel, het maatpolytoop der vierdimensionale ruimte, de eenvoudigste [2]). Zij worden in een tabel, waarmee de verhandeling

[1]) Van het eenvoudigste der vijf door zeven veelvlakken begrensde polytopen, den vierdimensionalen hoef, was een door den Heer H. VAN EEK, civiel-ingenieur te Delft, geconstrueerd model in de vergadering ter tafel.

[2]) Van dit maatpolytoop komt een model voor in de verzameling der SCHILLING'sche modellen.

besluit, naar den aard hunner acht grenslichamen in verschillende klassen ingedeeld en in een tweetal platen in SCHLEGEL'sche afbeelding op een der begrenzende veelvlakken aangegeven. Natuurlijk gaat het niet wel aan in dit kort verslag omtrent de wijze van afleiding der resultaten in bijzonderheden te treden; we beperken ons dus tot de volgende algemeene aanwijzing. Als men van een polytoop begrensd door acht lichamen een grenslichaam wegneemt en de aangrenzende grensruimten verlengt tot ze opnieuw een stuk vierdimensionale ruimte insluiten, verkrijgt men een polytoop begrensd door zeven lichamen. Omgekeerd moet dus elk polytoop met acht grensruimten verkregen kunnen worden door een polytoop begrensd door zeven veelvlakken door een achtste ruimte af te kappen. De schrijver nu heeft nauwkeurig nagegaan, welke afkappingswijzen hierbij in aanmerking komen, en deze toegepast op de vijf verschillende vormen van polytopen met zeven grenslichamen in 1894 door hem gevonden. Noemt men een polytoop begrensd door acht zijruimten een oktatoop van de eerste, tweede derde of vierde klasse, naarmate het grenslichaam met het geringste aantal zijvlakken een viervlak, vijfvlak, zesvlak of zevenvlak is, dan zijn er achtereenvolgens 12, 14, 9, 4 oktatopen van de eerste, tweede, derde en vierde klasse.

De zoogenaamde SCHLEGEL'sche diagrammen, die de vlakke afbeelding vormen van de lichamelijke modellen der 39 verschillende oktatopen zijn door den schrijver met zorg geteekend. Ze geven echter, hoe fraai overigens ook bewerkt, het oog geen voldoende bevrediging; ze kunnen dit niet, wijl ze niet kunnen doen uitkomen, dat zijvlakken met meer dan drie hoekpunten werkelijk vlak zijn. Dit bezwaar kan alleen geheel worden ondervangen door het maken der lichamelijke modellen — of door hieraan beantwoordende naar de regels der beschrijvende meetkunde vervaardigde projectieteekeningen[1]). We vermelden dit evenwel niet om hiermee eenigen twijfel aan de juistheid der resultaten te opperen; we brengen er alleen mee onder woorden, dat het toetsen van de juistheid der uitkomsten aan de lichamelijke modellen zeer veel gemakkelijker is dan de bestudeering hunner vlakke afbeelding.

De slotsom van onze beschouwing is, dat de begaafde schrijver in dit nieuwe geschrift een uitstekend stuk werk geleverd heeft. We aarzelen dan ook geen oogenblik de afdeeling voor te stellen het in de Verhandelingen der Akademie te doen verschijnen.

Groningen. P. H. SCHOUTE.
Delft. J. CARDINAAL.

De conclusie van het verslag wordt goedgekeurd.

---

[1]) Met behulp van de epure, die het model door den Heer VAN EEK vervaardigd vergezelde, heeft deze de lengte van alle ribben van dit model bepaald.

Physiologie. — De Heer PEKELHARING brengt ook namens den Heer HOOGEWERFF het volgende verslag uit:

Wij hebben de eer hierbij verslag uit te brengen over de in onze handen gestelde verhandeling van Dr. W. VAN DAM:

Bijdrage tot de kennis der lebstremming.

De aanleiding tot het onderzoek, waarmede de Heer VAN DAM zich heeft bezig gehouden, werd gegeven door het meermalen waargenomen verschijnsel, dat de melk van sommige koeien niet of slecht stolt na vermenging met leb alleen, maar in den regel even goed als andere melk gestremd wordt, indien er tevens een zekere hoeveelheid van een oplosbaar kalkzout aan wordt toegevoegd.

Aangezien uit onderzoekingen van OTT DE VRIES en BOEKHOUT gebleken is, dat zulke slecht stollende melk niet noemenswaard armer is aan opgeloste kalkzouten dan normale melk, moest de vraag gesteld worden, hoe dan de gunstige werking van het toegevoegde zout moet worden verklaard.

Daartoe werd onderzocht in hoever de vermeerdering van de aciditeit van melk, die door toevoeging van $CaCl_2$ veroorzaakt wordt, invloed heeft op de stolling. Dit is wel reeds onderzocht — echter zonder veel resultaat — met betrekking tot hetgeen de schrijver noemt de „potentieele aciditeit", d. w. z. de hoeveelheid alkali, die noodig is om een zekere hoeveelheid melk tegenover een bepaalden indicator te neutraliseeren. Maar hierdoor wordt geen rekenschap gegeven van den toestand, waarin zich de melk bevindt, als zij met de leb vermengd wordt. Het komt er op aan de actueele aciditeit, d. w. z. het gehalte van H-ionen te kennen.

Na een beknopte beschrijving van de daarbij gebruikte methode, deelt de Schrijver de uitkomsten mede van het onderzoek van een 12-tal monsters melk, waarin de concentratie der waterstof-ionen bleek af te wisselen tusschen 0.14 en 0.32×10^{-6} N. Bij twee monsters van niet stollende melk werd de concentratie 0.16 en 0.22×10^{-6} gevonden. De afwijking kon dus niet aan de actueele aciditeit worden toegeschreven.

Nu werd de invloed van verandering van het gehalte aan H-ionen door de toevoeging van geringe hoeveelheden zoutzuur of kaliloog, op de stolling van melk door leb nagegaan. Hierbij deed zich echter een moeilijkheid voor. Toevoeging van zuur of alkali verandert de hoeveelheid der in de melk opgeloste kalkzouten. Om de werking van de aciditeit op te sporen, moest evenwel iedere wijziging in

den invloed der kalkzouten worden buitengesloten. Dit doel werd bereikt door een vernuftige kunstgreep. Bij de stolling van melk komt tweeërlei in aanmerking: de werking van het enzym op de caseine, tengevolge waarvan paracaseine ontstaat, en de afscheiding der paracaseine als een onoplosbare kalkverbinding. Het is wel vermoed, maar zeker niet aangetoond, dat kalkzouten de werking van het enzym eenigermate bevorderen. De kalkzouten komen dus geheel, of althans in hoofdzaak, pas in het spel als de werking van het enzym heeft plaats gehad en de paracaseine gevormd is. Hiervan maakte de Heer VAN DAM gebruik. Melk, waarvan het gehalte aan H-ionen tot een nauwkeurig bepaald bedrag vermeerderd of verminderd was, werd met leb vermengd en dan, na een zeker aantal seconden, met zooveel $CaCl_2$ vermengd dat de verschillen der in de melk reeds opgeloste kalkzouten daarbij in het niet moesten vallen. Het oogenblik waarop nu, bij de vermenging met $CaCl_2$, de melk terstond dik werd, gaf de snelheid aan waarmede het enzym had gewerkt. Deze snelheid bleek evenredig te zijn aan het gehalte van de melk aan waterstof ionen. Door verdere proeven wordt nog in het licht gesteld dat van een invloed van calciumzouten op de werking van het enzym niets te bespeuren was, dat wel echter het gehalte van de melk aan H-ionen tengevolge van het toevoegen van $CaCl_2$ grooter wordt.

Toen nu de beteekenis der actueele aciditeit van de melk voor de stolling was vastgesteld, kon die der opgeloste kalkzouten worden onderzocht. Eenige porties van dezelfde melk werden met verschillende hoeveelheden zoutzuur vermengd. Een deel van iedere portie werd, bij een drukking van 6 atmosfeeren, door een Chamberlandfilter gefiltreerd. In het zoo verkregen serum werd het gehalte aan kalk en aan phosphorzuur bepaald. Daarbij bleek de hoeveelheid kalk grooter te zijn, naar mate meer HCl aan de melk was toegevoegd. Ook werd van elke portie melk het gehalte aan H-ionen en de stollingstijd op de gewone wijze bepaald. Indien nu de opgeloste kalkzouten invloed hadden op de stolling, zou men moeten verwachten dat deze invloed met dien van de aciditeit zou samenwerken en dat dus de snelheid van de werking der leb sterker zou toenemen dan overeenkomstig de concentratie der H-ionen alleen. Dit bleek echter niet het geval te zijn. Zelfs werd na toevoeging van een groote hoeveelheid zuur — 20 CC $\frac{n}{10}$ HCl op 100 CC melk — een trager stolling gevonden dan met het gehalte aan waterstof-ionen overeenkwam, ofschoon hier het gehalte aan opgeloste kalkzouten ruim dubbel zoo groot was als in de onveranderde melk. Maar hier was de hoeveelheid phosphorzuur in het serum, in verhouding tot de

kalk, belangrijk kleiner dan wanneer minder zuur was toegevoegd. Er was dus kalk in oplossing gekomen, die te voren niet als phosphaat, maar op andere wijze, zeker in hoofdzaak aan caseine, gebonden geweest was.

Deze waarnemingen moesten dus leiden tot de gevolgtrekking, dat het niet de opgeloste, maar de colloidaal gebonden kalkzouten van de melk zijn die bij de afscheiding van de paracaseine-kalkverbinding in aanmerking komen. Deze, met de gangbare voorstelling in strijd zijnde gevolgtrekking, gaf den Heer VAN DAM aanleiding tot een uitvoerig onderzoek naar de waarde van de gronden, die voor de meening, dat de opgeloste kalkzouten bij de stolling de hoofdrol spelen, zijn aangevoerd.

Vooreerst wordt aangetoond dat de bevordering van de stolling door toevoeging van $CaCl_2$ niet bewijst, zooals REICHEL en SPIRO meenen, dat die aan de opgeloste kalkzouten moet worden toegeschreven, aangezien van de toegevoegde kalk — terwijl het chloor geheel in het serum teruggevonden wordt — ongeveer de helft in niet filtreerbaren vorm gebonden is. REICHEL en SPIRO hebben de stelling verdedigd dat de vorming van kaas van de Ca-ionen afhangt. VAN DAM vindt echter dat, wanneer door een 80—85 cM. lange zuil melkserum, met behulp van platina-electroden 2 à 3 uren lang een stroom geleid wordt met een spanning van 220 V. en een sterkte van 25 à 30 mA. slechts zeer weinig Ca, veel minder dan K, naar de kathode wordt overgebracht. Hij besluit uit zijn proeven, dat de electrolytische dissociatie der kalkzouten in melk zeker niet meer dan 10 à 12 % bedraagt.

Voorts werd de werking van oxalaten op de melk onderzocht. Het verschijnsel dat de melk niet meer door leb gestremd wordt, wanneer er een voldoende hoeveelheid van een alkali-oxalaat aan is toegevoegd, is men gewoon door het neerslaan der opgeloste kalkzouten als calcium-oxalaat te verklaren. VAN DAM vindt echter, door het onderzoek van het serum, dat na toevoeging van juist zooveel kalium-oxalaat aan de melk, als met haar gehalte aan opgeloste kalkzouten overeenkomt, het serum nog altijd een belangrijke hoeveelheid kalk in oplossing houdt. Het oxalaat, waarvan in het serum niets te vinden is, heeft blijkbaar zich over de opgeloste en de onopgeloste kalkverbindingen verdeeld. Wordt nu aan de met oxalaat bedeelde, niet stollende melk $CaCl_2$ toegevoegd, dan wordt dit allereerst in colloide verbinding gebracht. De melk stolt nu weer met leb, ofschoon zij aan opgeloste kalkzouten even arm is als te voren. Wanneer melk door dialyse arm gemaakt werd aan kalkzouten, bleef zij het vermogen om te stollen behouden.

Ook door toevoeging van citraten wordt de stolling van de melk vertraagd of zelfs belet. Daarbij wordt echter, zooals VAN DAM nu aantoont, in tegenstelling met de gangbare meening, het gehalte aan opgeloste kalkzouten niet kleiner, maar juist grooter.

Eindelijk wordt de invloed van verdunning der melk uitvoerig nagegaan, waarbij in het bijzonder de onderzoekingen van FULD daaromtrent aan een door nieuwe proeven toegelichte en bevestigde kritiek worden onderworpen, waaruit op nieuw blijkt dat het verschijnsel der stolling het best te verklaren is door aan te nemen dat de aan colloiden, in het bijzonder aan caseine gebonden kalk bij de vorming van de paracaseine-kalkverbinding, de kaas, gebruikt wordt. Slechts ééne van VAN DAM's bevindingen is op deze wijze nog niet voor verklaring vatbaar, de waarneming namelijk dat met oxalaatserum verdunde melk trager stolt dan even sterk met normaal serum verdunde. Zeker terecht maakt hij er intusschen op opmerkzaam, dat in dit geval de omstandigheden te ingewikkeld zijn om daarin een ernstig bezwaar te vinden tegen de door hem gegeven voorstelling.

Verder worden de uitkomsten medegedeeld van 16 bepalingen van het totale gehalte van melk aan kalk, voor een deel ontleend aan niet gepubliceerde analysen van OTT DE VRIES en BOEKHOUT, waaruit blijkt dat dit gehalte bij koeien die slecht of niet stollende melk leveren, kleiner is dan bij normale.

Ten slotte wordt een geval vermeld van een koe, die regelmatig niet stremmende melk gaf, en waarbij die afwijking na toediening van calciumbiphosphaat verdween, om zich wederom te vertoonen als die toediening werd gestaakt.

Uit het medegedeelde moge blijken dat de verhandeling van den Heer VAN DAM rijk is aan belangrijken inhoud. De beschrijving van de talrijke proeven en de daarbij gebruikte methoden is duidelijk, beknopt en nauwkeurig, de gang van het betoog is helder en klemmend, het geheele onderzoek levert, naar wij meenen, een nieuw voorbeeld van de groote waarde van de toepassing der physische chemie op biologische vraagstukken.

Wij stellen voor deze verhandeling in de Werken der Akademie op te nemen.

C. A. PEKELHARING.
S. HOOGEWERFF.

De conclusie van het verslag wordt goedgekeurd.

Natuurkunde. — De Heer JULIUS doet eene mededeeling over: *„Spectroheliographisch onderzoek van verschijnselen, veroorzaakt door anomale refractie"*.

De uitlegging die men tegenwoordig gewoonlijk geeft aan de zonnebeelden, verkregen met den spectroheliograaf, is deze, dat daarin *donkere* flocculi plaatsen zouden aanduiden, waar het bepaalde gas, een van welks lijnen voor het onderzoek dient, in een zoodanigen toestand van dichtheid en temperatuur verkeert, dat het 't licht, uit diepere lagen komende, sterk absorbeert, terwijl *heldere* flocculi ons de plaatsen zouden doen zien, waar, tengevolge van hoogere temperatuur of van chemische of electrische oorzaken, de straling van het gas het effect der absorptie overtreft.

Enkele jaren geleden heb ik een geheel andere verklaring van diezelfde verschijnselen voorgeslagen [1]). Ik heb toen namelijk getracht, van de eigenaardige lichtverdeeling in spectroheliographieën rekenschap te geven, eenvoudig door te letten op de anomale straalbreking die golven uit de omgeving der absorptielijnen moeten ondergaan, wanneer zij een absorbeerende middenstof doorloopen waarvan de dichtheid niet volkomen gelijkmatig is.

Wanneer het inderdaad gelukt, de waargenomen feiten op dezen grondslag te verklaren, dan zullen wij geen behoefte hebben aan de onderstelling, dat de omstandigheden van absorptie en uitstraling voor een bepaalden damp zóó sterk verschillend kunnen zijn in aangrenzende deelen van de zon, als de contrasten in de photographieën zouden eischen. Bovendien zou dan de mogelijkheid gegeven zijn om aan te nemen, dat de bestanddeelen van de zonne-atmospheer een volkomen mengsel vormen, waarvan natuurlijk de procentische samenstelling zich wijzigt met den afstand tot het middelpunt der zon.

Dat het bij onze uitlegging niet *noodig* is, de aanwezigheid van afzonderlijke, nevens elkander liggende wolk-achtige massa's calcium- of ijzerdamp of waterstof voorop te stellen, maakt ons denkbeeld van 't zonnelichaam wel iets eenvoudiger, en dat is een voordeel; maar zelfs indien men genoodzaakt ware op grond van andere overwegingen tòch te gelooven in het werkelijk bestaan van zulke afzonderlijke lichtende of donkere ophoopingen van bepaalde stoffen, dan zou dat niet ontheffen van de verplichting om den invloed te bestudeeren, dien de anomale dispersie van het licht in die gasmassa's hebben moet op de lichtverdeeling, welke de spectroheliograaf ons te zien geeft.

---

[1]) Versl. Natuurk. Afd. XIII p. 138—145. (1904).

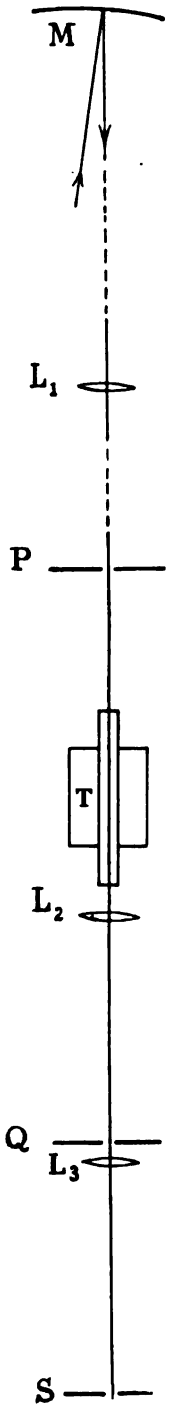


Fig. 1.

Een bezoek aan het zonne-observatorium Mount Wilson, in Augustus 1907, opende mij de zeer welkome gelegenheid om den spectroheliograaf van 1.5 meter brandpuntsafstand [1]) te gebruiken voor eenige proeven aangaande anomale dispersie.

Men mocht verwachten dat wanneer licht, komende van een bron met een continu spectrum, een ruimte doordringt waarin natriumdamp ongelijkmatig verdeeld is, de spectroheliograaf bijzonderheden aangaande de stofverdeeling zou kenbaar maken, en dat wel tengevolge van het *lichtbrekend* vermogen van den damp, meer dan door zijn absorbeerend en uitstralend vermogen. — Deze verwachting kon worden getoetst.

Daar eene inrichting voor het bestudeeren van anomale refractie in natriumdamp, geheel gelijk aan die welke beschreven staat in mijn mededeeling over „Willekeurige lichtverdeeling in dispersiebanden" [2]), reeds door Prof. HALE voor het zonne-observatorium was aangeschaft, kon de proef gemakkelijk genomen worden, dank zij de vele laboratorium-hulpmiddelen die op Mount Wilson ter beschikking staan.

Het toestel bestaat uit een wijde buis van nikkel, 60 c.M. lang, waarvan het middelste gedeelte zich binnen een electrischen oven bevindt, terwijl de naar buiten stekende einden afgekoeld worden door watermantels, met stroomend water. De buis bevat enkele grammen natrium, en is blijvend verbonden met een Geryk-pomp om de lucht te verwijderen en de gassen, die tijdens het begin van de verhitting uit het natrium vrijkomen. Binnen de buis bevindt zich een inrichting waarmede dichtheidsgradienten van verschillende bekende richtingen en willekeurig bedrag in den natriumdamp kunnen worden teweeggebracht.

Zonlicht, komende van den grooten spiegel M (fig. 1) van de Snow telescoop [3]) (18 Meter brandpuntsafstand), doorloopt de nikkelen buis T op zijn weg naar de

[1]) HALE and ELLERMAN, The five-foot spectroheliograph of the Solar Observatory. Contributions from the Solar Observatory Mt. Wilson, California, N°. 7.

[2]) Versl. Natuurk. Afd. XV. p. 318.

[3]) Beschreven in: Contributions from the Solar Observatory Mt. Wilson, Cal., Nos 2 and 4.

spleet S van den spectroheliograaf. De afstand tusschen T en S is ongeveer 560 c.M.

Een lens L_1 vormt een beeld van de zon niet ver van het midden der buis T. P is een diaphragma met een verstelbare spleet, waarvan de lens L_2 een beeld ontwerpt in het vlak van het diaphragma Q. Vlak achter dit laatste bevindt zich een lens L_3; deze vormt in samenwerking met de lens L_2 een beeld van een doorsnede der buis in het vlak van de spleet S van den spectroheliograaf. In dit beeld (fig. 2) zullen natuurlijk de beide rechthoekige vensters van de sluitplaten der buis onscherp begrensd zijn, daar een scherp beeld alleen gevormd wordt van een doorsnede, ergens *tusschen* de sluitplaten gelegen. In A en B projecteeren zich de beide nauwe nikkelen buisjes [1]), van welke de temperatuur naar welgevallen gewijzigd kan worden (door er een electrischen stroom of een luchtstroom doorheen te zenden), om zoo de gewenschte dichtheidsgradienten te doen ontstaan.

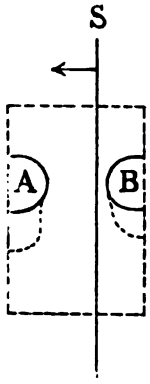


Fig. 2.

Wanneer men een van die buisjes met behulp van een luchtstroom afkoelt, slaat er natrium op neer; er zullen dus na verloop van tijd droppels vloeibaar metaal aan de buisjes komen te hangen en er nu en dan afvallen.

Terwijl nu met den spectroheliograaf een opname gedaan wordt, beweegt zich de spleet S door het beeld in de richting van het pijltje (fig. 2), en tegelijkertijd beweegt zich de tweede spleet (de camera-spleet) langs de photographische plaat.

Onderstellen wij dat de openingen in P en Q zoo geregeld zijn, dat het beeld van de spleet in P juist samenvalt met de spleet in Q. Dan zal al het licht uit P, dat volgens rechte lijnen door den damp is gegaan, Q doordringen en dus bijdragen tot de lichtsterkte van het bovenbedoelde beeld der doorsnede in 't vlak van S. Golven echter die in den natriumdamp zoo ver van den rechten weg mochten afwijken, dat zij door het scherm Q worden opgevangen, zullen in het spectum van het doorgelaten licht ontbreken.

Wordt nu de oven langzaam verhit tot 380° of 390°, dan is de dichtheid van den damp het grootst en vrij gelijkmatig in het middendeel van de wijde buis en vermindert geleidelijk naar de einden toe; maar omdat daarbij de richting van den dichtheidsgradient nagenoeg samenvalt met die van den lichtbundel, zullen zelfs de golven die aan anomale dispersie onderhevig zijn, nauwelijks van den rechten

[1]) Zie de beschrijving in Versl. Natuurk. Afd. XV, p. 319.

weg afwijken. De D-lijnen in het zonnespectrum zien er dus uit als gewoonlijk. Maar zoodra wij een luchtstroom zenden door de buis B, ontstaan er dichtheidsgradienten in richtingen loodrecht op de as van die buis. De D-lijnen zullen nu niet meer voor alle deelen van het afgebeelde veld hetzelfde uiterlijk hebben. In 't spectrum van die deelen, waar merkbare dichtheidsgradienten voorkomen, zijn zij verbreed ; zij zijn daar omhuld door *dispersiebanden*. Daar de breedte van die banden samenhangt met de grootte van den gradient, zal zij in ons geval varieeren langs de lijnen en haar grootste waarde hebben op de plaats in het spectrum die overeenkomt met het vlak, gelegd door de assen van de buizen A en B. En naarmate de afstand tusschen S en B (fig. 2) grooter wordt, zal de breedte der banden verminderen.

Beschouwen wij thans de monochromatische beelden van de doorsnede der buis, zooals de spectroheliograaf die geeft wanneer de camera-spleet achtereenvolgens op verschillende afstanden van de D-lijnen ingesteld wordt.

Met de camera-spleet op λ 5850, buiten het gebied van den dispersieband van D_2, vertoont zich het veld gelijkmatig verlicht (zie nevensgaande plaat α); van de dichtheidsgradienten rondom de afgekoelde buis, die niettemin bestaan, is niets te zien, omdat licht van de gekozen golflengte in den natriumdamp zoo goed als rechtlijnig wordt voortgeplant.

Stellen wij de spleet op λ 5870, dan zijn we nog op een zoodanigen afstand van D_2, dat de grootheid $\frac{1-n}{\Delta} = R$ (waarin n den brekingsindex, Δ de dichtheid van den damp voorstelt) slechts een matige waarde heeft. Er zijn steile dichtheidsgradienten noodig om de stralen zóó sterk te doen afwijken, dat zij de spleet in Q missen, en zulke gradienten worden slechts aangetroffen zeer nabij de oppervlakte van de buis B. Wij krijgen dus het beeld β, waarin rondom B een smal donker gebied zichtbaar is.

De derde opname, γ, is gemaakt met de lichtsoort λ 5877. Voor deze golven is de uitdrukking $\frac{1-n}{\Delta}$ grooter dan voor λ 5870, zoodat kleinere waarden van den gradient reeds voldoende zijn om de stralen zich merkbaar te doen krommen. Het resultaat is een breeder donker gebied rondom B [1]).

De photographieën δ en ε zijn verkregen met de camera-spleet onderscheidenlijk op λ 5881 en λ 5885. In deze gevallen werd de buis A afgekoeld in plaats van B. Wij zien weer de donkere aureool grooter worden, naarmate de golflengte van het licht, dat wij gebrui-

[1]) In dit beeld is beneden rechts een hoek afgesneden, doordat een caoutchouc buis bij ongeluk in den weg der lichtstralen hing.

ken de waarde $\lambda_{D_2} = 5890$ nadert. Kwamen we nog dichter bij, dan zou tenslotte het geheele veld donker geworden zijn.

Dergelijke uitkomsten worden verkregen, wanneer wij D_1 naderen van den kant der *grootere* golflengten, en dus golven gebruiken waarvoor $\frac{n-1}{\Delta}$ toenemende waarden heeft.

Door een kleine wijziging te brengen in de opstelling der proef kunnen wij de tegenovergestelde uitwerking verkrijgen, namelijk dat juist alleen die stralen, welke anomale refractie ondergaan, in den spectroheliograaf binnendringen, terwijl het normaal gebroken licht verhinderd wordt, de spleet te bereiken. Wij hebben daartoe slechts de spleet in P zeer wijd te openen, en een vertikaal staafje, bijv. een lucifer, in het midden ervan te stellen, zoodat zijn beeld precies op de spleet in Q valt. Onder deze omstandigheden kan licht, dat uitgaat van de uit twee deelen bestaande opening in P, slechts dan door Q worden doorgelaten, wanneer het in den damp een afwijking heeft ondergaan.

Op die manier zijn de photographiën ζ, η, θ verkregen, waarbij de camera-spleet was ingesteld achtereenvolgens op λ 5884, λ 5886 en λ 5888. Waren er geen dichtheidsgradienten geweest, dan zou het geheele veld donker gebleven zijn; thans bewijzen *lichte* vlekken het bestaan der gradienten. — Bij de opnamen ζ en η werd de buis B, bij de opname θ de buis A afgekoeld.

De volgende algemeene uitspraak mag aan de resultaten van deze proeven worden vastgeknoopt:

Wanneer een verlichte absorbeerende dampmassa onderzocht wordt met den spectroheliograaf, en de camera-spleet van dat instrument ingesteld wordt op de *verst verwijderde uitloopers* van een dispersieband, dan zullen duidelijke onregelmatigheden in de helderheid van het veld zich alleen op die plaatsen van het beeld vertoonen, welke beantwoorden aan streken, waar *steile* dichtheidsgradienten in den damp worden aangetroffen. Stellen wij de spleet in *dichter bij het midden* van den band, dan zullen zich in het beeld ook de gebieden met *minder steile* gradienten openbaren, enz. — Zoo worden dus bijzonderheden aangaande de dichtheidsverdeeling van een damp met behulp van den spectroheliograaf duidelijk aan den dag gebracht *door anomale refractie,* zelfs in gevallen waarin het absorbeerend of emitteerend vermogen van die middenstof de structuur niet zou hebben doen kennen.

Wij willen thans nader overwegen, welke beteekenis aan deze feiten toekomt met het oog op astrophysische verschijnselen.

Gesteld, wij hebben te doen met een groote massa absorbeerenden damp van zoodanige gemiddelde dichtheid, dat wanneer deze gelijkmatig was, de absorptielijnen vrij scherp zouden zijn; en van zoodanige temperatuur en toestand van luminescentie, dat het emissiespectrum uiterst zwak is. Zoodra de dichtheid van deze massa onregelmatig wordt, kunnen sommige deelen ervan, wanneer licht van een andere bron er doorheen valt, aanleiding geven tot het ontstaan van donkere of heldere dispersiebanden, die in breedte en sterkte de absorptie- of emissielijnen verre overtreffen.

Het is daarom *mogelijk*, dat anomale refractie een zeer wezenlijk aandeel heeft in de voortbrenging van de verschijnselen, die met spectroscoop en spectroheliograaf aan de hemellichamen worden waargenomen; wij hebben te onderzoeken in hoeverre dat ook *waarschijnlijk* is.

Men zou bijvoorbeeld geneigd kunnen zijn, tegen te werpen, dat bij onze proeven het gebruik van een nauwe, scherp begrensde lichtbron, op een redelijken afstand geplaatst, een noodzakelijke voorwaarde scheen te wezen om eenigszins merkbare uitwerking van anomale dispersie te verkrijgen, en dat het aanwezig zijn van dergelijke omstandigheden in de zon op zijn minst genomen erg onwaarschijnlijk is. Inderdaad, hoe men zich het wezen van de photospheer ook denken moge, het zonnelichaam moet wel een groote, witgloeiende massa zijn, omhuld door een laag van absorbeerende dampen, zoodat de „lichtbron", beschouwd uit een punt van de chromospheer, een lichaamshoek van bijna 2π inneemt. Men heeft de omkeerende laag en de chromospheer wel eens vergeleken bij een dunne, doorschijnende laag van selectief absorbeerende vernis, gelegd om een lichtgevenden (bijv. phosphoresceerenden) bol: de photospheer. Het lijkt dan zeer onwaarschijnlijk, dat lichtbreking in dichtheidsgradienten (slieren) van zulk een doorschijnend omhulsel in staat zou zijn, om de gelijkmatige helderheid van dat boloppervlak ook maar eenigszins merkbaar te verstoren.

De vergelijking voert echter op een totaal verkeerd spoor, zoolang zij buiten beschouwing laat, dat van de absolute afmetingen ook de dichtheidsgradienten afhankelijk moeten worden gesteld. Behoorlijk doorgevoerd toch, leidt ons datzelfde beeld tot de tegenovergestelde gevolgtrekking, namelijk dat lichtbreking in de zonneatmospheer de verdeeling van het licht over de zonneschijf zeer aanmerkelijk moet wijzigen.

Wanneer wij de zon, beschouwd als lichtbrekend lichaam, op verkleinde schaal willen afbeelden, dan moeten wij de kromtestralen der banen van het licht in dezelfde verhouding verkleind denken

als de middellijn der zon, bijvoorbeeld 10^{10} maal (dan wordt de middellijn van de photospheer 14 c.M.). De algemeene vergelijking

$$\frac{d\Delta}{ds} = \frac{1}{R\varrho}\text{[1]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

leert ons nu dat, voor een gegeven waarde van de refractie-constante R, de kromtestraal ϱ van een lichtstraal omgekeerd evenredig is aan den dichtheidsgradient $\frac{d\Delta}{ds}$ in de richting naar het krommingsmiddelpunt. In ons beeld moeten daarom de dichtheidsgradienten 10^{10} maal zoo groot gedacht worden als in de zon.

Onderstellen wij nu dat ergens in de zonne-atmospheer onregelmatige dichtheidsgradienten voorkomen van dezelfde orde van grootte als de radiale (verticale) dichtheidsgradient in onze aardsche atmospheer, dus 16×10^{-10} [2]). Op de daaraan beantwoordende plaatsen van ons beeld moeten wij dan stellen $\frac{d\Delta}{ds} = 16$. Indien in de vernislaag werkelijk vele onregelmatig gerichte dichtheidsgradienten van deze orde van grootte voorkwamen, zou zij er geheel anders uitzien dan gewone, doorschijnende vernis, en zeer zeker storing brengen in de gelijkmatige helderheid van den achtergrond, als een laag glazen kralen of gezwollen sagokorrels. Zelfs normaal gebroken golven zouden merkbaar afwijken in zulk een omhulling. Want stellen we in onze vergelijking (1) $\frac{n-1}{\Delta} = R = 0{,}5$, en $\frac{d\Delta}{ds} = 16$, dan wordt $\varrho = 0{,}125$ cM., zoodat de gemiddelde kromming van zulke stralen voldoende is om, reeds op een weg van niet meer dan 0,1 cM. door de vernislaag, duidelijke verandering in de divergentie van lichtbundels te weeg te brengen.

Golven die anomale dispersie ondergaan, zullen natuurlijk veel sterker verstrooid worden door dezelfde middenstof. Beschouwen wij een absorbeerende stof die, op een zekere diepte in de zonneatmospheer, bijvoorbeeld tot een bedrag van 1 percent in het mengsel van gassen voorkomt. Dan zullen de dichtheidsgradienten van die stof slechts $^1/_{100}$ van die van het mengsel bedragen. Daarentegen kan

[1]) Zie Versl. Natuurk. Afd. XV, p. 326.

[2]) De waarschijnlijkheid dat dichtheidsgradienten, ongeveer loodrecht op de voerstralen van de zon, zeer algemeen voorkomen, is wederom toegenomen nu onlangs door HALE duidelijke aanwijzingen gevonden zijn voor bet bestaan van vortices, waarin de convectiestroomen op sommige plaatsen (namelijk in de zonnevlekken) sterk genoeg zijn om merkbare magnetische splitsing van absorptielijnen teweeg te brengen. (Zie de mededeeling van P. ZEEMAN in ditzelfde Verslag).

de refractie-constante voor golven uit de omgeving van haar absorptie lijnen waarden als 1000 of 2000 bereiken. Voor $R=1600$ (zooals waargenomen werd bij natriumdamp, Versl. Natuurk. Afd. XV, p. 327) wordt onze vergelijking (1):

$$\frac{1}{100}\frac{d\Delta}{ds}=\frac{1}{1600\,\varrho}$$

Op een diepte waar, in ons beeld, de onregelmatige dichtheidsgradienten der omhulling ongeveer $=16$ ondersteld worden, geeft de vergelijking

$$\varrho = 0.004 \text{ c.M.}$$

Het is duidelijk, dat onder zulke omstandigheden stralen gemakkelijk 90° en meer kunnen afwijken in de dunne schaal van doorschijnende stof die onzen bol bedekt, en dat derhalve een zeer ongelijkmatige lichtverdeeling in monochromatische photographieën van dezen, zooals de spectroheliograaf die levert, verwacht mag worden.

Deze gevolgtrekking is natuurlijk evengoed van toepassing op de werkelijke zon. Zij vloeit onmiddellijk voort uit onze éénige onderstelling, dat op een zekere diepte in de zon onregelmatige dichtheidsgradienten aanwezig zijn, vergelijkbaar in grootte met den verticalen gradient in de aard-atmospheer. In diepere deelen zouden dan gemiddeld grootere, in hoogere lagen kleinere gradienten overwegend zijn. Daar men nauwelijks twijfelen kan aan de juistheid van deze onderstelling, mogen wij besluiten dat een belangrijke invloed van anomale dispersie op astrophysische verschijnselen niet alleen mogelijk, maar *uiterst waarschijnlijk* is, ondanks de afwezigheid van nauwe spleten als lichtbronnen.

Hoewel wij natuurlijk gaarne toegeven, dat de verschijnselen die met den spectroheliograaf op de zonneschijf worden waargenomen wellicht gedeeltelijk moeten worden toegeschreven aan selectieve straling, afhankelijk van allerlei toestanden van temperatuur en luminescentie, mogen wij toch wel eens onderzoeken tot welke gevolgtrekkingen men komt, wanneer alleen maar het effect van straalbreking in een mengsel van dampen beschouwd wordt.

De samenstelling van de zonne-atmospheer kan niet in alle niveaux dezelfde zijn. Naarmate wij lager komen, zal waarschijnlijk het gehalte aan zwaardere moleculen toenemen; maar aan voorspellingen omtrent de volgorde waarin de elementen daarbij zullen worden aangetroffen, moeten we toch niet al te veel hechten, met het oog op mogelijke condensatie, en omdat de zwaartekracht wordt tegengewerkt door den stralingsdruk in een mate die afhangt

van de afmetingen der deeljes, en dus van talrijke onbekende omstandigheden binnen het zonnelichaam.

Intusschen moet er voor ieder element een zeker niveau bestaan, waar zijn procentgehalte in het mengsel een maximum bereikt. Daarom zullen de eigenaardigheden van het lichtbrekend vermogen der opeenvolgende lagen beheerscht worden door *verschillende* elementen. Een photographie, verkregen met den spectroheliograaf in een waterstof-lijn, vertoont een structuur die natuurlijk veroorzaakt is door de eigenaardige dichtheidsverdeeling van *al* de waterstof die zich in de opeenvolgende lagen bevindt, maar toch in hoofdzaak bepaald wordt door de dichtheidsgradienten in een vrij hoog liggende laag; terwijl een opname, gemaakt met een even sterke ijzerlijn, hoofdzakelijk van dieper gelegen deelen de structuur openbaren zal. Dit verklaart het verschil in karakter tusschen de spectroheliographieën in ijzerlicht en in waterstoflicht.

Maar het moet óók mogelijk zijn, zoo goed als identieke photographieën te verkrijgen met verschillende spectraallijnen, mits deze aan eenzelfde element toebehooren, òf aan elementen die in nagenoeg hetzelfde niveau van de zon hun sterkste verbreiding hebben; dan moet echter nog aan een andere voorwaarde voldaan worden, namelijk dat de camera-spleet in beide gevallen stralengroepen doorlaat

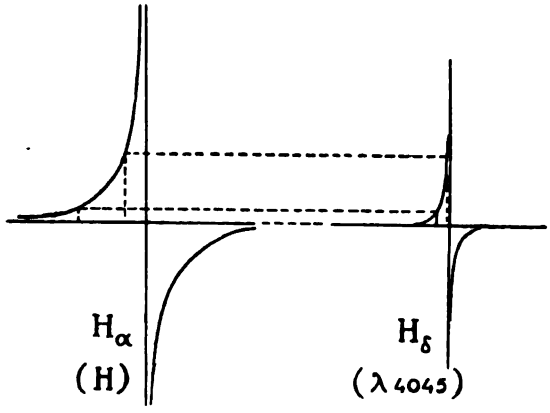


Fig. 3.

van gelijke breekbaarheid. Wanneer bijv. Fig. 3 de dispersie-kromme in de nabijheid van H_α en van H_δ voorstelt, zouden de wijdte en de plaats van de camera-spleet zóó gekozen moeten worden, dat slechts lichtsoorten werden doorgelaten, die in de twee dispersiebanden beantwoorden aan deelen van de kromme, ingesloten tusschen gelijke ordinaten. [1])

[1]) Golven die nagenoeg symmetrisch ter weerszijde van een absorptielijn gelegen zijn en voldoen aan de betrekking $n-1 = 1-n'$ tusschen de indices n en n' van

Onlangs heeft HALE gevonden [2]) dat, terwijl de H_β, H_γ en H_δ-lijnen in den spectroheliograaf zeer veel op elkander gelijkende resultaten geven, photographieën met de veel sterkere H_α-lijn verkregen, in sommige opzichten aanmerkelijk daarvan afwijken. Heldere flocculi komen daar voor op plaatsen, waar de H_δ-platen geen overeenkomstige objecten vertoonen. En terwijl de donkere H_α-flocculi in 't algemeen, wat plaats en vorm betreft, met de donkere H_δ-flocculi overeenstemmen, zijn zij meestal sterker en uitgestrekter dan de laatste. In sommige gevallen echter vertoonen zich kleine plekken donker op H_δ-platen, die afwezig of zwakker zijn op de correspondeerende H_α-platen.

Zulke verschillen nu zijn geheel van hetzelfde karakter als die welke men opmerkt tusschen photographieën, gemaakt met de spleet binnen de breede calciumbanden H of K, op verschillende afstanden van de centrale lijn. Zij kunnen dus op overeenkomstige wijze worden verklaard, als wij slechts onderstellen dat de stralen die voor de H_α-opnamen werden gebezigd, gemiddeld sterker gebroken werden dan de stralen, gebruikt voor de H_δ-opnamen, doch beide in hetzelfde stelsel van dichtheidsgradienten. Het is dan ook niet onwaarschijnlijk dat men in den dispersieband H_α een groep van golven zóó zal kunnen kiezen, dat een daarmee vervaardigde spectroheliographie nauwelijks te onderscheiden is van een H_δ-opname.

Dat ook lijnen van *verschillende* elementen spectroheliographieën kunnen leveren die zeer veel op elkander gelijken, blijkt bijv. uit het geval van calcium en ijzer. Onder de fraaie verzameling opnamen, gemaakt op Mount Wilson, vond ik verscheidene ijzer-(λ 4045)-platen, die inderdaad groote overeenkomst hadden met calcium-(H_1)-platen, behoorende tot de serie van denzelfden dag Daar de atoomgewichten van calcium en ijzer niet zoo heel veel uiteenloopen, en de niveaux waarin die dampen hun maximale dichtheid bezitten, dus waarschijnlijk niet ver van elkaar verwijderd zijn, kan de lichtbreking, door die beide elementen veroorzaakt, zeer wel de dichtheidsgradienten openbaren van ongeveer dezelfde laag in de zonne-atmospheer. In de twee photographieën zal dan dezelfde lichtverdeeling worden aan-

de middenstof voor die beide lichtsoorten, moeten in spectroheliographieën bijna dezelfde structuur doen zien over het grootste deel der zonneschijf. Dit volgt uit een beschouwing van de verschillende mogelijkheden betreffende relatieve ligging van dichtheidsgradienten en lichtbron. Daarom zal ook een H_δ-opname, waarbij de camera-spleet centraal geplaatst was, zoodat zij ongeveer de geheele breedte van dien vrij nauwen dispersieband in zich opnam, slechts op weinige plaatsen in 't oogloopend verschillen van eene opname, waarbij slechts de eene kant van den band gebruikt werd.

[2]) HALE, Solar Vortices. Contrib. from the Mt. Wilson Solar Obs. N°. 26.

getroffen, mits stralen van gelijke breekbaarheid in beide gevallen worden gebezigd. En aan deze voorwaarde kan voldaan worden door de camera-spleet te plaatsen op correspondeerende stralengroepen, als verduidelijkt door Fig. 3, wanneer wij deze thans betrekking doen hebben op de calciumlijn *H* en op de ijzerlijn λ 4045.

Bij een lijn van calcium en een van waterstof kon een dergelijke overeenstemming niet worden gevonden.

Natuurlijk moet de zaak nog van veel meer kanten beschouwd worden, eer men zal mogen besluiten of anomale dispersie al dan niet de voornaamste oorzaak is van het vlokkig uiterlijk der zonneschijf in monochromatisch licht. Platen, verkregen met een aantal lijnen van verschillende elementen, zullen vergeleken moeten worden. De groote 30-voets spectroheliograaf van den torentelescoop op Mount Wilson is voor zulk werk uitstekend geschikt, niet alleen omdat zijn groote dispersie het gebruik van fijnere lijnen veroorlooft, maar vooral omdat hij voorzien is van twee camera-spleten, zoodat volmaakt gelijktijdige opnamen met verschillende lijnen kunnen worden gedaan. Eerst door deze inrichting verkrijgt men werkelijk vergelijkbare monochromatische zonnebeelden, daar de anders zeer hinderlijke invloed van de veranderlijke lichtbreking in onzen dampkring er door ontgaan wordt.

Aan Professor George E. Hale gevoel ik mij ten zeerste verplicht, niet alleen omdat hij mij de gelegenheid opende tot het verrichten van een onderzoek in het zonne-observatorium Mount Wilson, maar nog meer wegens zijn warme en opwekkende belangstelling in de problemen, die uit de toepassing van het beginsel der anomale refractie in de astrophysica voortvloeien. Ook den Heeren F. Ellerman, W. S. Adams en Dr. Ch. M. Olmsted betuig ik oprechten dank voor de hulp en voorlichting, mij in zoo ruime mate geschonken.

Plantkunde. — De Heer Went doet een mededeeling over onderzoekingen van den Heer A. H. Blaauw: „*Omtrent de betrekking tusschen lichtsterkte en belichtingstijd bij phototropische krommingen van kiemplantjes van Avena sativa.*"

Een aantal jaren geleden heeft Wiesner [1]) trachten na te gaan, wat de minimum-lichtsterkte is, waarop verschillende planten nog phototropisch reageeren. Hij vond b.v. bij het epicotyl van Pisum

[1]) J. Wiesner. Die heliotropischen Erscheinungen im Pflanzenreiche. Wien, 1878, p. 178—180.

sativum en het hypocotyl van Lepidium sativum de grens der gevoeligheid nog niet bereikt bij een sterkte van 0,054 Normaalkaarsen (WIESNER drukt het uit in een eenheid, die gelijk is aan 6,5 Spermacetikaarsen). Bij het epicotyl van Phaseolus multiflorus ligt die grens juist bij 0,054 Norm. K. Terwijl de schrijver hier niets zegt omtrent den tijd, dien de proeven geduurd hebben, vermeldt hij voor het epicotyl van Vicia sativa, dat de kromming bij een lichtsterkte van 0,054 Norm. K. na 3 uur en 45 minuten begon op te treden, terwijl hetzelfde orgaan van Vicia Faba bij diezelfde lichtsterkte ook na 48 uur geen kromming vertoonde. Er is hier dus nergens nagegaan, wat de minimumtijd is, waarop een bepaalde lichtsterkte op een plant moet inwerken, om een phototropische kromming te doen optreden. Later zijn door FIGDOR [1]) soortgelijke proeven genomen, waaromtrent hier alleen vermeld kan worden, dat de onderste grens van de phototropische gevoeligheid door hem gevonden werd te liggen bij lichtsterkten kleiner dan 0.0003262 Norm. kaarsen bij kiemplantjes van Lepidium sativum, Amarantus melancholicus ruber, Papaver paeoniflorum en Lunaria biennis.

Daartegenover heeft CZAPEK [2]) zich beziggehouden met een bepaling van den praesentatietijd; daaronder verstaat hij het minimum van tijd, dat een plant eenzijdig licht moet ontvangen, om later een phototropische kromming te vertoonen. Voor kiemplantjes van Phalaris en Avena wordt die tijd door hem opgegeven te bedragen ongeveer 7 minuten, zonder dat daarbij melding wordt gemaakt van de gebruikte lichtsterkte. De schrijver heeft er vermoedelijk niet aan gedacht, dat dit noodig was, omdat zijn onderzoek bijna uitsluitend liep over geotropie, waar het begrip praesentatietijd zonder nadere bijvoeging wel iets zegt, omdat men daar met een constant werkende kracht te doen heeft.

Het lag echter voor de hand, de vraag te stellen of er een verband bestaat tusschen die praesentatietijd en de lichtsterkte. De Heer A. H. BLAAUW heeft zich nu bij zijn verdere onderzoekingen in mijn laboratorium over de perceptie van phototropische prikkels ook met deze vraag beziggehouden en is daarbij tot zeer verrassende uitkomsten gekomen, waaromtrent ik hier deze korte voorloopige mededeeling wensch te doen.

De proeven werden genomen met geëtioleerde kiemplantjes van

---

[1]) W. FIGDOR Versuche über die heliotropische Empfindlichkeit der Pflanzen. Sitz. ber. d. Math. Naturw. Classe d. K. Akademie der Wissensch. Wien, Bd. CII. Abth. 1. 1893, p. 45.

[2]) F. CZAPEK. Weitere Beiträge zur Kenntniss der geotropischen Reizbewegungen. Jahrbücher für wissenschaftliche Botanik. Bd. XXXII. 1898, p. 185.

Avena sativa, waarvan de coleoptile buitengewoon gevoelig is voor lichtprikkels, zooals bekend genoeg is sedert de onderzoekingen van DARWIN en ROTHERT.

Voor de zwakke lichtsterkten werd gebruik gemaakt van een Auerbrander (gasgloeilicht), die met behulp van een gasdrukregulateur zeer constant werd gehouden. Door de objecten op verschillenden afstand van deze lamp te plaatsen en door het licht eventueel nog te laten gaan door schermen van roetglas, verder door het licht te laten vallen op een plaatje van melkglas met diaphragma, dat dan als lichtbron fungeerde, konden alle mogelijke lichtsterkten verkregen worden van 100 Hefnerkaarsen af naar beneden toe. De lichtsterkte werd bepaald met behulp van een photometer van WEBER. De gaslamp stond buiten het lokaal, waar zich de proefplanten bevonden, zoodat elke schadelijke invloed van het lichtgas op deze objecten voorkomen werd.

Voor groote lichtsterkten werd gebruik gemaakt van een electrische booglamp uit een projectielantaarn, waarvan het licht nog door lenzen geconcentreerd werd, zoodat men hierdoor kon gaan tot lichtsterkten van 18000 Hefnerkaarsen.

De belichtingstijd wisselde van 13 uur tot 0,001 secunde; de zeer korte tijden werden verkregen met behulp van een spleetmomentsluiter van een fotografie-apparaat.

De planten werden nu op verschillende afstanden van de lichtbron geplaatst, daarna gedurende een bepaalden tijd belicht, vervolgens in het donker gelaten en na ongeveer 2 uur onderzocht, of er phototropische krommingen waren opgetreden. Wanneer afstand en tijd juist gekozen waren, bleek er een scherpe grens te zijn, zoodat beneden een zekere lichtsterkte geen kromming had plaats gehad, daarboven zich alle of bijna alle plantjes naar het licht toe gekromd hadden. Men kan dus zeggen, dat er bij een bepaalden duur van de belichting een zeker minimum van lichtsterkte noodig is, om gepercipieerd te worden, of beter om de reactie teweeg te brengen, want omtrent de eigenlijke perceptie van den lichtprikkel weten wij toch niets.

Een opvallend resultaat was nu zeker al, dat, terwijl zooals boven gezegd, de praesentatietijd aangenomen werd op 7 minuten, de Heer BLAAUW bij zijn proeven nog reactie kreeg, wanneer de belichtingstijd op 0,001 secunde verminderd werd, mits dan ook de lichtsterkte zeer groot genomen werd.

Maar nog belangrijker worden de resultaten, wanneer men deze in cijfers uitdrukt, zooals in de volgende tabel geschied is. Kolom I geeft den belichtingstijd, kolom II de daarbij behoorende lichtsterkte

in Hefnerkaarsen uitgedrukt, die nog juist een phototropische reactie tot stand deed komen, kolom III het product van deze beide, wanneer de tijd in secunden wordt uitgedrukt, wat men dus noemen kan secundekaarsen. M. a. w. kolom III geeft aan voor elk geval, hoeveel licht men gedurende 1 secunde op de plant had moeten laten vallen om dezelfde hoeveelheid licht te geven als in de proef.

I (Belichtingstijd).		II (Lichtsterkte).		III (Secundekaarsen).
13	uur	0,000439	H.K.	20,6
10	„	0,000609	„	21,9
6	„	0,000855	„	18,6
3	„	0,001769	„	19,1
100	minuten	0,002706	„	16,2
60	„	0,004773	„	17,2
30	„	0,01018	„	18,3
20	„	0,01640	„	19,7
15	„	0,0249	„	22,4
8	„	0,0498	„	23,9
4	„	0,0898	„	21,6
40	secunden	0,6156	„	24,8
25	„	1,0998	„	27,5
8	„	3,0281	„	24,2
4	„	5,456	„	21,8
2	„	8,453	„	16,9
1	„	18,94	„	18,9
2/5	„	45,05	„	18,0
2/25	„	308,7	„	24,7
1/25	„	511,4	„	20,5
1/55	„	1255	„	22,8
1/100	„	1902	„	19,0
1/400	„	7905	„	19,8
1/800	„	13094	„	16,4
1/1000	„	26520	„	26,5

Uit kolom I en II volgt nu reeds, dat men bij korteren belichtingstijd de lichtsterkte moet laten toenemen, wil men een kromming zien intreden. Maar de berekening van kolom III doet ons bovendien zien, dat lichtsterkte en belichtingstijd omgekeerd evenredig aan elkaar zijn, of met andere woorden, dat er een bepaalde hoeveelheid licht noodig is, om de reactie te doen optreden, onafhankelijk van den belichtingstijd. Immers de cijfers van kolom III zijn wel niet volkomen aan elkaar gelijk, maar zij vertoonen duidelijk een schommelen om een gemiddelde. Volkomen gelijkheid zal men bij den aard dezer proeven ook wel niet mogen verwachten, wanneer men bedenkt, dat de grens van de zich al dan niet krommende plantjes

niet altijd absoluut zuiver te bepalen is, dat er natuurlijk altijd individueele verschillen tusschen de haverplantjes voorkomen, die men alleen zou kunnen elimineeren door telkens groote reeksen van proeven te nemen en dat verder de omstandigheden, wat vochtigheidstoestand, temperatuur, enz. betreft, bij de verschillende proeven niet volkomen constant waren te maken.

Het had weinig zin, nog kortere tijden van belichting te kiezen dan 0,001 secunde of nog langere dan 13 uur, daar het verkregen resultaat duidelijk doet zien, dat het aankomt op den toevoer van een bepaalde hoeveelheid stralende energie, om de phototropische kromming te zien optreden, waarbij het onverschillig is, of deze in zeer korten tijd wordt toegevoerd, dan wel uiterst langzaam. Dit resultaat is dus volkomen in overeenstemming met de opvatting van PFEFFER — ten minste voor zoover het lichtprikkels betreft —, dat de werking van een prikkel te beschouwen zou zijn als een verschijnsel van „Auslösung".

Een dergelijke prikkeldrempel is ook gevonden voor het menschelijk oog. Het is zeker uiterst moeilijk, menschelijke waarnemingen en reacties, door planten uitgevoerd als gevolg van lichtprikkels, met elkaar te vergelijken, maar waarnemingen van BLOCH en CHARPENTIER wijzen toch op een groote analogie, wat het beste blijken kan door het citeeren van eenige zinsneden van den laatstgenoemden schrijver[1]): „Nous avons vu le minimum perceptible varier pour des durées de l'excitation allant de 2/1000 à 125/1000 sec. Dans ces conditions le minimum perceptible varie toujours sensiblement en raison inverse de la durée de l'excitation. Si la lumière est intense, elle produira cet effet en moins de temps, si elle est faible, elle devra, par contre, durer davantage. Pour que la sensation se produise il faut que, sur une zone rétinienne donnée et dans un certain temps, il arrive pour ainsi dire *une masse constante de lumière*, peu importe que cette masse se distribue sur un grand ou sur un petit espace et qu'elle arrive vite ou lentement sur la rétine. C'est là un fait important, dont il conviendra de rechercher les analogies sur d'autres territoires sensoriels".

Uit waarnemingen door BACH[2]) gepubliceerd, kan wellicht afgeleid worden, dat ook voor geotropische krommingen iets dergelijks geldt, als de Heer BLAAUW voor de phototropische vond. Ik hoop, dat nadere onderzoekingen in mijn laboratorium daaromtrent zekerheid zullen verschaffen. *Utrecht*, September 1908.

[1]) CHARPENTIER. Archives d'Ophthalmologie. X. 1890, p. 122—123.

[2]) H. BACH. Ueber die Abhängigkeit der geotropischen Praesentations- und Reaktionszeit von verschiedenen Aussenbedingungen. Jahrb. für wiss. Botanik. Bd. XLIV. 1907, p. 86.

Scheikunde. — De Heer A. F. HOLLEMAN doet eene mededeeling over: „*De nitratie van toluol.*"

Wegens haar groot technisch belang is de nitratie van toluol herhaaldelijk bestudeerd; ook de bepaling van de hoeveelheid *o*- en *p*-nitrotoluol die het reactieproduct bevat, is eenige malen uitgevoerd. RAOUL PICTET, C.r. **116**, 815 (of B. **26**, 362 ref.) deelt mede, dat wanneer toluol bij — 55° wordt genitreerd, er 5.5 maal zooveel *p*-nitrotoluol ontstaat dan wanneer de nitratie bij 0° wordt uitgevoerd. HOLDERMANN, B. **39**, 1250, trachtte de verhouding, waarin *o*- en *p*-nitrotoluol ontstaan, te wijzigen door katalysatoren (meestal bestaande in metaalzouten) aan het salpeterzwavelzuur toe te voegen, waarmede hij nitreerde. De hoeveelheid *o*-nitrotoluol, in het nitratieproduct aanwezig, wisselde daardoor echter slechts af tusschen 57.16 en 60.85°/₀. De temperatuur werd bij deze proeven tusschen 5 en 10° gehouden. Met salpeterzuur van het spec. gew. 1.52 bij 0° genitreerd werd 52.7°/₀ *o*-nitrotoluol verkregen; bij toevoeging van verschillende zouten (in welke hoeveelheid wordt ook hier niet aangegeven) aan dit zuur daalde de hoeveelheid *o*-verbinding; bij aanwending van nikkelsulfaat zelfs op 45.5°/₀. FRISWELL, C. Bl. 1908[1], 2092 nitreerde toluol onder, niet nader aangegeven, veelvuldige variatie der omstandigheden, om de opbrengst aan *p*-nitrotoluol op te voeren. Hij verkreeg echter steeds 60—65°/₀ ortho- en 40—35°/₀ *p*-verbinding.

Geen dezer scheikundigen maakt ook slechts met een enkel woord gewag van de wijze, waarop zij deze bepalingen hebben verricht, hoewel HOLDERMANN zijne resultaten zelfs tot in twee decimalen opgeeft. Ook loopen de verkregen cijfers, zooals uit bovenstaand overzicht blijkt, sterk uiteen. Daarenboven heeft NÖLTING (B. **12**, 443; **18**, 1337) aangetoond, dat het nitratieproduct van toluol *m*-nitrotoluol bevat, waarvan hij het gehalte op 1 à 2°/₀ schat. Het is dus wel duidelijk, dat van eene eenigszins nauwkeurige kennis der samenstelling van het nitratieproduct van toluol nog geen sprake is; daarom droeg ik aan den heer VAN DEN AREND op, die samenstelling te bepalen met behulp der meer nauwkeurige methoden, die daarvoor in mijn laboratorium zijn uitgewerkt. De methode der stolpunten was in dit gegeven geval de meest praktische.

Voor hare toepassing is het noodig, zich eerst de drie mononitrotoluolen in volkomen zuiveren toestand te verschaffen. Door de firma MEISTER, LUCIUS en BRÜNING wordt sinds enkele jaren een praeparaat van *o*-nitrotoluol van groote zuiverheid verkrijgbaar gesteld. Een vroeger van die firma ontvangen praeparaat bevatte nog 0.4°/₀ *p*-nitrotoluol (zie Versl. Kon. Akad. **1904**, 398). Op mijn verzoek had zij

de groote welwillendheid, eene partij van dit bijna zuivere *o*-nitrotoluol nog eens door uitvriezen te zuiveren, en mij van dit zoo gereinigde praeparaat 2 Kgr. ter beschikking te stellen, waarvoor ik ook hier aan die firma mijn oprechten dank betuig. Dit bleek, volgens de l.c. beschreven methode onderzocht, nog slechts 0.13°/₀ *p*-nitrotoluol te bevatten en werd, onder aanbrenging van eene correctie voor dit gehalte aan *p*-verbinding, door den heer VAN DEN AREND, zonder verdere zuivering dan eene eenmalige distillatie, ten einde het er in opgeloste water te verwijderen, bij zijne proefnemingen gebruikt. Het bleek verder, dat de methoden, die door REVERDIN en LA HARPE (Beilsteins Handbuch II, 91) en door LOESNER, J. pr (2) **50**, 567 zijn voorgesteld om *o*-nitrotoluol van daarin aanwezig *p*-nitrotoluol te bevrijden, volkomen onbruikbaar zijn. *o*-Nitrotoluol is dimorph; de smeltpunten der beide modificaties werden door VAN DEN AREND aan zijn praeparaat op — 3°.7 en — 9°.4 bepaald. Volgens zijne waarneming ontstaat de instabiele, hooger smeltende modificatie het gemakkelijkst als men het vloeibare lichaam snel op ca. — 30° afkoelt. Aanvankelijk ontstaat dan eene vaste geelachtige massa, die bij verdere daling der temperatuur witte plekken begint te vertoonen en dan onder voortbrenging van een knetterend geluid geheel wit wordt; de zoo ontstane gekrystalliseerde massa smelt dan bij ca — 4°.

m-nitrotoluol wordt door DE HAEN in zeer zuiveren toestand in den handel gebracht. Het werd eenige malen gefractioneerd, waarna het smeltpunt bij + 16° werd gevonden, het kookpunt bij 230—231° (756 mM. drukking) zoodat het als zuiver kan worden aangemerkt.

p-nitrotoluol, afkomstig van KAHLBAUM, werd tweemaal uit alcohol omgekrystalliseerd en daarna in vacuo gedistilleerd; zijn stolpunt lag toen bij 54°.4.

Stolpuntskromme van o- en p-nitrotoluol.

°/₀ para-nitrotoluol	beginstolpunt	eindstolpunt
100.0	+ 54°.4	—
97.5	50°.0	—
91.6	46°.2	—
79.0	38°.5	—
72.9	33°.8	—
67.5	30°.4	—
60.5	24°.4	—
46.6	11°.6	— 15°.0
42.3	5°.4	15°.2
39.8	1°.8	15°.7

% para-nitrotoluol	beginstolpunt	eindstolpunt
37.2	— 1°.2	14°.6
33.5	6°.8	—
30.6	14°.8	—
24.9	14°.4	15°.6
16.3	12°.1	—
11.2	11°.3	—
0.0	0°.4	—
	gemiddeld	— 15°.2

Fig. 1 stelt de, met behulp dezer cijfers geconstrueerde stolpuntskromme voor.

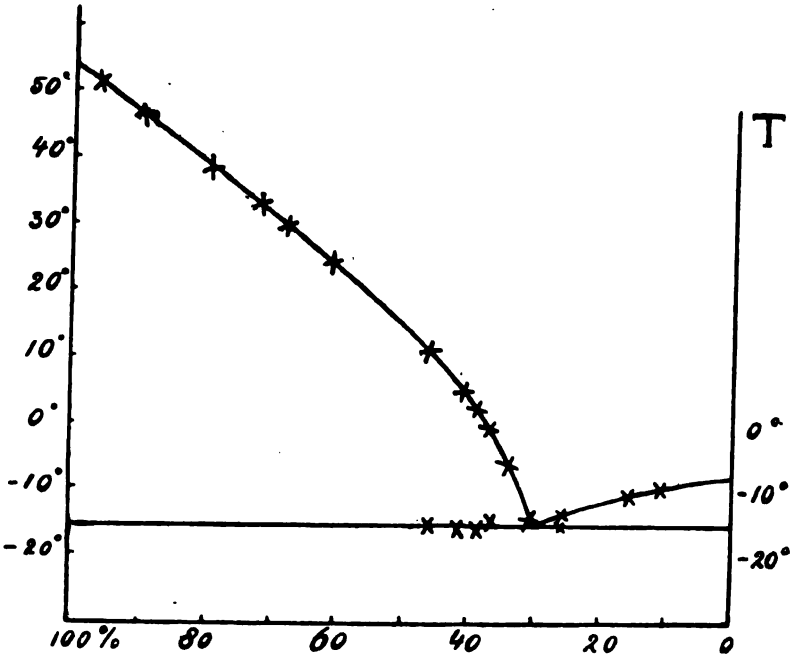


Fig. 1. Stolpuntskromme voor *o*- en *p*-nitrotoluol.

Voor de soortelijke gewichten van *o*- en *p*-nitrotoluol, alsmede voor enkele hunner mengsels vond de heer VAN DEN AREND de volgende cijfers bij 80°.0 :

100 %	*p*-nitrotoluol. . . .	1.0981	ber. uit de sp.
89.4 „	„	1.0993	gew. van *o*-
68.4 „	„	1.1007	en *p*-nitrotoluol
61.0 „	„	1.1014	1.1006
46.5 „	„	1.1023	1.1015
32.0 „	„	1.1033	
0.0 (100 %	*o*-nitrotoluol . .	1.1045 [1])	

De berekende cijfers zijn die welke, zonder dat contractie plaats heeft, uit de spec. gewichten der isomeren zijn af te leiden. De graphische voorstelling dezer cijfers geeft onderstaande figuur, die de contractie, welke bij de menging der isomeren plaats heeft, duidelijk doet zien door het hoogere spec. gewicht dat de mengsels in vergelijking met de berekende waarden (de rechte lijn) bezitten.

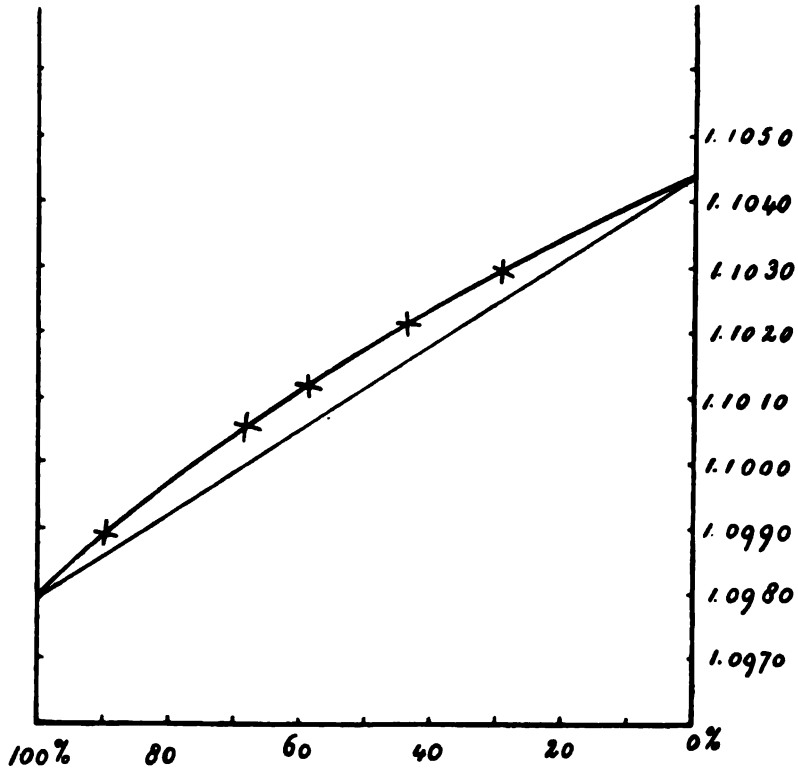


Fig. 2 Lijn der soortelijke gewichten van ortho- en paranitrotoluol.

[1]) De heer S. van Dorssen heeft op mijn verzoek met een op nieuw door hem geijkten pyknometer van Eykman de spec. gewichten van *o*- en *p*-nitrotoluol ook bepaald en vond daarvoor bij 80°.0, als gemiddelde van vier, resp. drie waarnemingen: *o*-nitrotoluol 1.1050; *p*-nitrotoluol 1.0993, dus waarden die beide een weinig grooter dan die van van den Arend zijn. Beider waarden zijn voor het luchtledige en voor de uitzetting van het glas gecorrigeerd. Ik blijf in het volgende de cijfers van v. d. Arend gebruiken, omdat hij al zijne bepalingen met denzelfden pyknometer uitvoerde en deze dus stellig onderling vergelijkbaar zijn.

Voor de nitratie van toluol werd volgens de methode van BEILSTEIN en KUHLBERG, A. **158**, 348 te werk gegaan, d. w. z. salpeterzuur bij toluol gebracht, en niet omgekeerd, omdat door hunne methode de vorming van dinitroprodukten geheel vermeden wordt. Het aangewende toluol distilleerde volkomen constant bij 110°.8 (bar 760 mM.) en was door koken met natriumdraad aan een opstijgenden koeler gezuiverd.

Het nitreeren van het aldus gereinigde toluol geschiedde bij de temperatuur van — 30°; 0°; + 30° en 60° en werd aldus uitgevoerd:

In een kolfje werd 75 gram toluol op de temperatuur gebracht, bij welke genitreerd zou worden. Terwijl mechanisch geroerd werd, druppelden langzaam 200 C.C. salpeterzuur van soortelijk gewicht 1.475 in het toluol. Dadelijk na toevoeging van de eerste druppels salpeterzuur kleurde zich de vloeistof intensief bruinrood, zoodat het niet mogelijk was te zien of er twee vloeistoflagen dan wel één homogeen vloeistofmengsel ontstond. De warmte-ontwikkeling gedurende het nitreeren was, althans bij 0°, gering. Na eenigen tijd werd het reactiemengsel in een grooten scheitrechter zoolang met water geschud, totdat geen zure reactie meer kon worden waargenomen.

Nadat vervolgens over natriumsulfaat was gedroogd, werd het product in vacuo gedestilleerd. Daarbij werd de temperatuur eerst gedurende eenigen tijd op ongeveer 40° gehouden, om eventueel ongenitreerd toluol te verwijderen, daarna ging onder een druk van 1 à 2 cM. bij 90° tot 100° alles, op eene zeer kleine rest na, over. Tegen het einde der destillatie ging vooral veel van 't gevormde para-nitrotoluol over, dat zich als een geel kristallijne massa in de afvoerbuis afzette.

Het destillaat bestond uit eene heldere lichtgeel gekleurde vloeistof.

Nadat van zulk een nitratie-mengsel het stolpunt en het soortelijk gewicht waren bepaald, werd nog eenmaal de destillatie in vacuo herhaald en wederom de bepaling van stolpunt en soortelijk gewicht verricht. Deze verschilden niet merkbaar van de eersten.

Ook de eindstolpunten konden vrij scherp bepaald worden; onderstaand tabelletje geeft een overzicht van de uitkomsten:

Nitratie bij:			Soort. Gew.
— 30°	beginstolpunt	+ 4°.1	1.1026
	eind „	— 16°.6	
0°	begin „	+ 2°.8	1.1026
	eind „	— 16°.8	
+ 30°	begin „	+ 1°.4	1.1027
	eind „	— 16°.9	
+ 60°	begin „	— 0°.8	1.1028
	eind „	— 17°.4	

De soortelijke gewichten werden weder bepaald bij de temperatuur van kokend benzol en gereduceerd op 80°.0. Zij zijn gecorrigeerd voor vacuum en uitzetting van het glas.

Ik heb deze waarnemingen ten deele laten herhalen door de heeren CALAND, VAN DORSSEN en DE LEEUW, die wederom zelf toluol, op de aangegeven wijze gereinigd, hebben genitreerd en van hun nitratieproduct begin- en eindstolpunt, alsmede het spec. gewicht bepaald hebben. Zij vonden :

Nitratie bij:			Spec. gew.
0°	beginstolpunt	: + 1°.0 ; + 2°.7	1.1026
	eind „	: —18°.1 ; —18°.4 ; —18°.2	
60°	begin „	: + 3°.1	1.1023
	eind „	: —18°.5	

De eindstolpunten werden dus iets lager gevonden ; wat het beginstolpunt van + 3°.1 bij de nitratie bij 60° betreft, moet worden opgemerkt, dat hierbij het mengsel van toluol en salpeterzuur een nacht over was blijven staan en zich daarbij in twee lagen gescheiden had, hetgeen bij VAN DEN AREND's bewerking niet het geval geweest is. Bij een beginstolpunt van — 0°.8 behoort een gehalte aan *p*-nitrotoluol van 37.5°/₀; bij dat van + 3°.1 een gehalte van 40.7°/₀, wanneer wij voorloopig de kleine hoeveelheid *m*-nitrotoluol, die in het nitratieproduct aanwezig is buiten rekening laten. Daar een gehalte van 40.7°/₀ *p*-nitrotoluol met een spec. gew. van 1.1026 overeenkomt, blijkt dat, zelfs wanneer wij bij + 60° de nitratie op de aangegeven wijze uitvoeren, geen hooger genitreerde producten ontstaan. Dit blijkt ook uit de ligging van het eindstolpunt, dat weinig lager is dan bij de nitratieproducten, bij lagere temperaturen verkregen.

Om het gehalte van het nitratieproduct van *o*-, *m*- en *p*-nitrotoluol te bepalen moet men het als ternair mengsel beschouwen en de daling bepalen, die de begin- en eind-stolpunten ondergaan door toevoeging van eene kleine hoeveelheid *m*-nitrotoluol, daar door het onderzoek van NÖLTING l.c. reeds vaststaat dat het gehalte aan dit laatste slechts enkele procenten bedraagt.

Een mengsel van zuiver *o*- en *p*-nitrotoluol wegende 2.8319 gram en bestaande uit 35.5°/₀ para- en 64.5°/₀ ortho-nitrotoluol bezat een beginstolpunt — 3°.8 en een eindstolpunt — 14°.9.

Werden nu 0.0860 gram of 2.9°/₀, meta-nitrotoluol toegevoegd, dan daalde het beginstolpunt tot — 6°.0, het eindstolpunt tot — 16°.7,

Van het nitratiemengsel bij 0°, met een beginstolpunt van + 2°.8 en een eindstolpunt — 16°.8 kon nu, rekening houdende met de

gevormde meta-verbinding, op de volgende wijze het gehalte aan ortho- en para-nitrotoluol worden bepaald:

Bij toevoegen van 2.9°/₀ meta daalt het eindstolpunt van het kunstmengsel van — 14°.9 tot — 16°.7, dat is 1°.8. Van het nitratiemengsel is, door aanwezigheid van meta-nitrotoluol, het eindstolpunt in plaats van bij — 14°.9 (het eutectische punt van het mengsel ortho + para) bij — 16°.8 gevonden, dus 1°.9 lager. Hieruit volgt, dat in het nitratiemengsel van 0° aanwezig is $\frac{1.9 \times 2.9}{1\ 8} = 3.1$°/₀ meta.

Het beginstolpunt van het kunstmengsel is, door de aanwezigheid van die 2.9°/₀ metaverbinding, gedaald van — 3°.8 tot — 6°.0 dus 2°.2. Voor 3.1°/₀ meta moet de daling dus 2 .4 bedragen. Vindt men voor het nitratiemengsel een beginstolpunt + 2°.8, dan zou dit, indien geen metaverbinding aanwezig was, 5°.2 geweest zijn, waaruit volgt dat 42.2°/₀ para- en 57.8°/₀ ortho-nitrotoluol zouden zijn gevormd.

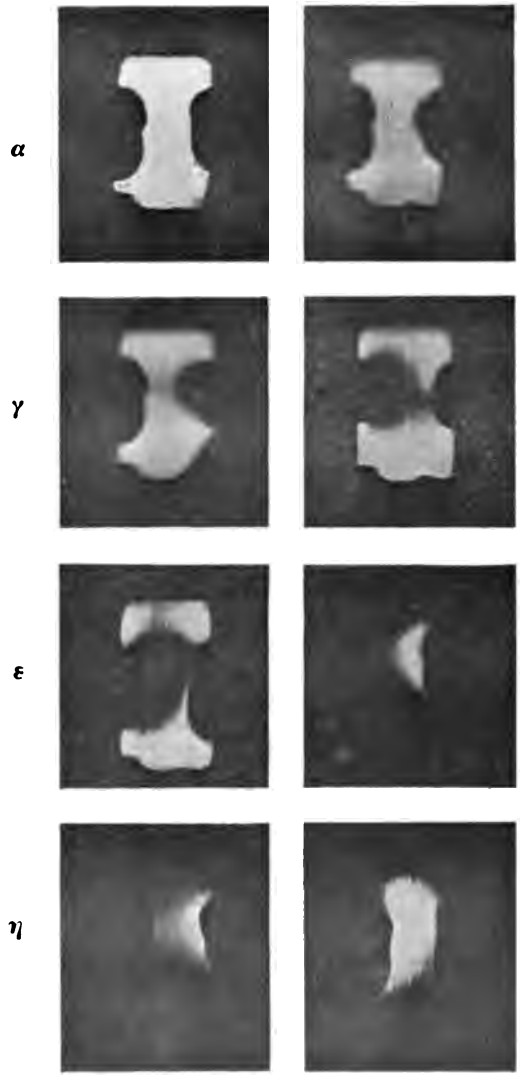
Deze wijze van berekening ook op de andere nitratie-mengsels toepassende, werd gevonden dat zij de volgende samenstelling hebben:

Nitratie bij			°/₀ para	°/₀ ortho	°/₀ meta
— 30°	beginstolpunt	+ 4°.1	41.7	55.6	2.7
	eind „	— 16°.6			
0°	begin „	+ 2°.8	40.9	56.0	3.1
	eind „	— 16°.8			
+ 30°	begin „	+ 1°.4	39.9	56.9	3.2
	eind „	— 16°.9			
+ 60°	begin „	— 0°.8	38.5	57,5	4.0
	eind „	— 17°.4			

Neemt men het eindstolpunt van het bij 0° bereide nitratieproduct op 18°.1 aan, d. i. het gemiddelde der later gevonden cijfers, dan wordt het gehalte aan *m* grooter en beloopt dit 5.3 °/₀. Er blijft dus omtrent de hoeveelheid *m*-verbinding die in het nitratieproduct aanwezig is, eene onzekerheid van ca één procent, als men het gemiddelde van de waarde van VAN DEN AREND eenerzijds en die der andere heeren anderzijds als het juiste eindstolpunt beschouwt. Maar ook om een andere reden is de bepaling der hoeveelheid *m*-verbinding niet nauwkeuriger te achten.

Bij bovenstaande berekening zijn nl. verschillende praemissen gemaakt. Zoo wordt verondersteld, dat althans over het eerste beloop, de lijn, die het binaire eutecticum van ortho- en paranitrotoluol verbindt met het ternaire eutecticum, eene rechte is Bovendien is aangenomen, dat de daling van het beginstolpunt evenredig is met toegevoegde kleine hoeveelheden van een derde isomeer. Alleen als de

W. H. JULIUS. „Spectroheliographisch onderzoek van verschijnselen, veroorzaakt door anomale refractie."



geheele ternaire smeltfiguur werd geconstrueerd zou eene exacte bepaling mogelijk zijn; toch geeft de methode, zooals ze hier is aangewend eene voldoend te achten benadering hetgeen duidelijk is in te zien door de beschouwing van fig. 3.

In het vlak OPO' P' ligt de smeltpuntskromme van *o*- en *p*-nitrotoluol. Is nu echter eene kleine hoeveelheid metanitrotoluol aanwezig, dan bepaalt men niet een punt der smeltpuntskromme O'E'$_1$ P', maar een punt eener kromme, dat op eene lijn O"E'$_1$P" ligt, die men verkrijgt door een vlak parallel aan het OP-vlak door het prisma te brengen, en wel op een afstand van het OP-vlak die overeenkomt met de hoeveelheid meta die aanwezig is. Koelt men een willekeurig mengsel M, bestaande uit *o*-, *p*- en *m*-nitrotoluol af, dan zal hij een bepaalde tempe-

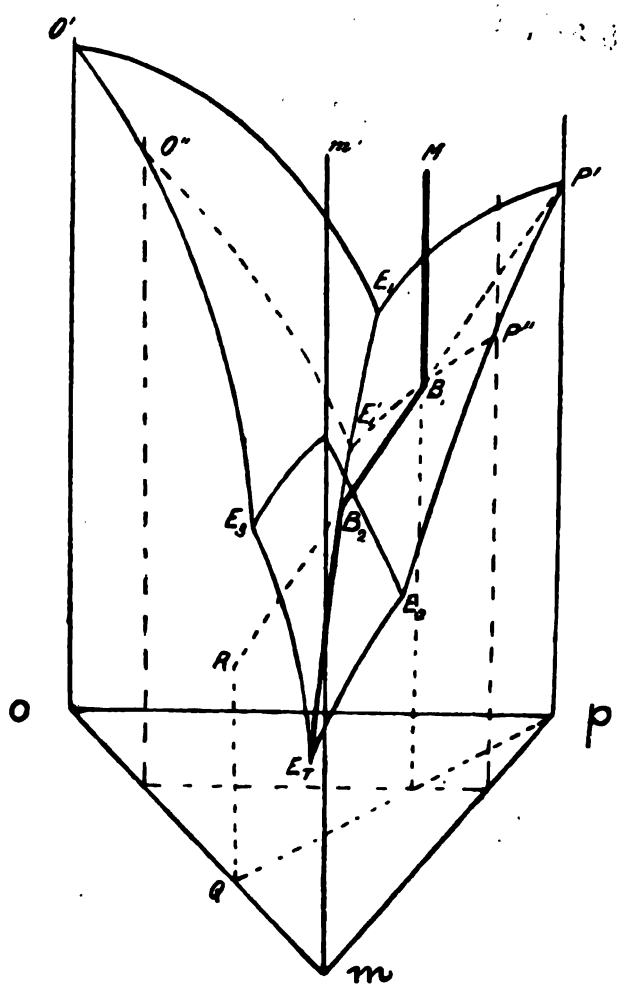


Fig. 3.

ratuur afscheiding van vast ortho of para plaats vinden, al naar gelang men een mengsel heeft van de samenstelling aangegeven door het rechter- of linker-smeltvlak. Dit punt B is het beginstolpunt. Bij verdere daling der temperatuur verloopt de stolling volgens eene kromme B_1B_2 die verkregen wordt door snijding van het smeltvlak $E_1P'E_2E_T$ met een vlak PP'QR, gaande door Pp' en het punt Q, dat de verhouding aangeeft, waarin *o* en *m* aanwezig zijn. Want in dat vlak verandert tijdens de afkoeling de verhouding van *o* en *m* niet, terwijl zich *p* afzet. Bij nog verdere afkoeling wordt de samenstelling van de vloeistof door de punten der lijn B_2E_T aangegeven, langs welke zich *o* en *p* beide afscheiden; in E_T begint zich ook *m* af te scheiden, bij welke temperatuur alles vast wordt.

Is de hoeveelheid *m*-nitrotoluol klein, dan ligt B_2 zeer dicht bij E_1 en mag de zeer korte lijn E_1B_2 als eene rechte beschouwd worden, waarvan bij bovenstaande berekeningen gebruik is gemaakt.

Amsterdam, org. chem. lab. d. Univ. Aug. '08.

Anatomie. — De heer WINKLER spreekt over: „*Het centrale zenuwstelsel eener witte doofgeboren kat: een bijdrage tot de kennis der gehoorsvezelstelsels*".

Door Prof. ZWAARDEMAKER werd spreker in het bezit gesteld van het centrale zenuwstelsel eener witte kat met blauwe oogen, die gedurende het leven nauwkeurig onderzocht, nimmer op acustische prikkels had gereageerd, dus doofgeboren was [1]).

---

[1]) Daaromtrent schrijft Prof: ZWAARDEMAKER het volgende:

„Dit witte poesje, afkomstig van een witte moeder met goed gehoor (één albino-„oog) is kennelijk doofgeboren. Althans van de geboorte af aan is het geobser-„veerd én nimmer is een reactie op acustische prikkels waargenomen. Ook opzet-„telijk onderzoek met de continueele tonenreeks en met sterke geluidsprikkels gaf „negatieve uitkomsten.

„Het statisch orgaan daarentegen bleek geheel normaal. Op 7 Juni 1908, kort „vóór den dood, is het in het Laboratorium nauwkeurig onderzocht.

„Klauteren langs het frame van een rotatie-toestel normaal, idem het springen „van een stoel. Bij rotatie, opgesloten in een zwartgemaakte kist, die van boven „een opening heeft om de waarneming van hetgeen er in voorvalt mogelijk te „maken blijkt èn kopnystagmus èn oognystagmus op de gewone wijze.

„Bij het stoppen van den toestel treedt het door den heer VAN ROSSEM (Gewaar-

Dit zenuwstelsel was bij het uitnemen eenigszins beschadigd, vermoedelijk omdat het bij deze dieren verbeende tentorium door den achterpool der groote hemisphaeren was getrokken.

Met uitzondering van dit onbruikbare gedeelte kon een doorloopende frontale doorsnedenreeks, deels volgens WEIGERT-PAL, deels met carmyn gekleurd, vervaardigd worden en vergeleken worden met de aanwezige frontaal-seriëen door normale kattenhersenen.

Al dadelijk bleek, dat *de aanhangende perifere octavuswortels*, ofschoon kleiner dan in de vergelijkingspraeparaten, *geen verandering hadden ondergaan.* In verband daarmeê werden geen veranderingen gevonden, 't zij in de laterale wortelvezels op het corpus restiforme, in de wortelvezels van den ventralen octavus-nucleus, of in het diepe merg van het tuberculum acusticum (spr. vertoont de daarop betrekking hebbende mikrophotogrammen).

Ofschoon ook die kernen iets kleiner zijn dan in de vergelijkingsserie, is het onmogelijk, dat *de oorzaak der doofheid der kat zou berust hebben op een primaire aandoening van het labyrinth.* Ware dit zoo, dan zou men hebben moeten terugvinden de bepaalde en scherp omschreven atrophiëen, die de wegneming van het labyrinth bij het pasgeboren dier, in het centrale zenuwstelsel in 't leven roept. (Spr. demonstreert deze atrophiëen aan praeparaten en mikrophotogrammen van hersenen van kort na de geboorte labyrinthloos-gemaakte konijnen). Dit was het geval niet.

Des te opvallender is het, dat de secundaire dorsale octavusbaan, de z.g. stria acustica, bij de doofgeboren kat nog niet $^1/_4$ van den omvang bezit, welke die bundel in de vergelijkingsserie bezit.

De uit hem voortkomende vezels die zich in de raphe kruisen (de machtige MONAKOW'sche kruising) is door hoogstens enkele vezeltjes vertegenwoordigd.

Ook de HELD'sche baan en de HELD'sche kruising ontbreekt nagenoeg geheel. Daarentegen is de secundaire ventrale octavus-baan in de ventrale lagen van het corpus trapezoides door vrij machtige vezelkruisingen vertegenwoordigd.

Met de verdwijning der MONAKOW'sche en HELD'sche kruisingen is ook het dorsale veld aan den top der bovenolyven, waarheen zich deze vezels begeven nauwlijks wéér te vinden. Het ontbreekt en dit is wéér de oorzaak van een zeer intensieve atrophie van den

---

„wordigen en reflexen opgewekt van uit de halfcirkelvormige kanalen. Diss. 1907. „Utrecht) nog eens beschreven na-rotatie op typische wijze op.

„Op den kleinen experimenteer-lift van W. MULDER worden onder uitsluiting van „het gezicht alle otolitenreflexen terug gevonden en dit geenszins verzwakt."

„Tijdens het leven miauwde het dier".

lateralen lemniscus, specieel in zijn mediale vezelmassa. (De desbetreffende praeparaten en micro-photogrammen vertoont spreker).

Het heeft dus allen schijn, alsof de natuur door eenig pathologisch proces een soortgelijk experiment heeft verricht, als VON MONAKOW [1]) deed, toen hem als de eerste, de geïsoleerde doorsnijding van den lateralen lemniscus gelukte.

In zulke gevallen toch gaat de z.g. MONAKOW'sche kruising geheel, de stria acustica, behoudens een rest, te niet, verdwijnen de radiair geplaatste groote cellen in het gekruiste tuberculum acusticum en atrophieeren een aantal cellen, zoowel in den nucleus ventralis, als in den binnensteel en in de kern van DEITERS. (Deze experimenteele atrophie van cellen demonstreert spr. aan praeparaten en mikrophotogrammen van konijnenhersenen bij welke, pasgeboren, dergelijke doorsnijdingen verricht waren).

Beiderzijds vindt men bij het doofgeboren katje (en dit is — niet het vezelverlies — de oorzaak der geringe verkleining der primaire kernen) bijna alle groote cellen in het tuberculum acusticum verdwenen, en die in de dorsale afdeeling van den nucleus ventralis, in den binnensteel en in de kern van DEITERS gedeeltelijk geatrofieerd.

Met dit geval is derhalve een argument gewonnen voor de meening *dat de secundaire geleidingswegen voor de gehoorvezels, in de dorsale en intermediaire octavusbanen en raphekruisingen zijn te zoeken en niet in de ventrale van het corpus trapezoides.*

Deze meening, overigens door VON MONAKOW reeds langen tijd gesteld, tegenover die van de school van FLECHSIG, welke in de ventrale banen en kruisingen den weg der gehoorsvezels vermoeden, is door spreker reeds vroeger verdedigd [1]).

De praeparaten der doofgeboren kat laten ook een beantwoording toe der vraag, hoe een pathologisch proces deze merkwaardige afwijking in het leven kan roepen.

Het is bekend dat de 4de ventrikel zich zijdelings uitbreidt in een z.g. recessus lateralis, waardoorheen de tela chorioidea dringt, die daardoor vrij aan den ventralen rand der oblongata komt te liggen.

Aan den ingang van dezen recessus ligt de stria acustica, mediaal van het tuberculum acusticum (dat den recessus mediaal begrenst) vlak onder het kamerependijm, vrij aan de oppervlakte.

Elke hydrops ventriculi die tot uitbochting van den recessus lateralis voert, bedreigt in volgorde, eerst de stria acustica, dan het

---

[1]) C. VON MONAKOW. Striae acusticae und untere Schleife. Archiv für Psychiatrie 1891. Bd. XXII S. 1.

[1]) C. WINKLER. The central course of the N. Actavus Verh. der K. Ak. v. Wetenschappen 1907.

tuberculum acusticum daarna de laterale wortelvezels met vernieling, en allerlei processen kunnen ventrikelhydrops bepalen, zoowel meningitische processen, die langs de tela opklimmen, als encephalitische, die met ependymitis gecompliceerd zijn.

Bij de doofgeboren kat bestaat ventrikelhydrops en een sterke uitbochting van den recessus lateralis, verdikking en woekering der tela chorioidea, en de stria is in een cul de sac afgeknikt (Spr. demonstreert dit aan praeparaten en mikrophotogrammen).

Soortgelijke uitbochtingen van den recessus met de bijbehoorende telawoekering werden, te samen met atrophie van de stria acustica, en dan wêer, al of niet met vernieling der laterale wortelvezels, ook bij doofstommen gevonden, waaromtrent weldra door den heer A. Brouwer zal worden bericht in zijn dissertatie.

Ook bij het doofgeboren katje is de ventrikelhydrops secundair aan een elders gelegen proces.

In de linker hemisphaer wordt nl.: het overblijfsel gevonden van een voor langen tijd, in casu vóór de geboorte, plaats gehad hebbend encephalitisch proces.

Deze haard ligt in de linker corona radiata en in de balkstraling. Hij laat de schors vrij. Holtevorming, gliawoekering, vezelverlies en vaatwoekering kenmerken de plaats waar hij zich bevindt.

Naar voren toe wordt zijn grens bepaald, ongeveer daar waar de gyrus lateralis zich in een gyrus ecto- en entolateralis splitst. Dan breidt hij zich uit onder de gyri supra- en ecto-sylvii mediales en overschrijdt naar achter niet de fissura ecto-sylvia posterior. Secundair is er een atrophie der mergstralingen naar de volgende windingen: de gyrus splenialis, suprasplenialis, ecto-lateralis, suprasylvius medialis en de ectosylvius medialis en het laterale stuk van den gyrus ectosylvius posterior. (Spr. demonstreert den haard aan teekeningen praeparaten en microphotogrammen).

Dit proces heeft gevolgen gehad.

1°. De reeds genoemde hydrocephalus internus, die zijkamers, 3den ventrikel, aquaeductus en IVden ventrikel, daar vooral den recessus lateralis distendeert.

2°. de met het bloote oog zichtbare atrophie der mergstralingen naar de straks genoemde windingen en in de balkvezels.

3°. cellenatrophie, *het sterkst* in de genoemde windingen, maar ook zeer duidelijk in andere windingen der linker en in de rechter hemisphaer. Die verandering is in de voorste gedeelten niet aanwezig, begint ver achter de zone waar de Betz'sche pyramiden worden gevonden. Over de achterpool is wegens de beschadiging niet te

oordeelen. Maar in de middengedeelten der hersenen is de verandering aldus:

De celatrophie is gelocaliseerd in de middenste cellagen der schors. De uitwendige korrellaag en die der pyramiden hebben weinig geleden maar de 4de laag of inwendige korrellaag en de 5de zoogenaamde subgranulaire pyramidenlaag hebben zeer veel cellen verloren, terwijl de 6de of polymorphe cellenlaag weder intact is.

4°. een met het blooie oog zichtbare atrophie van de ventrale kern van den linker thalamus opticus, die bijna geheel is verdwenen en cellen heeft verloren, zoowel als vezels.

5°. een zeer geringe atrophie in het meest caudale gedeelte van het linker corpus geniculatum mediale, merkwaardig omdat, daar waar het bracchium conjunctivum uit het ganglion quadrigeminum posticum in het corpus mediale binnentreedt, een aantal cellen zijn verdwenen. De atrophie in het linker bracchium conjunctivum is tevens sterker dan rechts. Het verschil tusschen de beide bracchia conjunctiva, die ieder op zich zelf atrophisch zijn in verband met de reeds beschreven atrophie van den lateralen lemniscus, ziet Spr. aan als gevolg van dezen haard, die slechts met een klein deel in de eigenlijke gehoorshersenen gelegen en niet gevolgd door een intensieve atrophie in het gelijkzijdig corpus geniculatum mediale, op zich zelf niet verantwoordelijk kan gesteld worden voor de hoorstoornis bij het diertje.

Het doofgeboren witte katje met blauwe oogen mag dus niet gelden als een doove varieteit van het kattengeslacht. Het is een pathologisch product. Een vermoedelijk intra-uterin onstane hersenontsteking verwoestte een deel der linker hemisphaer (niet de eigenlijke hoorstraling) en riep een hydrocephalus internus in het leven, welke gevaarlijk werd voor de stelsels aan de oppervlakte van de ventrikels. Het allermeest deed zich dit gevaar gelden voor die stelsels, welke aan den rand van den recessus lateralis gelegen, gemakkelijk van twee zijden in de knel raakten. De stria acustica ging dientengevolge te gronde.

Natuurkunde. — De Heer ZEEMAN biedt eene mededeeling aan van Mevr. H. B. VAN BILDERBEEK-VAN MEURS: „*Het verschijnsel van* ZEEMAN *bij de sterkere lijnen van het violette ijzerspectrum van af* λ 2380—λ 4416 *A.E.*"

(Mede aangeboden door den Heer V. D. WAALS).

Bij de hiervolgende onderzoekingen is gebruik gemaakt van een tralie van ROWLAND van 14000 strepen per inch, breedte 9 cM. kromtestraal 304.96 cM. opgesteld volgens de methode van RUNGE en PASCHEN.

Als lichtbron diende een vonk die oversprong tusschen de polen van den magneet zelf. Deze vonk werd verkregen door den ontladingsstroom van de secundaire keten van een inductieklos van RUHMKORFF waaraan een zelfinductie en condensator parallel geplaatst is.

Een en ander hoop ik uitvoeriger te behandelen in mijne dissertatie.

De belichtingstijd varieert van 30 tot 120 minuten.

Om de veldsterkte te bepalen is een opname gedaan van een *Fe* en *Zn* spectrum gelijktijdig en hieruit de veldsterkte berekend door de grootte der splitsing van de lijn 4680,33 *Zn* te vergelijken met de metingen van die lijn gedaan door COTTON en WEISS (Journal de Physique, Juni 1907) met dien verstande dat de veldsterkte evenredig aan de grootte der splitsing genomen wordt.

Van alle andere opnamen kan nu de veldsterkte berekend worden door de splitsing van een of andere *Fe*-lijn te vergelijken met de grootte der splitsing van diezelfde lijn bij de hierboven genoemde opname.

De veldsterkte was steeds ongeveer 30000. In de volgende tabel zijn de splitsingen alle gereduceerd tot de grootte $H = 31965$ Gauss.

Door voor de lens die het beeld van de vonk op de spleet werpt een kalkspaat prisma te plaatsen konden steeds aparte opnamen gemaakt worden van de trillingen loodrecht op of parallel aan de krachtlijnen. Als platen zijn gebruikt Dr. SCHLEUSSNER's Spezial Rapidplatten. Als ontwikkelaar Edinol.

In de volgende tabel zijn $\delta\lambda$ en λ uitgedrukt in *AE*. De golflengten en intensiteiten zijn overgenomen uit de tabellen van EXNER en HASCHEK.

Met $\delta\lambda$ wordt bedoeld bij tripletten en quadrupletten het verschil in golflengten tusschen de beide componenten $\perp$ op of // aan de krachtlijn trillend. Bij quintupletten zijn bij de trillingen $\perp$ op de krachtlijn opgegeven de verschillen in golflengten van de componenten naar rood en violet tot de middelste. Bij trillingen // krachtlijnen is de opgave als voor tripletten gedaan.

Hoewel het waarschijnlijk is dat sommige tripletten nog verder gesplitst kunnen worden, zoo is toch met het oog op de beteekenis die eene approximatieve kennis van de magnetische splitsing der ijzerlijnen in den laatsten tijd door HALE's ontdekking betreffende het spectrum der zonnevlekken[1]) heeft gekregen,eene publicatie wenschelijk.

De literatuur over de door anderen reeds gemeten ijzerlijnen hoop ik in mijne dissertatie te kunnen mededeelen.

---

[1]) GEORGE E. HALE. Solar Vortices and the ZEEMAN-Effect.

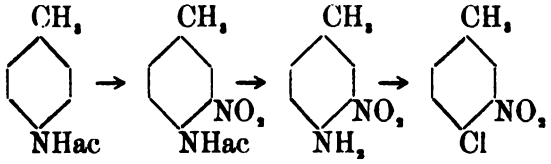
P. ZEEMAN. Solar Magnetic Fields and Spectrum Analysis. Nature. Vol. 78, p. 368 and 369, 1908.

λ	I	$\delta\lambda$ trill. ⊥ krachtl.	$\delta\lambda$ trill. // krachtl.	$\frac{\delta\lambda}{H\lambda^2}\,10^{13}$ trill. ⊥ krachtl.	$\frac{\delta\lambda}{H\lambda^2}\,10^{13}$ trill. // krachtl.
2382.17	10	0.214		11.80	
2395.74	4	0.206		11.23	
2562.65	5	0.238		11.34	
2585.98	10	0.292		13.66	
2598.46	8	0.310		14.36	
2599.50	20	0.334		15.46	
2607.17	10	0.315		14.50	
2611.99	10	0.335		15.36	
2617.70	6	0.361		16.48	
2625.70	4	0.324		14.70	
2628.39	8	0.229		10.37	
2631.12	4	0.299		13.51	
2631.44	3	0.289		13.06	
2727.64	6	0.379		15.94	
2739.63	15	0.327		13.63	
2743.28	8	waarsch.ongespl.			
2746.60	10	0.222		9.206	
2747.08	8	0.306		12.69	
2749.41	20	0.272		11.26	
2753.40	5	0.245		10.11	
2755.80	15	0.278		11.45	
2767.60	5	0.418		17.07	
2967.03	3	0.320		11.37	
2994.58	3	0.439		15.31	
3001.09	2	0.397		13.79	
3002.82	3	0.388		13.45	
3008.26	2	0.413		14.28	
3020.80	3	0.412		14.13	
3037.51	3	0.433		14.68	
3047.72	3	0.440		14.82	
3057.57	3	0.345		11.54	
3059.20	3	0.446		14.91	
3227.91	5	0.354		10.63	
3440.79	4	0.434		11.47	
3466.01	3	0.759	0.389	19.77	10.13
3475.60	3	0.625	waarsch. gespl.	16.19	
3490.76	4	0.574	" "	14.74	
3497.99	3	0.772		19.74	
3513.98	3	0.555		14.06	
3555.08	4	0.516		12.77	
3558.69	4	spl. niet te meten			
3565.53	5	0.349		8.589	
3570.29	10	0.420		10.31	
3581.34	10	0.460		11.22	
3585.48	3	0.446	0.387	10.85	9.418
3587.11	3	onscherp	0.489		11.89
3606.85	4	0.429		10.32	
3609.01	6	0.183		4.395	
3618.91	6	0.327		7.811	
3631.62	6	0.368		8.729	
3647.99	6	0.391		9.192	
3649.62	3	0.493		11.58	
3680.09	3	0.574	waarsch. gespl.	13.26	
3687.61	4	0.626		14.40	
3705.72	4	0.565	0.262	12.87	5.969
3709.40	4	0.632		14.37	
3720.09	10	0.496		11.21	

λ	I	$\delta\lambda$ trill. ⊥ krachtl.	$\delta\lambda$ trill. // krachtl.	$\frac{\delta\lambda}{H\lambda^2}\,10^{13}$ trill. ⊥ krachtl.	$\frac{\delta\lambda}{H\lambda^2}\,10^{13}$ trill. // krachtl.
3722.71	4	0.558	0.392	12.60	8.849
3727.78	5	0.659		14.84	
3733.47	3	0.355 0.354	0.587	7.968 7.945	13.17
3735.00	10	0.592		13.28	
3737.28	7	0.459		10.28	
3745.70	5	0.474		10.57	
3748.40	4	0.276	missch. gesplitst	6.145	
3749.62	10	0.574		12.77	
3758.39	8	0 540		11.96	
3763.98	6	0 422		9.318	
3765.70	3	0.484		10.68	
3767.36	5	0	0	0	0
3795.14	5	0.692		15.03	
3799.70	5	0.662		14.34	
3805.48	3	0.386		8.339	
3813.12	4	0.414		8.908	
3816 00	10	0.495		10 63	
3820 61	10	0.529		11.34	
3824.57	5	0.694		14.84	
3826.08	8	0.494		10.56	
3828.00	7	0.451		9.629	
3834.41	6	0.431		9.170	
3840.61	4	0.303		6.426	
3850.19	4	0	0	0	0
3856.55	5	0.690		14.51	
3860.12	6	0.682		14.32	
3865.75	4	0.348 0.348	0.658	7.285 7 285	13.78
3872.70	4	0.594	0.473	12.39	9.866
3878.20	4	0.812		16.89	
3878 78	5	0.715		14.87	
3886.45	5	0.802		16.61	
3895 80	3	0.676		13.93	
3903.10	5	0.544	0.217	11.17	4.456
3920.41	4	0.634		12.90	
3923.08	4	0.694		14.11	
3928 09	4	0.705		14.29	
3930.47	4	0.715		14.48	
3969.43	5	0.758		15.05	
4005.41	6	0.787		15.35	
4045.99	15	0.618		11 81	
4063.78	10	0.544		10.31	
4071.90	8	0.351		6.623	
4181.92	4	0.700		12.52	
4199.27	5	0.577		10.24	
4202.21	6	0.617		10.93	
4236.12	4	0.982		17.12	
4250.99	6	0.537	0.404	9 296	6.994
4260 70	10	0.878		15.13	
4271.99	10	0.705		12.09	
4294.32	4	0.608		10.31	
4299.43	4	0.790		13.37	
4308.10	15	0.648		10.92	
4325.97	15	0.528		8.826	
4383.73	20	0.697		11.35	
4404.95	15	0.678		10.93	
4415 30	10	0.654		10.50	

Scheikunde. — De Heer A. F. HOLLEMAN, biedt eene mededeeling aan over: „*De nitratie van p-chloortoluol*".

Het hiertoe vereischte *p*-chloortoluol werd door den heer VAN DEN AREND uit zuiver *p*-toluidien bereid; het had een kookpunt van 160—161° bij 754 mM. en een smeltpunt van + 7°; van de beide nitro-*p*-chloortoluolen werd het isomeer CH_3, Cl, NO_2 = 1, 4, 2 door hem uit *p*-chloortoluol door nitratie en scheiding der mononitroverbindingen verkregen; het smolt bij + 38°. Het andere isomeer CH_3, Cl, NO_2 = 1, 4, 3 bereidde hij volgens de methode van GATTERMANN, B. **18**,1483, die zich door het volgende schema laat voorstellen:



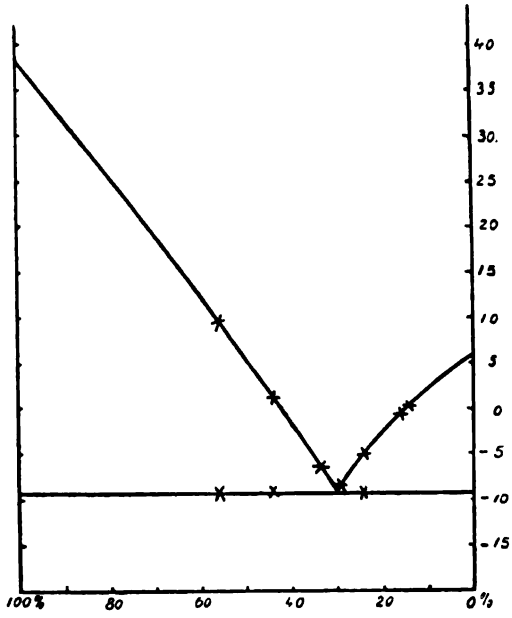
Het verkregen product had een kookpunt van 259—260° bij 759 mM. en een smeltpunt van + 7° in capillaire buis. Het stolpunt bedroeg + 5°8.

Voor de bepaling der relatieve hoeveelheden, die van beide isomeren in het nitratieproduct van *p*-chloortoluol voorhanden zijn, was ook hier de methode der stolpuntsbepaling de meest geschikte. Daarom moest de stolpuntskromme dier isomeren bepaald worden. De heer VAN DEN AREND vond de onderstaande cijfers:

% 2-NO_2-4-Cl-toluol.	Beginstolpunt	Eindstolpunt.
100.0	+ 38°.2	—
57.0	+ 9°.7	—7°.9
44.7	+ 1°.4	—8°.2
34.8	— 6°.3	—
29.8	— 7°.2	—
24.1	— 4°.1	—8°.2
17.5	— 0°.5	—
14.1	+ 0°.4	—
6.6	+ 4°.5	—
0.0 (100% 3-NO_2-4-Cl-toluol)	+ 5°.8	—

Van deze is de volgende figuur de grafische voorstelling.

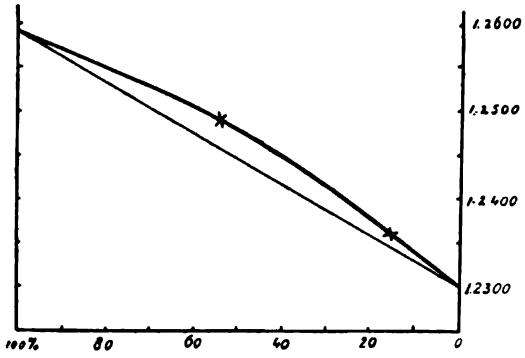
Voor de spec. gewichten der beide isomeren en voor eenige hunner mengsels vond de heer VAN DEN AREND de volgende cijfers, gecorrigeerd voor opwaartsche luchtdrukking en voor de uitzetting van het glas der pyknometers. De temperatuur was 80°.0.



Figuur 1.
Stolpuntslijn van de isomere nitro-*p*-chloortoluolen.

2-nitro-4-chloortoluol		ber.
100°/₀	1.2559	
57.0	1.2477	1.2446
17.5	1.2364	
0.0°/₀ (100°/₀ 3-nitro-4-chloortoluol)	1.2296	

Zij zijn in onderstaande graphische voorstelling vereenigd. De berekende waarde is degene die het spec. gew. volgens de rechte lijn in de figuur zoude moeten hebben, dus zonder contractie. Laatstgenoemde is hier dus vrij aanzienlijk.



Figuur 2.

Lijn der soortelijke gewichten voor mengsels van de mono-nitro-para-chloortoluolen.

Eerst na eenige vergeefsche pogingen gelukte het, de nitratie van para-chloortoluol met salpeterzuur alleen in dien zin door te voeren, dat juist alles was genitreerd en zich toch geene dinitroproducten hadden gevormd. Door de bepaling van de soortelijke gewichten kon de heer VAN DEN AREND zich hiervan overtuigen. Evenals bij toluol zelf bleek het ook hier praktisch, ter vermijding van de vorming van hooger genitreerde producten, het salpeterzuur bij het *p*-chloortoluol te laten vloeien en niet omgekeerd.

10 gram para-chloortoluol werd afgekoeld tot 0°. Bij deze temperatuur stolt het tot groote bladerige kristallen; op het oogenblik dat deze kristallen zich begonnen te vormen werd, onder flink schudden, salpeterzuur van 1.48 soort. gew. toegedruppeld. Reeds nadat ongeveer 1 C. C. HNO_3 was toegevoegd waren alle kristallen gesmolten. De vloeistof kleurt zich zeer donker en bestaat aanvankelijk uit twee lagen. Na verdere toevoeging van zuur, waarbij de temperatuur steeds op 0° wordt gehouden, wordt de kleur lichtgeel en wordt de vloeistof homogeen. Toen dit punt bereikt was, werd de verdere toevoeging van zuur gestaakt en na enkele oogenblikken de massa uitgegoten in water. In het geheel werd de viervoudige gewichtshoeveelheid salpeterzuur gebruikt. De lichtgele olie, die op den bodem zonk, werd zoolang met water uitgeschud, totdat geen zure reactie meer was waar te nemen, daarna gedroogd boven natriumsulfaat. Den volgenden dag werd het nitratieproduct tweemaal in vacuo gedistilleerd, waarbij een geringe zwarte rest achterbleef. De opbrengst aan aldus gezuiverd product was 12 gram; het vertoonde een beginstolpunt van + 10°.2, een eindstolpunt van —8°.0 Uit het eerste cijfer volgt, dat het nitratieprodrukt 58% $CH_3,Cl,NO_2 = 1, 4, 3$ moet bevatten, terwijl het cijfer voor het eindstolpunt, samenvallende met het eutectische punt, aangeeft, dat er geen andere stoffen in het mengsel dan deze twee aanwezig zijn. Dit bleek ook nog uit het spec. gewicht, hetwelk voor een kunstmengsel van deze samenstelling 1.2481 werd gevonden, terwijl het nitratiemengsel hetzelfde spec. gew. bezat. De heer DE LEEUW, die *p*-chloortoluol eveneens op boven beschreven wijze nitreerde vond voor het beginstolpunt van zijn product + 10°.9, voor het eindstolpunt — 8.°3. Dit beginstolpunt komt overeen met 58.8% 1.2.4.

De heer VAN DEN AREND mengde nu nog een kunstmengsel der beide isomeren, bevattende 58% 1.2.4 en 42% 1.3.4 met het nitratieproduct, in ongeveer gelijke hoeveelheden; het zoo verkregen mengsel

stolde bij + 10°.3. Het bewijs kan dus als volledig geleverd beschouwd worden, dat het nitratieproduct bovengenoemde samenstelling bezit. Eene chloorbepaling daarin volgens Carius gaf 20.3°/₀, ber. 20.7.

Twee nitraties werden op de boven beschreven wijze met salpeterzuur van soortelijk gewicht 1.45 bij + 30° verricht, welke beide een product opleverden, waarvan het soortelijk gewicht veel te hoog was. Het bleek, dat bij deze temperatuur gemakkelijk hooger gesubstitueerde nitroproducten zich vormen.

Wordt de nitratie bij + 60° verricht, dan ontstaat een product dat bij — 9°,2 stolt, d. i. bij eene temperatuur welke lager ligt dan de eutectische van mengsels van de beide zuivere componenten. Het soortelijk gewicht bedroeg 1.2626. Zonder twijfel zijn dus bij deze hooge nitratie-temperatuur belangrijke hoeveelheden meerwaardige nitroverbindingen ontstaan.

Amsterdam, Org. chem. lab. der Univ. Aug. '08.

Scheikunde. — De Heer A. F. Holleman biedt eene mededeeling aan: *„Over het quantitatieve onderzoek der nitratieprodukten van m-chloor- en m-broombenzoëzuur"*.

Het in den titel genoemde onderzoek heeft mij reeds meer dan eens beziggehouden [1]). Bij de nitratie van ieder dezer zuren ontstaan twee nitrohalogeenbenzoëzuren, n.l. 1,6,3 = CO_2H, NO_2, Cl (Br) als hoofdprodukt en 1,2,3 = CO_2H, NO_2, Cl (Br) als nevenprodukt: het was nu de vraag om te bepalen in welke verhouding deze zuren in het nitratiemengsel aanwezig zijn.

De redenen die er mij toe noopten, op dit onderzoek terug te komen zijn tweederlei: Vooreerst omdat het percentcijfer aan bijprodukt in het nitratiemengsel van *m*-chloorbenzoëzuur in het eerste onderzoek 2.8°/₀ hooger was gevonden dan in het tweede toen eene andere methode van analyse werd toegepast, en dit verschil in uitkomst niet voldoende was opgehelderd. Ten tweede omdat bij de nitratie van *o*-chloor en *o*-broombenzoëzuur en ook bij die van *m*-chloorbenzoëzuur gevonden was, dat bij 0° meer bijprodukt ontstaat dan —30°, terwijl bij de nitratie van *m*-broombenzoëzuur juist het omgekeerde resultaat was voor den dag gekomen.

Bij het eerste onderzoek werd de hoeveelheid hoofdprodukt bepaald door het nitratiemengsel met benzol uit te trekken en het spec. gewicht der benzolische oplossing te bepalen. Bij het tweede onderzoek

[1]) R. 19 188 [1900] en R. 20, 223 [1908].

werd de hoeveelheid nevenprodukt uit het stolpunt van het nitratiemengsel afgeleid. Voor dit vernieuwde onderzoek werd eene derde werkwijze gevolgd, n.l. het uittrekken van het nitratiemengsel met water en titreeren van de verkregen waterige oplosssing. Ik ga hier niet verder in op de bijzonderheden dezer methoden, daar ik die reeds herhaaldelijk, o.a. ter aangehaalder plaatse heb beschreven.

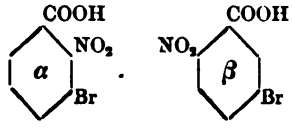
De heeren J. J. Polak en H. L. de Leeuw, die ieder afzonderlijk deze nieuwe bepalingen verricht hebben, gingen uit van chemisch zuivere praeparaten van *m*-chloor- en *m*-broombenzoëzuur, die met reëel salpeterzuur genitreerd werden, waarna het nitratieprodukt geheel volgens de in *R.* **20,** 223 beschreven methode werd verzameld. Ik wil hier enkel aan toevoegen, dat het volledige verwijderen van salpeterzuur uit het nitratieprodukt met bijzondere zorg geschiedde, daar het bleek dat dit zuur met groote hardnekkigheid wordt vastgehouden. Om het nitratieprodukt zoover te krijgen, dat het met zwavelzuur en diphenylamien bij gewone temperatuur geene of nog slechts eene zeer zwakke reactie gaf, was noodig om het vele malen met koud water uit te wasschen en in vacuo boven kalk te drogen. Natuurlijk werden de organische zuren, die in het waschwater in oplossing waren gegaan op de l.c. beschreven wijze weder teruggewonnen. Het verwijderen van de laatste sporen salpeterzuur was bij deze bepalingen daarom van groot belang, omdat de aanwezigheid van zelfs zeer geringe hoeveelheden van dit zuur, bij de hier gevolgde analytische methode, het procentcijfer van het bijprodukt te laag doet uitvallen.

Voor die methode wordt nl. eene hoeveelheid van ca 0.4 gr. nitratiemengsel met 100gr. water uitgetrokken en dan in de oplossing het gehalte aan zuren, door titratie met een ca $^1/_{10}$ normale loog, bepaald. Stel nu, dat in die hoeveelheid nitratiemengsel 1 mgr. salpeterzuur (= 0.25°/₀) werd vastgehouden, dan is dit stellig, naast de geheele hoeveelheid hoofdprodukt, in oplossing gegaan. 1 mgr. = 0.016 millimol. 1 cM³ der loog correspondeert met 0.1 millimol., zoodat ter neutralisatie 0.16 cM³ of ca 3 druppels worden vereischt. Daar het moleculairgewicht van chloornitrobenzoëzuur 201.5, dat van broomnitrobenzoëzuur 246 is, vertegenwoordigt 0.016 millimol. een gewicht van 3.2, resp. 3.9 mgr. of van 3/4. resp. 1°/₀ van het nitratiemengsel. Het daarin aanwezige hoofdprodukt wordt dus zooveel te hoog, het nevenprodukt evenveel te laag gevonden, daar dit laatste uit het verschil met 100 wordt berekend. Aangezien het gehalte aan nevenproduct bij deze mengsels zich niet boven 13°/₀ verheft (bij de gebroomde zuren) is eene fout van 1°/₀ hierin dus vrij belangrijk.

Ten einde door oplosbaarheidsbepalingen de samenstelling der nitratiemengsels te kunnen bepalen moest eerst voor de chloor- en de broomnitrobenzoëzuren de oplosbaarheid van het moeilijkst oplosbare (in beide gevallen het nevenprodukt) bepaald worden en dan de totale oplosbaarheid, wanneer de vloeistof aan dit minst oplosbare zuur verzadigd wordt gehouden, maar daaraan klimmende hoeveelheden van het hoofdprodukt worden toegevoegd, met dien verstande, dat de vloeistof daaraan steeds onverzadigd blijft, m.a.w. dat al het toegevoegde hoofdprodukt in oplossing gaat. Door middel van de aldus verkregen tabellen van oplosbaarheid laat zich dan uit een gegeven oplosbaarheidscijfer omgekeerd de samenstelling van het mengsel afleiden dat genoemd cijfer vertoont.

OPLOSBAARHEIDSLIJNEN.

Temperatuur 25.°0.

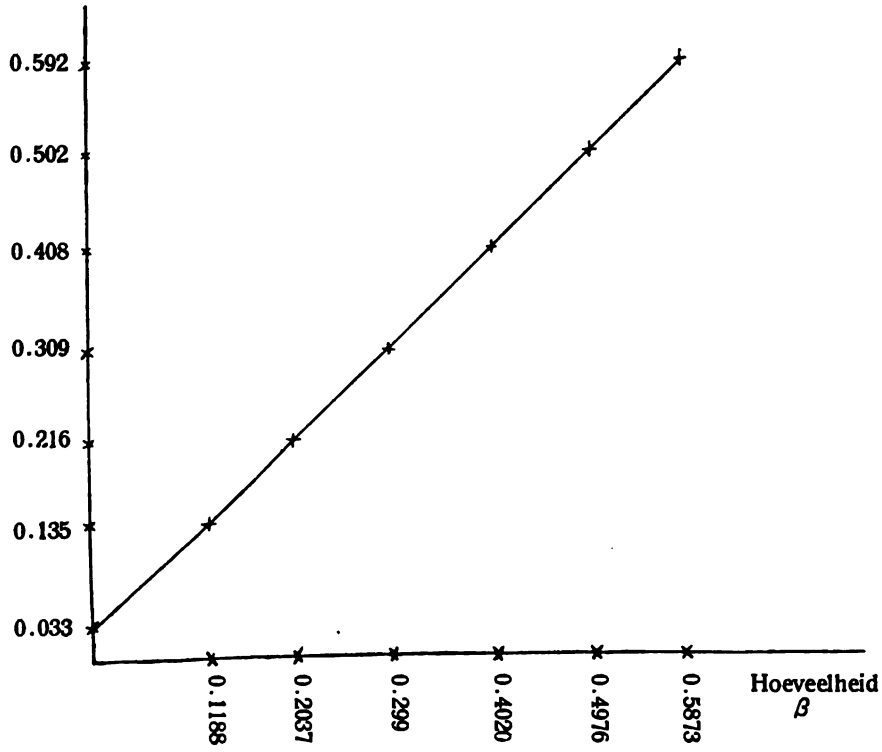
1. *Broomnitrobenzoëzuren* 

MG 246

Hoeveelheid stof met 100 cM³ water geschud	Uitgepipett. vloeistof	cM³ loog van 0.0287 n.	Totaal oplosbaarheid in gr. per 100 cM³ oplossing
100 mgr. α	59.455 gr.	2.75	0.033
1 gram β	60.180 „	63.15	0.741
100 mgr. α + 118.8 mgr. β	26.211 „	5.00	0.135
„ + 203.7 „ „	32.345 „	9.90	0.216
„ + 299.0 „ „	31.050 „	13.60	0.309
„ + 402.0 „ „	19.021 „	11.00	0.408
„ + 497.6 „ „	20.176 „	15.65	0.502
„ + 587.3 „ „	20.337 „	17.05	0.592

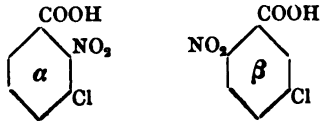
Duplo-bepalingen, door nog eens een bepaald quantum uit de fleschjes te titreeren, gaven altijd binnen de waarnemingsfouten liggende uitkomsten.

De grafische voorstelling doet ons zien, dat de lijn, op een kleine afwijking na in de aanvang, een rechte is.



Broomnitrobenzoezuren.

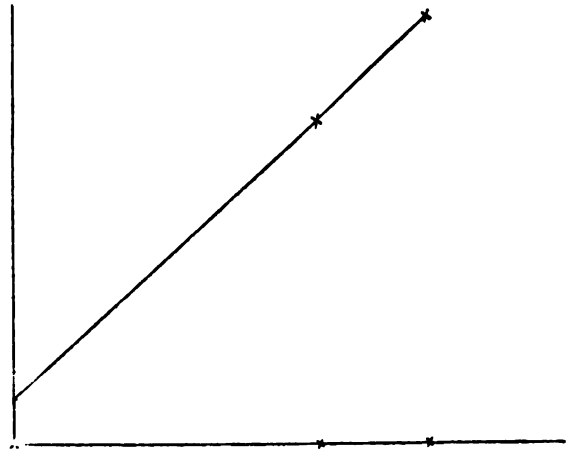
2. *Chloornitrobenzoëzuren.* Ook hier is de lijn practisch een rechte.



Temp. 25.°0 MG 201.5.

Hoeveelheid stof met 100 cM³ water geschud	Uitgepipetteerde vloeistof	cM³ loog van 0.0295 n.	Totaal oplosb. in gr. per 100 cM³ oploss.
150 mgr. α	37.611 gr.	3.0 cM³.	0.047
1 gr. β	18.378 gr.	29.20	0.967
100 mgr. α + 0.3020 β	29.650 gr.	15.70	0.315
100 mgr. α + 0.4120 β	23.240 gr.	16.35	0.418

Men bereikt bij deze titraties geene grootere soherpte dan op 2 druppels der hier gebezigde loog van ca 0.03 normaal. Aangezien dit met ca 0.7 mgr. chloor- en met 0.8 mgr. broomnitrobenzoëzuur



overeenkomt kan het laatste cijfer der getallen van de laatste kolom dus $\pm$ 1 fout zijn. Deze tabellen zijn door den Heer POLAK opgesteld.

De nitraties van *m*-chloor- en *m*-broombenzoëzuur werden op de gebruikelijke en l.c. beschreven wijze met reëel salpeterzuur bij 0° en bij —30° uitgevoerd. Ten einde uit te maken of alles in mononitrozuren was overgegaan, werd door titratie het moleculairgewicht der gevormde produkten bepaald. Hiertoe werd ca 0.1 gr. van het nitratiemengsel in water opgelost en met 0.1 N. loog getitreerd; wanneer phenolphtaleïne als indicator wordt gebruikt is deze titratie op 1 druppel scherp. 0.1 gr. zijn ca 0.5 millimol chloor- en ca 0.4 millimol broomnitrobenzoëzuur die dus 5 resp. 4 cM^3 $^1/_{10}$ N. loog ter neutralisatie gebruiken. 1 druppel hiervan (= 0.05 cM^3) komt dus met 1% van het moleculairgewicht van het gechloorde of met 0.8% van het gebroomde zuur overeen. Ligt derhalve het moleculairgewicht tusschen 201.5 $\pm$ 2 resp. 246 $\pm$ 2, dan is de stof als te bestaan uit het zuivere nitrozuur aan te merken. Wel is waar zou het mogelijk zijn, dat toevallig een mengsel van ongenitreerd zuur, mononitro- en dinitrozuur ontstaan was, dat schijnbaar het moleculairgewicht van zuiver mononitrozuur had; maar afgezien nog van de onwaarschijnlijkheid, dat dit steeds zoude zijn ontstaan, werd deze mogelijkheid ook nog uitgesloten doordien het nitratiemengsel van *m*-broombenzoëzuur op nieuw in reëel salpeterzuur bij 0° werd gebracht, waardoor het moleculairgewicht binnen de daar even aangegeven grenzen bleef. Mol.gew. eerst 245, na hernieuwde behandeling 247.

De heer De Leeuw verkreeg bij de analyse van de door hem zelf bereide nitratieprodukten de volgende uitkomsten:

I. Nitratie van *m*-chloorbenzoëzuur bij 0°; 5 gr. gebracht in 30 gr. reëel salpeterzuur.

Mol.gew. van het nitratieprodukt 203.2.

1. Afgewogen 381.9 gr. nitratieprodukt; geschud met ± 100 mgr. bijprodukt ($CO_2H,Cl,NO_2 = 1,3,2$) en 100 gr. water bij 25°.0.

Afgepipetteerd 36.256 gr. oplossing, die ter neutralisatie 15.10 cM³ kali van 0.0432 N. behoefden.

Hoofdprodukt 92.4°/₀; nevenprodukt 7.6°/₀.

2. Afgewogen 364.1 mgr. nitratieprodukt; geschud met ± 100 mgr. bijprodukt en 100 gr. water bij 25°.0. Afgepipetteerd 69.464. gr. oplossing, die ter neutralisatie 27.85 cM³ van bovenstaande loog vereischten.

Hoofdprodukt 92.8°/₀; nevenprodukt 7.2°/₀.

II. Nitratie van *m*-chloorbenzoëzuur bij —30°; 5 gr. gebracht in 30 gr. reëel salpeterzuur.

Moleculair gew. van het nitratieprodukt 200.4.

1. 351.7 gr. nitratieprodukt afgewogen; geschud met ± 100 mgr. bijprodukt en 100 gr. water bij 25°0. Afgepipetteerd 34.538 gr. oplossing, die ter neutralisatie vereischten 13.50 gr. van bovenstaande loog.

Hoofdprodukt 93.5°/₀; nevenprodukt 6.5°/₀.

2. Afgewogen 372.8 mgr.; verder als boven. Afgepipetteerd 35.448 gr. oplossing, die ter neutralisatie 14.51 gr. loog vereischten.

Hoofdprodukt 92.8°/₀; nevenprodukt 7.2°/₀.

III. Nitratie van *m*-broombenzoëzuur bij 0°; 5 gr, zuur in 30 gr. reëel salpeterzuur.

Mol.gew. van het nitratieprodukt 243.7.

Afgewogen 424.0 mgr. nitratieprodukt; geschud met 100 mgr. bijprodukt en 100 gr. water bij 25°.0. Afgepipetteerd 33.945 gr. oplossing, welke ter neutralisatie 12.19 cM³ loog vereischten.

Hoofdprodukt 88.3°/₀; nevenprodukt 11.7°/₀.

IV. Nitratie van *m*-broombenzoëzuur bij —30°.

Mol.gew. 243.4.

Afgewogen 374.4 mgr. nitratieprodukt; verder als boven. Afgepipetteerd 31.661 gr. vloeistof, die ter neutralisatie 9.91 M³ loog vereischten.

Hoofdprodukt 88.6°/₀; nevenprodukt 11.4°/₀.

De Heer Polak heeft deze onderzoekingen met groote zorg herhaald, waartoe hij materiaal bezigde dat door hemzelf werd bereid. Ten einde zeker te zijn, dat de nitratieprodukten geen salpeterzuur

meer vasthielden werden zij, nadat de diphenylamienproef negatief was geworden, als boven aangegeven geanalyseerd. De rest van het praeparaat werd dan opnieuw met koud water fijngewreven en uitgewasschen, uit het waschwater het in oplossing gegane organische zuur teruggewonnen en met het zoo behandelde praeparaat wederom de analyse uitgevoerd. Beide analyses zijn hieronder met I—II aangegeven.

Cl 0°. M.G. 202,9 (201,5).

I 0,3374 gr. nit. mengsel + 100 mgr. α in 100 cM³	94.333 gr. opl. Aan β 0.3104	16.39 cM³ loog (0.922) β 92.9%	Tot. opl. 0.328 α 8.0%
II 0,3315 gr. nitr. mengsel + 100 mgr. α in 100 cM³	42.516 gr. opl. Aan β 0.3053	7.28 cM³ (0.922) β 92.1%	Tot. opl. 0.3180 α = 7.9%

Cl—30° M.G. 203.3 (201.5).

I 0.3410 gr. nitr. mengs.	98.157 gr. opl. Aan β : 0.3181	17.43 cM³ (0.0922). β = 93.3 %	Tot. opl. 0.3300 α : 6.7 %
II 0.3275 gr. nitr. mengs.	66.284 gr. opl. Aan β 0.3068	11.40 cM³ (0.0922). β = 93.7 %	Tot. opl. 0.3195 α : 6.3 %

Br 0° M.G. 245.7 (246).

I 0.3320 gr. nitr. mengs.	55.477 gr. opl. Aan β 0.2891	7.32 cM³ (0.0922). β = 87.0 %	Tot. opl. 0.2993 α : 13.0 %
II 0.3292 gr. nitr. mengsel	67.915 gr. opl. Aan β 0.2868	8.96 cM³ (0.0922) β = 87.1%	Tot. opl. 0.2971 α = 12.9%

Br. —30°. M.G. 245.2 (246).

I 0.4585 gr. nitr. mengsel	89.965 gr. opl. Aan β j 0.4096	16.48 cM³ (0.0922) β : 89.3%	Tot. opl. 0.4155 α : 10.7%
II 0.4385 gr. nitr. mengsel	64.190 gr. opl. Aan β : 0.3192	11.20 cM³ (0.0922) β : 89.2 %	Tot. opl. 0.3957 α : 10.8%

Vatten wij thans alle verkregen cijfers samen in onderstaande tabellen.

I. Nitratie van *m*-chloorbenzoëzuur; % bijproduct in het nitratiemengsel.

	DE LEEUW		POLAK		HOLLEMAN, *R.* 20,206		
	%	mol. gew.	%	mol. gew.	%	mol. gew.	Mol. gew.
Temp. 0°.	7.6 7 2	203.2	8.0 7.9	202.9	8.7	202.5	berekend
Temp.—30°.	6 5 7 2	200.4	6.7 6 3	203.8	8.3	201.5	201 5

II. Nitratie van *m*-broombenzoëzuur.

Temp. 0°.	11.7	243.7	13.0 13.9	245.7	11.4	245	Mol. gew. berekend
Temp.—30°.	11.4	243.4	10.7 10.8	245.2	11.8	243.2	246

De door mij verkregen cijfers werden uit stolpuntsbepalingen afgeleid.

Wat de door titratie verkregen cijfers van de heeren DE LEEUW en POLAK betreft, moet worden opgemerkt, dat de kleursomslag met 1 druppel $^1/_{10}$ normaal loog werd bereikt, zoodat er enkel twijfel kan zijn omtrent één druppel meer of minder. Dit vertegenwoordigt

$^1/_{200}$ millimol of ca. 1 mgr. chloor- en ca. 1.2 mgr. broomnitrobenzoëzuur, d.i. ca. 0.3 % van het ter analyse genomen gewicht van de nitratiemengsels. Bedenkt men verder, dat bovenstaande cijfers zijn afgeleid uit de boven medegedeelde tabellen, wier cijfers fouten van dezelfde orde hebben, dan kan dus het verschil tusschen bovenstaande procentcijfers ca. 0.6 zijn zonder de fouten, der methode aanklevende, te overschrijden. Uit dit oogpunt beschouwd zijn de cijfers van den heer POLAK voortreffelijk te noemen.

Uit de tabel blijkt verder, dat wanneer de gevonden moleculairgewichten dichter bij de berekende liggen, het procentcijfer der nevenprodukten hooger is. Dit is gemakkelijk te verklaren. Immers, naarmate er betere overeenstemming bestaat tusschen gevonden en berekend moleculairgewicht, is het nitratieproduct als zuiverder aan te zien. Daar echter onzuiverheden bij het schudden met water in oplossing gaan en dan door titratie als hoofdproduct worden bepaald, worden de cijfers voor dit laatste te hoog, voor het nevenprodukt dus te laag.

Men zal om deze reden ten slotte de volgende procentcijfers te beschouwen hebben als het dichtste bij de ware voor de samenstelling van de nitratieprodnkten te liggen :

I. Nitratie van *m*-chloorbenzoëzuur			II. Nitratie van *m*-broombenzoëzuur		
	bijprod.	hoofdprod		bijprod.	hoofdprod.
Temp. 0°.	8	92	Temp. 0°.	13	87
Temp.—30°.	7	93	Temp.—30°.	11	89

De onzekerheid der cijfers uit de stolpuntsbepalingen is een weinig grooter door de omstandigheid, dat zich de massa bij het smelten weldra zwart kleurt, waardoor de stolpunten (die ook vrij hoog liggen) met mindere scherpte dan gewoonlijk het geval is, te bepalen waren.

Augustus 1908. *Amsterdam, org. chem. lab. der Univ.*

Geologie. — De Heer HOOGEWERFF biedt eene mededeeling aan van den Heer P. TESCH: „*Over het gedrag der fossiele kalkschalen in koolzuurhoudend water*",

(Mede aangeboden door den Heer G. A. F. MOLENGRAAFF).

Het is een bekend verschijnsel, dat alle kalkhoudende gronden boven het grondwaterniveau, voor zoover niet uit volkomen ondoordringbare klei bestaande, een langzaam uitloogingsproces ondergaan. De verklaring van deze ontkalking wordt gereedelijk gegeven door

de oplossende werking van het doorsijpelende regenwater, waardoor het kalkgehalte langzamerhand aan de hoogere deelen der afzetting wordt onttrokken en zich nu eens in de diepere lagen in concreties concentreert, zooals in het löss, in andere gevallen echter geheel weggevoerd wordt, zoodat een kalkhoudende keimergel op den duur in een weinig of niet kalkhoudende keileem kan overgaan. Het op de oppervlakte vallende water bevat reeds zuurstof en koolzuur, dat uit de atmosfeer werd opgenomen; het gedeelte, dat in den bodem wegzakt, neemt bovendien bij het passeeren der bovenkorst nog het koolzuur op, dat zich bij de humusvorming ontwikkelt en is dus in staat in de diepere lagen eene oxydeerende werking op de ijzerverbindingen en eene oplossende werking op de aanwezige koolzure kalk uit te oefenen.

Het zijn vooral de fossielvoerende glauconietzanden, die door dit proces eene intensieve verandering ondergaan. In de eerste plaats wordt het glauconiet ontleed en het aanwezige ijzer, dat grootendeels reeds als oxyd voorhanden is, scheidt zich als limoniet af en vormt het bindmiddel voor de zandkorrels. Het aanvankelijk grijsgroene zand gaat over in een geel tot bruin zand, dat soms zóó sterk is samengebakken, dat het den naam van limonietzandsteen kan dragen. Overal, waar glauconitische zanden boven het grondwaterniveau liggen en niet door waterafsluitende kleilagen beschermd worden, treedt dit verschijnsel op. Zoo zijn bijvoorbeeld in de Nederrijnsche Bocht de opperoligocene zeezanden dáár, waar ze niet door bodembewegingen in groote diepte zijn gezonken, geel tot bruin gekleurd door de ontleding en oxydatie der glauconietkorrels (horst van Myhl tusschen Hückelhoven en Birgelen aan den oostelijken oever der Roer, de zandgroeven van Gerresheim, Grafenberg en Rothenberg ten Oosten van Dusseldorp enz.). In België zijn de „sables et grès ferrugineux de Diest", de „Crag jaune d'Anvers" enz. slechts op die wijze veranderde glauconietzanden.

In de tweede plaats werkt het koolzuurhoudende water echter als oplosmiddel op de kalkschalen der fossielen, die òf geheel verdwijnen, òf als steenkernen en afdrukken achterblijven en moeilijker herkenbaar worden, zoodat het directe hulpmiddel voor de bepaling van den geologischen ouderdom dier afzettingen ontbreekt of tenminste onzeker wordt. De indeeling van het jong-tertiair heeft hierdoor met name in België langen tijd tot allerlei tegenstrijdige opvattingen aanleiding gegeven, daar de onvolledige en onduidelijke fauna de juiste parallelliseering met andere punten van voorkomen zeer bemoeilijkte. Eerst door de uitgebreide onderzoekingen van E. VAN DEN BROECK en anderen in het Antwerpsche plioceen, toen deze

lagen bij graafwerken op groote schaal werden blootgelegd, werd deze verweering als een algemeen secundair proces herkend, dat overal optreedt, waar de omstandigheden van ligging buiten het grondwater en doorlatende deklagen zulks mogelijk maken. De grens tusschen het verweerde glauconietzand (Crag jaune) en het onverweerde (Crag gris) mag allerminst als eene geologische grens beschouwd worden, doch geeft slechts den stand van het grondwater aan.

Ik heb de opnoeming dezer reeds lang bekende en goed geconstateerde feiten moeten laten voorafgaan, om op eene andere waarneming te kunnen komen, die bij het onderzoek der ontkalkte lagen gedaan werd en waarvan eene aannemelijke verklaring voor de hand lag. Men stelde namelijk vast, dat de weerstand, dien de verschillende kalkschalen aan de oplossende werking bieden, verschillend is, zoodat meer en minder resistente schalen te onderscheiden waren. Waar nu de nog herkenbare steenkernen en afdrukken tot de geslachten Terebratula, Ostrea, Pecten, enz. behoorden, waarvan door de onderzoekingen van G. Rose en Sorby bekend was, dat ze uit calciet zijn opgebouwd, terwijl van de gastropodenschalen bekend was, dat ze in 't algemeen uit aragoniet zijn samengesteld, lag de conclusie voor de hand, *dat calciet veel moeilijker in koolzuurhoudend water oplost dan aragoniet.* In het „Handbuch der Palaeontologie" van Karl A. von Zittel (Band II, pag. 12) wordt dit bijvoorbeeld op de volgende wijze uitgedrukt:

„Die Kalkspathschalen zeigen eine ziemlich beträchtliche, die Aragonitschalen eine sehr geringe Widerstandsfähigkeit gegen die auflösende Thätigkeit kohlensäurehaltiger Gewässer. In Ablagerungen, wo fast alle fossilen Muscheln oder Schneckengehäuse zerstört und nur durch Steinkerne angedeutet sind, findet man wohlerhaltene Schalen von Ostrea, Pecten, Pinna, Trichites, u. a."

Het is mij niet bekend, of dit feit ooit door directe proeven op de zuivere mineralen nader is bevestigd. Uit het ontbreken van elke mededeeling daaromtrent in verschillende mineralogische handboeken leid ik af, dat dit niet geschied is en dat het dus nuttig kan zijn dit verschillend gedrag der beide modificaties van koolzure kalk, dat alleen door redeneering indirect uit twee andere waarnemingen schijnt te zijn afgeleid, ook proefondervindelijk te onderzoeken, natuurlijk slechts voor zoover het verschil in oplosbaarheid beteekenis heeft voor de practische geologie. [1])

[1]) Eenigen tijd na afsluiting dezer mededeeling maakte ik kennis met eene verhandeling van H. W. Foote: Ueber die physicalisch-chemischen Beziehungen zwischen Aragonit und Calcit (Zeitschrift für physikalische Chemie, Band 33, pag. 740),

A. Oplosbaarheid van calciet en aragoniet in zuiver water.

Voor alle volgende oplosbaarheidsproeven (ook voor de onder *B* genoemde) gebruikte ik voor calciet splijtstukken van het IJslandsche dubbelspaat en voor aragoniet goed uitgegroeide kristallen van BILIN in Bohemen (combinatie $\infty P . \infty \breve{P} \infty . \breve{P} \infty$).

Van deze mineralen werd door fijnwrijven en zeven een grof poeder verkregen, waarvan alle korrels kleiner waren dan 2 m. M. doch grooter dan 1 m. M, om de omstandigheden, waaronder het oplosmiddel inwerkt, ook in dit opzicht zooveel mogelijk gelijk te maken.

Om nu de oplosbaarheid der beide mineralen in zuiver water te vergelijken, werd eene hoeveelheid van 1 à 2 gram van dit poeder gedurende ééne week met 200 c. M.³ versch gedistilleerd water in aanraking gelaten en daarna de hoeveelheid opnieuw nauwkeurig gewogen.

Elke bepaling werd aldus in drievoud gedaan.

Ik verkreeg tot resultaat, dat dezelfde hoeveelheid zuiver water in denzelfden tijd van het grove calcietpoeder oploste:

4,8 milligram
5,0 „
5,1 „

en van het grove aragonietpoeder:

2,8 milligram
3,0 „
3,2 „

Betreffende de onderlinge vergelijkbaarheid der aldus verkregen getallen is echter eene aanmerking te maken, waarop Prof. Dr. G. A. F. MOLENGRAAFF mij opmerkzaam maakte. De calcietkorrels zullen den vorm van den splijtingsrhomboëder hebben, ten gevolge van de

---

waarop Prof. Dr. S. HOOGEWERFF mijn aandacht vestigde. Uitgaande van de wet, dat van twee vormen diegene de bestendigste is, die de geringste oplosbaarheid in een of ander oplosmiddel toont, komt de schrijver langs verschillende wegen tot het resultaat, dat bij de gewone temperatuur- en drukverhoudingen calciet bestendiger is dan aragoniet. Reeds vroeger hadden proeven van KOHLRAUSCH en ROSE met behulp van de electrische geleidbaarheid aangetoond, dat bij de temperaturen tusschen 2° en 34° C. calciet iets minder oplosbaar is in water dan aragoniet. De schrijver komt tot hetzelfde resultaat bij de temperaturen 25°, 50° en 59° C. Met behulp van de electrische geleidbaarheid wordt door den schrijver vervolgens het verschil in oplosbaarheid in met koolzuur verzadigd water onderzocht bij temperaturen van 8°, 25°, 41° en 48°. Bij 49° is aragoniet nog steeds 11 % oplos baarder dan calciet, hoewel bij stijgende temperatuur het verschil kleiner wordt.

De in deze verhandeling langs andere wegen gevonden oplosbaarheidsverhouding komt bevredigend overeen met mijne door directe weging verkregen resultaten.

uitstekende splijtbaarheid en bovendien zullen in het inwendige dier korrels kleine barsten naar de splijtrichtingen optreden. Een en ander heeft tengevolge, dat het aantastbaar oppervlak, dat het calcietpoeder aan het oplosmiddel aanbiedt, veel grooter is dan bij het aragonietpoeder, waarbij veel minder volkomen splijtbaarheid aanwezig is.

Om deze reden deed ik een tweede reeks proeven met het fijnste poeder der beide mineralen, dat door een zijdezeef van 64 mazen per m.M.^{2} was gegaan. Weder werd eene hoeveelheid van 1 à 2 gram, gedurende ééne week met 200 c.M.^{3} zuiver water in aanraking gelaten en het gewichtsverlies vastgesteld. Het resultaat was, dat van het fijnste calcietpoeder was opgelost:

4,— milligram
en 4,1 „

en van het fijnste aragonietpoeder:

5,4 milligram
en 5,7 „

De hoeveelheden opgelost mineraal zijn zeer gering en de onnauwkeurigheden der weging hebben dientengevolge een grooten invloed.

Hoewel deze getallen dus geene absolute geldigheid kunnen hebben, zoo meen ik toch te kunnen besluiten, *dat van een belangrijk verschil in oplosbaarheid in zuiver water geen sprake is.* Practisch zijn zoowel calciet als aragoniet in zuiver water nagenoeg onoplosbaar. Het voor calciet gevonden getal stemt goed overeen met de in de literatuur voorkomende opgave, dat 10000 deelen zuiver water 0,2 à 0,25 deelen calciet oplossen.

B. Oplosbaarheid van calciet en aragoniet in koolzuurhoudend water.

De oplosbaarheid in koolzuurhoudend water in den vorm van bicarbonaat moet, behalve van den duur der inwerking, ook afhankelijk zijn van de sterkte van het oplosmiddel, dus van het koolzuurgehalte van het water. Ik bereidde het koolzuurhoudende water steeds onmiddellijk vóór toevoeging van het mineraalpoeder, door gedurende 20 minuten door 200 cM^3. gedistilleerd water een langzame stroom zuiver koolzuur te voeren en de glazen gedurende de inwerking gesloten te houden. Hierdoor kon bij alle proeven de sterkte van het oplosmiddel geacht worden gelijk te zijn geweest.

Ik verkreeg tot resultaat, dat 200 cM^3. koolzuurhoudend water na ééne week hadden opgelost:

van het grove calcietpoeder:	54,7 milligram
van het grove aragonietpoeder:	61,8 milligram

Dezelfde hoeveelheid van het oplosmiddel had na twee weken opgelost:

van het calcietpoeder: 76,5 milligram
van het aragonietpoeder: 86,2 milligram

en na vier weken:

van het calcietpoeder: 108,4 milligram
van het aragonietpoeder: 122,4 milligram

Om dezelfde reden als onder *A* genoemd is, werd wederom een tweede reeks proeven genomen met het fijnste poeder der mineralen. 200 cM³. koolzuurhoudend water hadden na ééne week opgelost:

van het fijnste calcietpoeder: 267,8 milligram
van het fijnste aragonietpoeder: 332,8 milligram

Uit de aldus verkregen getallen trek ik het besluit:

1°. *dat aragoniet inderdaad op den duur iets sneller door koolzuurhoudend water opgelost wordt, dan calciet*, zoodat het wel verklaarbaar is, hoe de groote calcietschalen nog gedeeltelijk aanwezig kunnen zijn, terwijl de kleine aragonietschalen reeds geheel verdwenen zijn. Tevens blijkt echter, dat het verschil in oplosbaarheid te gering is, om als practisch onderscheidingsmiddel dienst te kunnen doen.

2°. dat voor de verklaring van het verschillend gedrag der fossiele kalkschalen het geringe verschil in oplosbaarheid niet voldoende is, doch ook andere factoren: de lange duur van het uitloogingsproces, de voortdurende aanvoer van versch oplosmiddel, de absolute grootte der schelpen en de betrekkelijke grootte van het buitenoppervlak, mede in aanmerking moeten komen.

In de literatuur vindt men de opgave, dat 100 gram met koolzuur verzadigd water 0,1 à 0,12 gram calciet oplossen, hetgeen dus vrij goed overeenkomt met het hierboven genoemde getal. [1])

Bij het onderzoek van een aantal schelpen op hunne mineralogische samenstelling, deed zich de vraag voor, welk middel het meest geschikt is om calciet en aragoniet practisch te onderscheiden. Het kleine hardheidsverschil kan hiertoe niet dienen, daar eene bijmenging van kiezelzuur het verschil kan doen verdwijnen. Een calcietschaal kan bijvoorbeeld door bijgemengd kiezelzuur plaatselijk de hardheid van aragoniet nabijkomen en eene uitsluitend hierop berustende determinatie schijnt dus bedenkelijk. Evenmin is het

[1]) Volledigheidshalve moet hier nog opgemerkt worden, dat alle proeven geschiedden bij de gewone kamertemperatuur (15° à 20° C.) en dat de glazen bij alle proeven geregeld ééns per dag goed omgeschud werden om de inwerking van het oplosmiddel te bevorderen.

soortelijk gewicht te gebruiken, daar het beinvloed wordt door bijmenging van kiezelzuur, phosphorzure kalk, koolzure magnesia en organische stoffen. Zeer bruikbaar daarentegen is de reactie met verdunde kobaltnitraatoplossing van W. MEIGEN (zie Centralblatt für Mineralogie, Geologie und Palaeontologie, Jahrgang 1901, Seite 577). Met behulp van deze reactie onderzocht ik een aantal schelpen der volgende geslachten, waarbij in eenige twijfelachtige gevallen de optische eigenschappen te hulp werden genomen.

Uit *calciet* bestonden:

Ostrea (levend, plioceen en senoon)
Pecten (levend, plioceen, mioceen)
Pectunculus (mioceen)
Arca (mioceen)
Nucula (mioceen)
Leda (mioceen)
Venus (mioceen)
Cytherea (mioceen)
Isocardia (mioceen)
Littorina (levend)
Buccinum (levend)
Aporrhais (mioceen)
Ancillaria (mioceen)

Uit *aragoniet* bestonden:

Cardium (levend en plioceen)
Ensis (levend en plioceen)
Donax (levend en plioceen)
Tellina (levend en plioceen)
Astarte (plioceen)
Cardita (plioceen)
Cytherea (levend)
Venus (levend)
Unio (levend)
Mactra (levend en plioceen)
Mya (levend)
Corbula (levend en plioceen)
Pholas (levend)
Scalaria (levend)
Natica (levend)
Cypraea (levend)
Turritella (mioceen)

Cancellaria (mioceen)
Cassidaria (mioceen)
Cerithium (levend)
Murex (levend)
Conus (levend en mioceen)
Trochus (levend)
Turbo (levend)
Bulla (levend)
Strombus (levend)
Ficula (levend)
Terebra (levend, mioceen)
Niso (mioceen)
Dentalium (plioceen, mioceen en oligoceen)
Ringicula (mioceen)

Bij het doorloopen dezer lijst blijkt, dat van de onderzochte tweekleppige schelpen een groot deel uit aragoniet bestond, doch dat vooral bij de fossiele exemplaren ook vrij veel calcietschalen voorkwamen. Een exemplaar van de miocene Cytherea incrassata bestond ontwijfelbaar uit calciet, terwijl een exemplaar van de levende Cytherea meretrix even zeker uit aragoniet bestond. Hetzelfde was het geval met de miocene Venus multilamellosa en de levende Venus albina. Van de gastropodenschalen bestond de overgroote meerderheid uit aragoniet, doch een viertal schelpen maakten hierop eene uitzondering. Voor de fossiele exemplaren van Aporrhais en Ancillaria is het misschien geoorloofd aan eene latere omzetting van aragoniet in calciet te denken, evenals bij de bovengenoemde Venus- en Cythereasoorten, doch bij de zeer frissche exemplaren van Buccinum undatum en Littorina littorea schijnt deze verklaring uitgesloten. Mogelijk is de vorm, waarin de koolzure kalk afgescheiden wordt, afhankelijk van uitwendige invloeden, zoo dat een soort, die in den regel eene aragonietschaal vormt, onder abnormale omstandigheden (temperatuur, samenstelling van het water) ook calciet kan afscheiden. Dit komt mij temeer waarschijnlijk voor, omdat we kunstmatig ook calciet of aragoniet kunnen neerslaan, naarmate de omstandigheden van temperatuur of samenstelling der vloeistof anders zijn.

De samenstelling der schaal is dan geen specifieke eigenschap meer, doch tot op zekere hoogte afhankelijk van omstandigheden.

Plantkunde. — De Heer WENT biedt eene mededeeling aan van den Heer J. M. GEERTS: „*Bijdrage tot de kennis van de Cytologische ontwikkeling van Oenothera Lamarckiana*".

(Mede aangeboden door den Heer HUGO DE VRIES).

Onder de talrijke planten, waarvan de cytologische ontwikkeling nog niet is nagegaan, werd juist *Oenothera Lamarckiana* uitgekozen, omdat een cytologisch onderzoek van deze plant waarschijnlijk ook voor de beantwoording van andere, meer algemeene vragen van belang kan zijn.

Zoo zal misschien later door de kennis der cytologische verschijnselen van *Oen. Lam.* en hare mutanten een verklaring voor het muteeren te vinden zijn.

Terwijl de mutatietheorie in de meeste landen ingang heeft gevonden, is dit tot nog toe niet recht het geval in Engeland. BATESON en zijne leerlingen meenen namelijk, dat *Oen. Lam.* op te vatten is als een bastaard en willen het ontstaan van de nieuwe soorten terugvoeren tot bastaardsplitsing. Het hoofdargument hiervoor is wel, dat *Oen. Lam.*, als vele bastaarden, een groote mate van steriliteit vertoont in zaadknoppen en stuifmeelkorrels.

Bij dit onderzoek stelde ik mij dus voor, om na te gaan, wanneer en hoe die steriliteit ontstaat, om daardoor de waarde van BATESON's argument te kunnen beoordeelen.

Het is zeer goed denkbaar, dat men eenmaal niet alleen een volledig inzicht zal hebben in de omstandigheden, waardoor mutaties ontstaan, maar ook, dat men die omstandigheden weet te beheerschen. Daartoe zijn vooral proeven met *Oen. Lam.* gewenscht, waarbij men tracht of ook op het ontstaan van mutanten invloed is uit te oefenen door de bloempjes bijv. aan verschillende temperaturen te onderwerpen, aan verschillende vochtigheidstoestanden, injecties enz.

Om bij dergelijke proeven betrouwbare resultaten te verkrijgen, moet men nauwkeurig weten, niet alleen op welke bloemen men dien invloed heeft uitgeoefend, maar ook in welken ontwikkelingstoestand zich de bloemen op het oogenblik van inwerking bevonden; vóór de synapsis, vóór of na de reductiedeeling enz.; dan toch alleen is te controleeren of een verandering in het aantal mutanten werkelijk een gevolg van de inwerking is, of door andere, onbekende oorzaken ontstaat.

Om dit onderzoek dus tevens aan zulke experimenteele onderzoekingen dienstbaar te maken, heb ik ook de bloemontwikkeling nagegaan, om de belangrijkste cytologische toestanden op uitwendig zichtbare stadiën te kunnen betrekken.

Verder doen zich bij de mutanten en bastaarden van *Oen. Lam.* tal van vragen voor, waarvan een beantwoording tevens voor de cytologie zelf van belang kan zijn. Vooral bastaarden met *O. gigas*, welke mutant waarschijnlijk tweemaal zooveel chromosomen heeft als *Oen. Lam.* zelf, zullen materiaal kunnen leveren voor interressante cytologische onderzoekingen. Daartoe is echter in de eerste plaats kennis van de cytologische ontwikkeling van de muteerende plant zelf gewenscht.

De voornaamste resultaten, die bij dit onderzoek werden verkregen, zullen hier nu in het kort worden vermeld.

De bloemontwikkeling van *Oenothera Lamarckiana* werd in 1895 onderzocht door POHL [1]); deze kwam tot geheel andere resultaten dan voor andere *Onagraceae* o.a. door BARCIANU [2]) en PAYER [3]) waren gevonden, daar volgens POHL de ontwikkeling niet, volgens de andere onderzoekers wel acropetaal is. Het bleek echter, dat *Oen. Lam.* ook, evenals de andere *Onagraceae* een acropetale bloemontwikkeling heeft. Verder zijn de voornaamste punten, die bij de bloemontwikkeling werden gevonden:

1. De kroonmeeldraad ontstaat uit den heuvel, die de kroon vormt. aan de binnenzijde.

2. Het vruchtbeginsel is de holgeworden bloemas. Alleen de stempels ontwikkelen zich als 4 afzonderlijke heuvels, alterneerend met de kelkmeeldraden.

3. Het vruchtbeginsel wordt 4 hokkig door het ingroeien en in het midden versmelten van 4 parietale lijsten, staande voor de kelkmeeldraden.

4. De as groeit niet door; er is geen columella.

5. De placentae differentieeren zich uit de randen der tusschenschotten.

6. Kroonmeeldraad en kroonblad hebben geen gemeenschappelijke vaatbundel.

7. De zaadknop ontstaat, met uitzondering van de vaatbundel in de raphe, uit peribleem en dermatogeen.

De cytologische ontwikkeling werd zoowel in de zaadknoppen als in de meeldraden bestudeerd. Hier volgt een overzicht van de voornaamste verschijnselen, die zich voordeden.

---

[1]) Ueber Variationsweite der *Oenothera Lamarckiana* von J. POHL Oosterr. botan. Zeitschrift Jahrgang 1895 Nr. 5 u 6.

[2]) Untersuchungen ueber die Bluethenentwicklung der *Onagraceae*, Inaug. diss. von D. P. BARCIANU, Naumburg 1874.

[3]) J. B. PAYER, Organogénie de la Fleur.

Wanneer de moedercellen in synapsis gaan, trekt het netwerk van de kern zich samen en ontstaat een dunne draad, waarop chromatindeeltjes te zien zijn. Deze draad trekt zich samen tot een kluwen en wordt tevens steeds korter en dus dikker, wat duidelijk zichtbaar is, als het kluwen zich weer ontwindt. Deze dikke draad deelt zich nu, in de dwarsrichting, in 14 chromosomen, de kernwand verdwijnt en de chromosomen leggen zich loodrecht op de lengteas van de spoel der heterotype deeling. *Bij de synapsis van Oen. Lam. is dus geen dubbele draad te zien; uit de draad ontstaat het vegetatieve aantal chromosomen, en even voor de deeling leggen deze chromosomen zich twee aan twee.*

Zoowel in de zaadknoppen, als in de meeldraden vindt de synapsis op deze wijze plaats. Bij de eerste deeling der moedercellen nu, gaan geheele chromosomen uiteen, die reeds gedurende deze deeling een lengtesplijting vertoonen voor de 2de deeling. Na deze heterotype deeling gaan de beide kernen bijna niet in rust, de op de lengte gespleten chromosomen blijven steeds zichtbaar, vooral in embryozakmoedercellen. De wand tusschen de beide kernen wordt dikwijls niet geheel gevormd. Bij de 2de deeling gaan de helften der chromosomen uiteen, zoodat er dan 4 kernen ontstaan; over het algemeen zijn hierin weinig kleurende deelen zichtbaar. (In de Mei-vergadering van de Nederlandsche Botanische Vereeniging, waar ik dit onderzoek grootendeels besprak, deelde ik ook reeds mede, dat bij *Oen. Lam.* de synapsis op deze wijze plaats vindt en daardoor verschilt met hetgeen voor andere planten opgegeven wordt. In de Juli aflevering van de Botanical Gazette is, zooals ik in 't begin van September zag, een verhandeling van GATES verschenen over de synapsis en reductiedeeling in de stuifmeelmoedercellen van *Oenothera rubrinervis.* Deze onderzoeker geeft voor de synapsis van deze plant vrijwel dezelfde opeenvolging van phasen.) Terwijl bij de meeste planten de onderste tetradecel uitgroeit tot definitieve embryozak, is dit niet het geval bij *Oen. Lam. Hier wordt de bovenste cel tot embryozak,* terwijl de andere 3 degenereeren; het chromatin dezer 3 cellen gaat uit de kern, waarvan de wand verdwijnt en kleurt nu het geheele protoplasma donker, zoodat deze 3 tetradecellen nog lang als een lange donkere streep onder de embryozak zichtbaar zijn. In de uitgegroeide tetradecel vindt nu bij bijna alle planten achtereenvolgens 3 × deeling plaats, zoodat er 8 kernen ontstaan. Bij *Oenothera* vond ik steeds slechts 4 kernen, die boven in de embryozak komen te liggen. Een beperkt aantal kernen in de embryozak is ook bekend van *Helosis guyanensis,* door de onderzoekingen van CHODAT en

BERNARD [1]) en van *Mourera*, door het onderzoek van WENT [2]). Bij deze planten, gaat de onderste der 2 kernen, die bij de 1e deeling ontstaan, waarschijnlijk te niet en ontstaan uit de bovenste kern de 3 kernen van het eiapparaat en de poolkern, zoodat er toch 3 × deeling plaats vindt.

Bij *Oen. Lam.* vond ik nooit onder in de embryozak een kern of overblijfselen hiervan, terwijl de 4 kernen steeds boven in liggen. Enkele keeren gelukte het de deelingen zelf waar te nemen. Zoo vond ik een embryozak, waarin een kern, met de spoel in de lengterichting van den embryozak, zich in tweeën deelde. Verder vond ik embryozakken met 2 kernen, die soms onder elkaar, soms naast elkaar lagen. Waarschijnlijk verandert de onderste kern dus van plaats, komt zij meer boven aan in den embryozak te liggen. De deelingen van deze 2 kernen werden ook gevonden en wel boven in den embryozak 2 spoelen loodrecht op elkaar. Op dezelfde wijze liggen bij de meeste planten de spoelen boven en onder in den embryozak, bij de 3de deeling, twee aan twee loodrecht op elkaar. De deeling dezer 2 kernen bij *Oen. Lam.* is dus zeer zeker de laatste deeling in den embryozak, waardoor de beide synergiden uit de eene kern, eicel en bovenste poolkern uit de andere kern ontstaan. In dezen embryozak, met die twee spoelen loodrecht op elkaar, was verder aan het chalazale einde niets van kernen of overblijfselen daarvan te bespeuren. We mogen dus aannemen, dat bij *Oen. Lam.* de eerste deeling in den embryozak is uitgevallen, zoodat er in het geheel geen antipoden en onderste poolkern ontstaan, zelfs geen antipodiaalinitiaalcel, die onmiddellijk na zijn ontstaan weer te niet gaat, zooals bij *Helosis* en *Mourera*.

In den embryozak van *Cypripedium* is het aantal deelingen nog meer gereduceerd; hier vindt volgens Miss L. PACE [3]), in de embryozakmoedercel slechts in de onderste cel een homoiotype deeling plaats. De bovenste cel degenereert. Op de homoiotype deeling volgt geen celdeeling. De 2 kernen in de onderste cel rangschikken zich nu polair; deze cel groeit in de lengte en de kernen deelen zich nu nog eens, zoodat er 4 kernen ontstaan. Verder vinden in de embryozak geen deelingen meer plaats; de 4 kernen worden tot eicel, synergiden en bovenste poolkern.

---

[1]) R. CHODAT et C. BERNARD. Sur le sac embryonnaire de *l'Helosis guyanensis*. Journal de Botanique T. XIV, 1900 p. 72.

[2]) F. A. F. C. WENT. „De ontwikkeling van zaadknop, embryozak en eicel bij de *Podostemaceae*. *Kon. Ak. v. Wet.* te Amsterdam. Verslag v. d. Gewone Vergadering der Wis- en Natuurk. Afd." 7 Mei 1908.

[3]) LULA PACE. Fertilization in Cypripedium. Botanical Gazette. XLIV. 1907 p. 353.

Wanneer bij *Oen. Lam.* de 4 kernen zijn ontstaan, omgeven de synergiden, die het dichtst bij de mikropyle liggen, zich evenals de eicel met eigen plasma; de bovenste poolkern blijft vrij in 't plasma van den embryozak liggen.

De 4 cellen, die in de stuifmeelmoedercellen door de reduktiedeeling zijn ontstaan, groeien regelmatig uit tot de stuifmeelkorrels; de wijze van ontstaan en de bouw der wanden komt bij *Oen. Lam.* waarschijnlijk overeen met hetgeen R. Beer [1]) voor *Oenothera longiflora*, beschrijft.

Wanneer de stuifmeelkorrels bijna volwassen zijn, ontstaan door deeling de generatieve en vegetatieve kern; de generatieve kern, die het kleinst is, legt zich dan, omgeven door een hoeveelheid plasma tegen den wand; de vegetatieve kern blijft in het midden van de korrel liggen. De deeling van de generatieve kern in tweeën vindt waarschijnlijk in de stuifmeelbuis plaats.

De stuifmeelbuis dringt door de micropyle en door het nucellusweefsel. Het schijnt, dat het nucellusweefsel in het midden reeds tevoren op die plaats gaat desorganiseeren. Daar tijdens het indringen der stuifmeelbuizen de synergiden reeds geheel gedesorganiseerd zijn, en zich zeer donker kleuren en ook in den nucellus op de plaats, waar de stuifmeelbuis ingedrongen is, overal donker kleurende resten te zien zijn, is het mij niet gelukt, de deeling van de generatieve kern te zien. Wel werd de bevruchting zelf duidelijk waargenomen. Er vindt een dubbele bevruchting plaats; de eene kern dringt in de eicel en legt zich tegen de kern; de generatieve kern is dan rond, maar kleiner dan de eikern, ofschoon zij voor de versmelting waarschijnlijk wel iets grooter wordt. De andere generatieve kern, die denzelfden vorm vertoont, legt zich tegen de poolkern. De versmelting van poolkern en generatieve kern vindt sneller plaats dan van generatieve kern en eikern. De bevruchte poolkern gaat zich nu spoedig deelen, zoodat er dikwijls reeds een aantal endospermkernen zijn, vóór de eikern geheel met de generatieve kern versmolten is, en de eicel een eigen wand heeft. De bevruchte eicel groeit uit tot een korte embryodrager en een kiemkogel met duidelijke octanten. Langs den geheelen wand van den embryozak liggen dan reeds endospermkernen. Later verdwijnt dit endosperm echter weer.

Bij Oenothena Lamarckiana ontstaat dus uit één bevruchte poolkern endosperm.

In volwassen meeldraden vindt men tusschen de korrels zeer vele steriele korrels; in jonge vruchten tusschen de zich ontwikkelende

[1]) On the development of the pollen grain and anther of some Onagraceae, Rudolf Beer. Beih. zum Bot. Centr. blatt 1905, 19 I.

zaden een vrij groot aantal niet uitgroeiende zaadknoppen. In beide gevallen ontstaat deze steriliteit na de reductiedeeling. Terwijl in alle embryozakmoedercellen de reductiedeeling normaal plaats vindt, zijn er toch vele zaadknoppen, waarin de bovenste tetradecel ook degenereert, wat vrij wel met dezelfde verschijnselen gepaard gaat, als zich als regel voordoen bij de 3 onderste tetradecellen. Ook in de stuifmeelmoedercellen vinden de deelingen regelmatig plaats, maar, nadat de 4 tetradecellen zijn ontstaan, groeien in den regel slechts 2 cellen goed, de andere 2 slechts gedeeltelijk uit, zoodat daaruit korrels ontstaan, waarvan de inhoud langzamerhand verdwijnt, terwijl de wand vrijwel normaal gevormd is.

Daar de deelingen normaal zijn, behoeft dit optreden van steriliteit volstrekt niet aan een bastaardnatuur te liggen. Uit de literatuur over steriliteit blijkt, dat, behalve bij bastaarden, steriliteit bij tal van planten voorkomt, terwijl bij de meeste bastaarden, die cytologisch onderzocht zijn, steriliteit ook reeds bij een of beide ouders aanwezig was. En daar steriliteit onder de *Onagraceae*, zooals bij onderzoek van een 100-tal Onagraceae bleek, vrij algemeen verbreid is, is men m. i. niet gerechtigd uit het voorkomen van steriliteit bij een of andere plant tot een bastaardnatuur van die plant te besluiten. Zal bovengenoemd bezwaar van Bateson tegen de mutatietheorie dus waarde hebben, dan dient hij de vermoedelijke ouders van den „bastaard" *Oen. Lam.* aan te geven.

In volwassen vruchtbeginsels zijn de zaadknoppen, die zich niet zullen ontwikkelen, te herkennen, doordat de nucellus meer doorschijnend is en er zich geen embryozak in bevindt. In dergelijke zaadknoppen werd nooit een indringende stuifmeelbuis waargenomen, terwijl deze in de normale zaadknoppen van dezelfde coupes herhaaldelijk gevonden werden. *Het schijnt dus, dat de embryozak een aantrekkende werking op de stuifmeelbuizen uitoefent.*

Door combineering van de resultaten, verkregen door het onderzoek, zoowel van de ontogenetische, als van de cytologische ontwikkeling, blijkt dat *Oen. Lam.* zich uitstekend zal leenen voor de proeven, die in de inleiding werden genoemd, daar de cytologische ontwikkeling van het stuifmeel en die van de zaadknoppen scherp van elkaar gescheiden zijn. In bloempjes van 30 mm. is de ontwikkeling van het stuifmeel reeds bijna afgeloopen, terwijl in deze bloempjes de ontwikkeling der moedercellen in de zaadknoppen begint. Men kan dus afzonderlijk invloed uitoefenen op het stuifmeel en op de zaadknoppen, en de bloempjes, die men daarvoor moet uitkiezen zijn bij eenige oefening gemakkelijk te herkennen. Wil men inwerken op het stuifmeel vóór de synapsis, dan kieze men bloempjes van 10 à

11 mm. lengte, waarin de meeldraden 3 mm. lang zijn, daar in bloempjes van 12 à 13 mm., waarin zoowel de helmknop als de geheele meeldraad 4 mm. lang zijn, de synapsis van het stuifmeel plaats vindt. In bloempjes van omstreeks $3^1/_2$ cm. vindt de synapsis van de embryozak-moedercel plaats. Om hierop in te werken, kieze men dus bloempjes van 3 à $3^1/_2$ cm., waarvan vruchtbeginsel en kelkbuis ongeveer dezelfde lengte, n.l. $4^1/_2$ mm., hebben.

Uitvoeriger beschrijving van de bij dit onderzoek gevonden feiten, hoop ik binnenkort, met platen, te kunnen publiceeren.

Geophysica. — De Heer VAN DER STOK biedt eene mededeeling aan van den Heer W. VAN BEMMELEN over: „*Aardstroom-registratie te Batavia*". (3de mededeeling).

(Deze mededeeling zal in het versla der volgende vergadering verschijnen).

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan: „*Bijdrage tot de theorie der binaire mengsels.*" VIII.

DE ONTMOETING VAN DE KROMME $\frac{d^2p}{dv\,dx} = 0$ MET $\frac{dp}{dv} = 0$.

De loop der kromme $\frac{d^2p}{dv\,dx} = 0$ wordt met behulp der benaderde toestandsvergelijking gegeven door de vergelijking:

$$\frac{MRT\frac{db}{dx}}{(v-b)^2} = \frac{\frac{da}{dx}}{v^2}.$$

Zij heeft, gelijk reeds meermalen is opgemerkt een gang, welke analoog is aan dien van de kromme $\frac{dp}{dx} = 0$. Bij gegeven waarde van T heeft zij een asymptoot voor die waarde van x, waarvoor in den verdunden gastoestand, de afwijking van de wet van BOYLE maximaal is, n.l. waarvoor $MRT\frac{db}{dx} = \frac{da}{dx}$. Zij heeft minimumvolume op de lijn $v - b = 3\,\frac{db}{dx}\,\frac{\frac{da}{dx}}{\frac{d^2a}{dx^2}}$ terwijl de lijn $\frac{dp}{dx} = 0$ zulk een minimum-

volume bezit op de lijn: $v - b = 2 \frac{db}{dx} \frac{\frac{da}{dx}}{\frac{d^2a}{dx^2}}$.

De snijpunten van $\frac{d^2p}{dv\,dx} = 0$ en $\frac{dp}{dx} = 0$ geven de punten aan waarin $\frac{dp}{dv} = 0$ een raaklijn heeft evenwijdig aan de X-as, gelijk volgt uit $\frac{d^2p}{dv^2}\frac{dv}{dx} + \frac{d^2p}{dx\,dv} = 0$. Voor zulk een snijpunt is tegelijkertijd $\frac{MRT}{(v-b)^2} = \frac{2a}{v^3}$ en $\frac{MRT\frac{db}{dx}}{(v-b)^2} = \frac{\frac{da}{dx}}{v^3}$; en dus $\frac{\frac{db}{dx}}{v-b} = \frac{\frac{da}{dx}}{2a}$ welke laatste vergelijking de meetkundige plaats dezer snijpunten voorstelt. Deze meetkundige plaats „$v - b = 2 \frac{db}{dx} \frac{a}{\frac{da}{dx}}$" differentieerende vindt men:

$\frac{dv}{dx} = \frac{db}{dx} \frac{3\left(\frac{da}{dx}\right)^2 - 2a\frac{d^2a}{dx^2}}{\left(\frac{da}{dx}\right)^2}$. Denkt men in het diagram aanwezig alle waarden van x, bijv. opklimmende van de waarde van x waarvoor $\frac{da}{dx} = 0$ is, dan is deze meetkundige plaats een kromme met een asymptoot bij de waarde van x, waarvoor $\frac{da}{dx} = 0$ is, en heeft zij een minimumvolume bij de waarde van x, waarvoor $\left(\frac{da}{dx}\right)^2 = \frac{2}{3}\,a\frac{d^2a}{dx^2}$ is. Voor grootere waarden van x is het volume toenemende.

Stelt men in $\frac{\frac{db}{dx}}{v-b} = \frac{\frac{da}{dx}}{2a}$ voor v de waarde $3b$, dan vindt men $\frac{1}{b}\frac{db}{dx} = \frac{1}{a}\frac{da}{dx}$. Maar dan is in de vergelijking $\frac{d^2p}{dv^2}\frac{dv}{dx} + \frac{d^2p}{dv\,dx} = 0$ niet alleen $\frac{d^2p}{dv\,dx} = 0$ maar ook $\frac{d^2p}{dv^2} = 0$. De waarde van $\frac{dv}{dx}$ is dan onbepaald, en de kromme $\frac{dp}{dv}$ heeft bij de temperatuur, waarvoor dit plaats vindt, en welke de minimumtemperatuur is die door $\frac{8}{27}\frac{a_x}{b_x}$

wordt voorgesteld, twee takken welke zich in $v = 3b$ en x, behoorende bij $\frac{1}{b}\frac{db}{dx} = \frac{1}{a}\frac{da}{dx}$, snijden. Voor grootere waarden van v bijv. $v = 4b$ is het snijpunt der beide krommen op den damptak van $\frac{dp}{dv} = 0$ gelegen en omgekeerd. Schrijft men $v = nb$, dan volgt uit $\frac{\frac{db}{dx}}{v-b} = \frac{\frac{da}{dx}}{2a}$ de vorm $\frac{2}{n-1} = \frac{\frac{1}{a}\frac{da}{dx}}{\frac{1}{b}\frac{db}{dx}}$. Voor die waarden van x, waarbij de teller kleiner is dan de noemer is $n > 3$, en omgekeerd. Eerst als in het diagram ook $\frac{da}{dx} = 0$ mocht voorkomen is n en dus ook v oneindig groot.

Zoekt men het punt waarin beide krommen elkander aanraken dan zal men hetzelfde punt moeten vinden waarin $\frac{d^2p}{dv\,dx}$ het minimumvolume heeft; want daar in elk snijpunt de kromme $\frac{dp}{dv} = 0$ een raaklijn bezit evenwijdig aan de X-as, zal bij raking ook de kromme $\frac{d^2p}{dv\,dx} = 0$ zulk een raaklijn moeten hebben.

De voorwaarde dat voor een punt der laatstgenoemde kromme $\frac{dv}{dx} = 0$ is, is $\frac{d^3p}{dv\,dx^2} = 0$. Wij hebben dus:

$$\frac{dp}{dv} = 0 \quad \text{of} \quad \frac{MRT}{(v-b)^2} = \frac{2a}{v^3}$$

$$\frac{d^2p}{dv\,dx} = 0 \quad \text{of} \quad \frac{MRT\frac{db}{dx}}{(v-b)^3} = \frac{\frac{da}{dx}}{v^3}$$

en

$$\frac{d^3p}{dv\,dx^2} = 0 \quad \text{of} \quad 3\frac{MRT\left(\frac{db}{dx}\right)^2}{(v-b)^4} = \frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{v^3}$$

Uit het vergelijken van het kwadraat der tweede dezer vergelijkingen met het product der beide overigen vindt men de voorwaarde terug

$$\left(\frac{da}{dx}\right)^2 = \frac{2}{3}\,a\,\frac{d^2a}{dx^2}.$$

Stelt men $a = A + 2Bx + Cx^2$, waarin $A = a_1$, $B = a_{12} - a_1$ en $C = a_1 + a_2 - 2a_{12}$ is, dan voert deze vergelijking tot:

$$(B + Cx)^2 + \frac{B^2 - AC}{2} = 0$$

of

$$B + Cx = + \sqrt{\frac{a_1 a_2 - a_{12}^2}{2}}.$$

Het positieve teeken voor het wortelteeken wordt geëischt door de voorwaarde, dat $\frac{da}{dx}$ positief moet zijn. Zal x bestaanbaar zijn, dan moet $a_1 a_2 > a_{12}^2$ zijn en de voorwaarde dat x ligt tusschen 0 en 1, wordt door de constructie van fig. 33 aangegeven. Zij OO' de x-as,

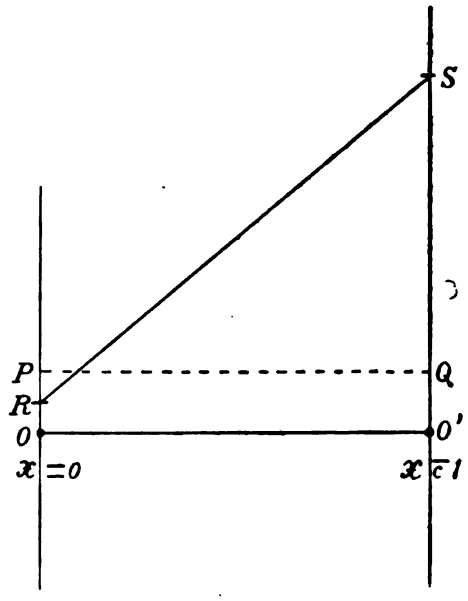


Fig. 33.

en PQ getrokken ter hoogte van $\sqrt{\frac{a_1 a_2 - a_{12}^2}{2}}$. Nemen wij dan $OR = a_{12} - a_1$ en $O'S = a_2 - a_{12}$, dan zal het snijpunt van RS en PQ moeten liggen tusschen $x = 0$ en $x = 1$, opdat de genoemde voorwaarde $\left(\frac{da}{dx}\right)^2 = \frac{2}{3} a \frac{d^2 a}{dx^2}$ in het diagram vervuld kan zijn.

Volgens de uitkomst, verkregen in Bijdrage VII omtrent het punt, waarin $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ de lijn $\left(\frac{dp}{dv}\right)_x = 0$ raakt, zal de waarde van x,

waarin $\left(\frac{da}{dx}\right)^2 = \frac{2}{3} a \frac{d^2a}{dx^2}$ is, niet zeer ver verwijderd moeten liggen van dat raakpunt.

Maar of het misschien zelfs niet rechts zou kunnen liggen van die waarde van x, waarbij $\frac{a_x}{b_x}$ een minimumwaarde heeft, kan slechts door rechtstreeksch onderzoek blijken. Tegelijkertijd kan dan blijken of in geval van raking der beide krommen $\frac{dp}{dv} = 0$ en $\frac{d^2p}{dv\,dx} = 0$ de temperatuur een maximumwaarde heeft of minimumwaarde.

Elimineeren wij uit de vergelijkingen der beide krommen de waarde van v. Wij kunnen dit o. a. doen door de waarde van v uit $\frac{2\frac{db}{dx}}{v-b} = \frac{1}{a}\frac{da}{dx}$ te substitueeren in $\frac{d^2p}{dv\,dx} = 0$. Schrijven wij:

$$\frac{v-b}{b} = 2\,\frac{\frac{1}{b}\frac{db}{dx}}{\frac{1}{a}\frac{da}{dx}}\,1 = 2z$$

of

$$\frac{v}{b} = 1 + 2z$$

en

$$\frac{b}{v}\,\frac{1}{1+2z}$$

en

$$1 - \frac{b}{v} = \frac{2z}{1+2z}.$$

Uit $\frac{d^2p}{dv\,dx} = 0$ volgt

$$1 - \frac{b}{v} = \frac{\sqrt[3]{MRT\frac{db}{dx}}}{\frac{da}{dx}}.$$

Bijgevolg is:

$$\frac{\sqrt[3]{MRT\frac{db}{dx}}}{\frac{da}{dx}} = \frac{2z}{1+2z}$$

Logarithmisch differentieerende verkrijgen wij:

$$\frac{1}{3T}\frac{dT}{dx} - \frac{1}{3}\frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{\frac{da}{dx}} = \frac{1}{z}\frac{da}{dx}\frac{1}{1+2z}$$

Nu is

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{a}\frac{da}{dx} - \frac{1}{b}\frac{db}{dx} - \frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{\frac{da}{dx}}$$

of

$$\frac{1+2z}{3T}\frac{dT}{dx} - \frac{1}{3}\frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{\frac{da}{dx}}(1+2z) = \frac{1}{a}\frac{da}{dx} - \frac{1}{b}\frac{db}{dx} - \frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{\frac{da}{dx}}$$

of

$$\frac{1+2z}{3T}\frac{dT}{dx} + \frac{2}{3}\frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{\frac{da}{dx}}(1-z) = \frac{1}{a}\frac{da}{dx} - \frac{1}{b}\frac{db}{dx}$$

of

$$\frac{1+2z}{3T}\frac{dT}{dx} = \left[\frac{1}{a}\frac{da}{dx} - \frac{1}{b}\frac{db}{dx}\right]\left[1 - \frac{2}{3}\frac{a\frac{d^2a}{dx^2}}{\left(\frac{da}{dx}\right)^2}\right]$$

De waarden van $\frac{dT}{dx}$ is dus gelijk 0, ten eerste als $\frac{1}{a}\frac{da}{dx} = \frac{1}{b}\frac{db}{dx}$ en ten tweede als $\left(\frac{da}{dx}\right)^2 = \frac{2}{3}a\frac{d^2a}{dx^2}$. Beginnen wij, om T als functie van x te teekenen, bij kleine waarden van x, en laten wij misschien ook negatieve waarden van x in onze beschouwing toe, dan zijn bijv. bij $\frac{da}{dx} = 0$ beide factoren in de uitdrukking van $\frac{dT}{dx}$ negatief en is dus $\frac{dT}{dx}$ positief. Neemt x toe dan wordt een waarde van x bereikt bij welke één dezer factoren gelijk 0 wordt. Bij nog hoogere waarde van x wordt de tweede factor gelijk 0. Tusschen deze twee bijzondere waarden van x is $\frac{dT}{dx}$ negatief — en voor waarden van x die grooter zijn dan die, voor welke ook de tweede factor nul is, is

$\frac{dT}{dx}$ weder positief. De waarde van T vertoont dus een maximum en een minimum.

In het algemeen moeten wij nu twee gevallen mogelijk stellen, naarmate de waarde van x, waarvoor $\frac{1}{a}\frac{da}{dx} = \frac{1}{b}\frac{db}{dv}$ is, kleiner of grooter is dan die waarvoor $\left(\frac{da}{dx}\right) = \frac{2}{3}\, a\, \frac{d^2a}{dx^2}$ is. Het tusschengeval, waarin deze twee waarden van x zouden samenvallen, zou als een derde mogelijkheid kunnen beschouwd worden. Noemen wij de maximumwaarde van de temperatuur T_M en de minimnmwaarde T_m. Bij waarde van T beneden T_m is er slechts één snijpunt van $\frac{dp}{nv} = 0$ en $\frac{d^2p}{dvdx} = 0$, en wel bij kleine waarde van x. Bij waarde van T boven T_M ook slechts één snijpunt bij groote waarde van x. Maar bij waarde van T tusschen T_m en T_M zijn er 3 snijpunten. Van deze 3 snijpunten ligt er steeds één, het middelste snijpunt, bij een waarde van x, welke gelegen is tusschen die welke de eerste factor gelijk nul maakt, en die welke de tweede factor gelijk 0 maakt,

Om een overzicht te geven van den gang der snijpunten van $\frac{dp}{dv} = 0$ en $\frac{d^2p}{dvdx} = 0$ bij verschillende temperaturen, en dus van de omstandigheden waarbij $\frac{dp}{dv} = 0$ een maximum- of minimum-volume heeft, zullen wij de gevallen voor de verschillende ligging van de twee waarden van x, waarbij $\frac{1}{a}\frac{da}{dx} = \frac{1}{b}\frac{db}{dx}$ is, en $\left(\frac{da}{dx}\right)^2 = \frac{2}{3}\, a\, \frac{d^2a}{dx^2}$ is, afzonderlijk moeten behandelen.

Nemen wij eerst het geval, waarbij de waarde van x voor minimumwaarde van $\frac{a_x}{b_x}$ de kleinste is. Dit geval is het eenvoudigste en is reeds vroeger door mij besproken. Dan gaat door het dubbelpunt van $\frac{dp}{dv} = 0$ een kromme $\frac{d^2p}{dvdx} = 0$ in fig. 34 door α aangeduid. Bij lagere T heeft α den stand β ingenomen en $\frac{dp}{dv} = 0$ den stand γ zoodat er dan twee snijpunten (1 en 2) aanwezig zijn. Maar bij hoogere T bestaan deze snijpunten niet meer; dan loopt de lijn $\frac{d^2p}{dvdx} = 0$ tusschen de twee takken waarin $\frac{dp}{dv} = 0$ zich gesplitst heeft zonder ze, ten minste daar ter plaatse, te snijden. Er is dan

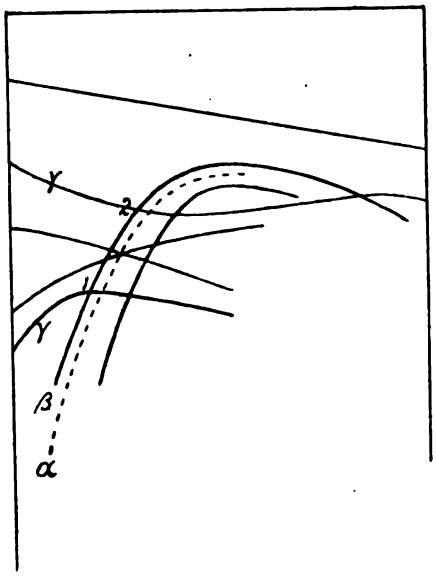


Fig. 34.

echter nog een snijpunt maar bij veel grootere waarde van x, en wel een snijpunt dat gevormd wordt door den weder naar grooter volumes loopenden tak van $\frac{d^2p}{dvdx} = 0$. In dat snijpunt heeft de rechtertak van $\frac{dp}{dv} = 0$ minimumvolume. Bij waarden van T beneden die van het splitsingspunt van $\frac{dp}{dv} = 0$, heeft de tak der vloeistofvolumes van $\frac{dp}{dv} = 0$ dus twee snijpunten met $\frac{d^2p}{dvdx} = 0$, en dus een maximum- en een minimumvolume, terwijl er dan bij veel kleinere waarde van x een minimumvolume op den damptak is. Laten wij T verder dalen, dan naderen maximum- en minimumvolume van den vloeistoftak elkander, en bij de waarde van x, waarbij $\left(\frac{da}{dx}\right)^2 = \frac{2}{3} a \frac{d^2a}{dx^2}$ af is, vallen zij samen. De damptak heeft dan twee samenvallende waarden van x, voor welke $\frac{dv}{dx} = 0$ is, en dus ook een buigpunt, en wel bij het volume, dat het kleinste volume is, waarbij een snijpunt van de beide krommen bestaat. Bij nog lagere temperatuur heeft de vloeistoftak geen snijpunt meer; maar het snijpunt van den damptak blijft bestaan, en gaat steeds naar kleinere waarde van x. Ik behoef nauwelijks er op te wijzen, dat bij deze beschrijving

weder negatieve waarden van x niet als *onbestaanbaar* worden beschouwd. De voorwaarde, dat op de kromme $\frac{dp}{dv} = 0$ een punt voorkomt, waarin $\frac{dv}{dx} = 0$ en $\frac{d^2v}{dx^2} = 0$ is, vinden wij uit:

$$\frac{d^2p}{dv^2}\frac{dv}{dx} + \frac{d^2p}{dvdx} = 0$$

en

$$\frac{d^2p}{dv^2}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^3p}{dv^3}\left(\frac{dv}{dv}\right)^2 + 2\frac{d^3p}{dvdx}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{d^3p}{dvdx^2} = 0.$$

Dus behalve $\frac{dp}{dv} = 0$ ook $\frac{d^2p}{dvdx} = 0$ en $\frac{d^3p}{dvdx^2} = 0$.

Beschouwen wij nu het tweede geval, waarbij de waarde van x, beantwoordende aan $\left(\frac{da}{dx}\right)^2 = \frac{2}{3}a\frac{d^2a}{dx^2}$, de kleinste is. Dan is bij deze waarde van x de waarde van T maximum, en dan zal de temperatuur voor het splitsingspunt van $\frac{dp}{dv} = 0$ een minimum zijn. Dat wil dus zeggen dat dan bij verlaging van T twee snijpunten *verdwijnen*, terwijl bij het vorige geval er bij verlaging van T twee nieuwe snijpunten *verschijnen*.

Beginnen wij bij deze minimumtemperatuur; er loopt dan door het splitsingspunt een kromme $\frac{d^2p}{dvdx} = 0$, die in dat punt geacht kan worden twee punten met de lijn $\frac{dp}{dv} = 0$ gemeen te hebben, en nog een derde snijpunt bij kleinere waarde van x bezit. Dat derde snijpunt is, omdat het kleinere x bezit op den damptak van den linkertak van $\frac{dp}{dv} = 0$ te vinden. In fig. 35 is geteekend de plaats der drie snijpunten bij deze waarde van T. Bij verlaging van T liggen twee der snijpunten op den damptak van den linkertak der lijn $\frac{dp}{dv} = 0$ en een derde snijpunt op den vloeistoftak van den anderen tak. Bij verhooging van T vallen de twee snijpunten op den linker tak samen en het punt, waarvoor x beantwoordt aan $\left(\frac{da}{dx}\right)^2 = \frac{2}{3}a\frac{d^2a}{dx^2}$. Uit alles blijkt dat bij de temperatuur van het splitsingspunt, dat gedeelte van de lijn $\frac{d^2p}{dvdx} = 0$ door het splitsingspunt loopt, dat

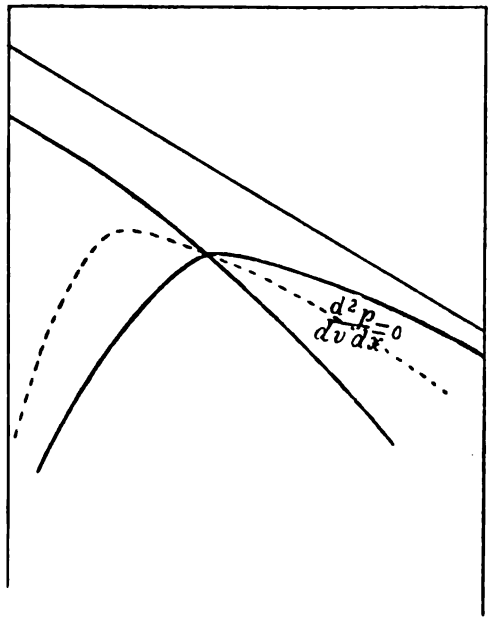


Fig. 35.

voorbij het minimumvolume ligt. Bij T lager dan die van het splitsingspunt blijft dat deel dezer kromme geheel in het labiele gebied.

Zoeken wij waar het van afhangt of de waarde van x, welke beantwoordt aan $\frac{1}{a}\frac{da}{dx}=\frac{1}{b}\frac{db}{dx}$ kleiner of grooter is dan die, waarbij $\left(\frac{da}{dx}\right)^2=\frac{2}{3}a\frac{d^2a}{dx^2}$, dan kunnen wij, ter beslissing, de waarde van x die uit de tweede dezer vergelijkingen volgt substitueeren in:

$$b\frac{da}{dx}-a\frac{db}{dx}$$

Vinden wij dan voor dezen vorm een positieve waarde, dan geldt het eerste geval; dan is het punt, waar $\left(\frac{da}{dx}\right)^2=\frac{2}{3}a\frac{d^2a}{dx^2}$ is, gelegen in de streek waar de waarde van $\frac{a}{b}$ weder toeneemt.

Men kan door a te elimineeren voor $b\frac{da}{dx}-a\frac{db}{dx}$ ook schrijven:

$$\frac{da}{dx}\left\{b-\frac{3}{2}\frac{db}{dx}\frac{\frac{da}{dx}}{\frac{d^2a}{dx^2}}\right\}$$

en daar $\frac{da}{dx}$ positief moet zijn, evenals $\frac{d^2a}{dx^2}$, hangt het teeken af van

$$\frac{2}{3}\, b\, \frac{d^2a}{dx^2} - \frac{3}{2}\frac{db}{dx}\frac{da}{dx}.$$

En $b_2 = nb_1$ stellende, $a = A + 2Bx + Cx^2$, wordt deze vorm

$$\frac{2}{3}\, C\,[1 + (n-1)\,x] - (n-1)\,[B + Cx]$$

of

$$\frac{2}{3}\, C + \frac{2}{3}\,(n-1)\, Cx - (n-1)\,(B + Cx)$$

of

$$\frac{2}{3}\frac{C}{n-1} - \frac{2}{3}\, B - \frac{B+Cx}{3}$$

Nu is hierboven gevonden $B + Cx = +\sqrt{\frac{a_1a_2 - a^2_{12}}{2}}$, en daar $B = a_{12} - a_1$ en $C = a_1 + a_2 - 2a_{12}$ is, hangt het teeken af van

$$\frac{a_1 + a_2 - 2a_{12}}{n-1} - (a_{12} - a_1) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a_1a_2 - a^2_{12}}{2}}.$$

Is dit teeken positief dan hebben wij het eerst behandelde geval. Dus voor dit geval is zeker noodig, maar niet voldoende,

$$\frac{(a_2 - a_{12}) - (a_{12} - a_1)}{a_{12} - a_1} > n - 1$$

of

$$\frac{a_2 - a_{12}}{a_{12} - a_1} > n.$$

Met de volgende getallenwaarden is aan de voorwaarden, noodig voor het eerste geval, voldaan en aan de voorwaarde, dat beide waarden van x in het diagram voorkomen.

Zij $n = 5$, $a_1 = 1$, $a_2 = 30$ en $a_{12} = 2$. De waarde van x, welke voldoet aan $\left(\frac{da}{dx}\right)^2 = \frac{2}{3}\, a\, \frac{d^2a}{dx^2}$, wordt gevonden uit

$$(a_{12} - a_1) + (a_1 + a_2 - 2a_{12})\, x = \sqrt{\frac{a_1a_1 - a_{12}^2}{2}}$$

of

$$1 + 27x = \sqrt{13} = 3,6$$

of

$$x_1 = \frac{2,6}{27}.$$

De waarde van x, welke voldoet aan $\frac{1}{a}\frac{da}{dx}=\frac{1}{b}\frac{db}{dx}$, wordt gevonden uit de vergelijking:

$$B-\frac{n-1}{2}A+Cx+\frac{n-1}{2}Cx^2$$

of

$$-1+27x+54x^2=0$$

of

$$x_2=0{,}035.$$

Hadden wij $a_2=10$ gesteld, de andere waarden onveranderd latende, zoodat toch nog $\frac{a_2-a_{12}}{a_{12}-a_1}>n$ blijft, dan vinden wij x_1 uit de vergelijking:

$$1+7x_1=\sqrt{3} \quad \text{en} \quad x_1=0{,}1045$$

en x_2 uit de vergelijking:

$$-1+7x_2+14x_2^2=0$$

of

$$x_2=-\frac{1}{4}+\sqrt{+\frac{1}{14}}$$

$$4x_2=-1+\sqrt{\frac{15}{7}} \quad \text{en} \quad x_2=0{,}116$$

En eindelijk, om een getallen voorbeeld te kiezen, meer in overeenstemming met die, welke voorkomen bij de experimenteel bestudeerde gevallen van minimumplooipuntstemperatuur. Zij $n=15$, $a_1=1$, $a_2=1{,}45$, zoodat $T_{k_2}<T_{k_1}$ is. Zij verder $a_{12}=1{,}1$. Dan wordt x_1 gevonden uit de vergelijking:

$$0{,}1+0{,}25\,x=\sqrt{0{,}12}=0{,}3435\ldots.$$

$$x_1=0{,}974$$

en x_2 uit de vergelijking:

$$-0{,}15+0{,}25x+\frac{1}{4}0{,}25\,x^2=0$$

of x_1 bijna gelijk aan 0,5.

Hierbij hebben wij dus zeer duidelijk het eerste geval terug.

Het tusschengeval zou eischen dat de x_1 gelijk zou zijn aan x_2. Willen wij voor het tusschengeval nog op andere bijzonderheden letten, dan merken wij op: 1°. dat dan bij elke temperatuur er slechts één enkel snijpunt is voor $\frac{dp}{dv}=0$ en $\frac{d^2p}{dvdx}=0$; 2°. dat dan

in het splitsingspunt van $\frac{dp}{dv} = 0$ een der takken een raaklijn moet hebben evenwijdig aan de X-as; en dus, daar de twee waarden van $\frac{dv}{dx}$ voor dat dubbelpunt gegeven worden door de vergelijking:

$$\frac{d^3p}{dv^3}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + 2\frac{d^3p}{dv^2dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{d^3p}{dvdx^2} = 0$$

weder $\frac{d^3p}{dvdx^2} = 0$ is (zie pag. 256). De kromme $\frac{d^2p}{dvdx} = 0$ gaat nu door het splitsingspunt noch met haar dalenden tak, noch met haar stijgenden tak, maar heeft daar minimum-volume. Bij lagere temperatuur wordt de damptak van $\frac{dp}{dv} = 0$ gesneden in een punt met iets kleinere waarde van x, en bij hoogere temperatuur wordt de vloeistoftak van den rechtertak gesneden bij iets grootere waarde van x. Juist bij de splitsingstemperatuur raakt $\frac{d^2p}{dvdx} = 0$ met een raaklijn evenwijdig aan de X-as.

Willen wij, meer algemeen, bepalen hoe groot de verhouding van $\frac{\left(\frac{da}{dx}\right)^2}{a\frac{d^2a}{dx^2}} = m$ is bij die waarde van x, bij welke $\frac{a_x}{b_x}$ minimum-waarde bezit, dan kunnen wij den volgenden weg inslaan. Uit

$$b\frac{da}{dx} = a\frac{db}{dx}$$

leiden wij af:

$$[1 + (n-1)x][B + Cx] = \frac{n-1}{2}(A + 2Bx + Cx^2)$$

of

$$x^2 + \frac{2}{n-1}x + \frac{\frac{2}{n-1}B - A}{C} = 0$$

en dus

$$x = -\frac{1}{n-1} + \sqrt{\left[\frac{1}{(n-1)} - \frac{B}{C}\right]^2 + \frac{AC - B^2}{C^2}}$$

Uit $\left(\frac{da}{dx}\right)^2 = ma\frac{d^2a}{dx^2}$ leiden wij af:

$$(2-m)(B + Cx)^2 = m(AC - C^2)$$

of

$$x + \frac{B}{C} = \sqrt{\frac{m}{2-m}\,\frac{AC-B^2}{C^2}}$$

Door de twee waarden van x, aldus verkregen, aan elkander gelijk te stellen, vinden wij de vergelijking:

$$\frac{B}{C} - \frac{1}{n-1} + \sqrt{\left[\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{B}{C}\right]^2 + \frac{AC-B^2}{C^2}} = + \sqrt{\frac{m}{2-m}\,\frac{AC-B^2}{C^2}}$$

waaruit volgt:

$$\frac{AC-B^2}{C^2} = + 2\left[\frac{1}{n-1} - \frac{B}{C}\right]\sqrt{\frac{m}{2-m}\,\frac{AC-B^2}{C^2}} + \frac{m}{2-m}\,\frac{AC-B^2}{C^2}$$

of

$$\frac{1-m}{2-m}\sqrt{\frac{AC-B^2}{C^2}} = \left[\frac{1}{n-1} - \frac{B}{C}\right]\sqrt{\frac{m}{2-m}}$$

of

$$\frac{1-m}{\sqrt{m(2-m)}}\sqrt{\frac{AC-B^2}{C^2}} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{\frac{a_2-a_{12}}{a_{12}-a_1} - 1} = \frac{\frac{a_2-a_{12}}{a_{12}-a_1} - n}{(n-1)\left(\frac{a_2-a_{12}}{a_{12}-a_2} - 1\right)}$$

of

$$\frac{1-m}{\sqrt{m(2-m)}}\,\frac{\sqrt{(a_1a_2-a_{12}^2)}}{a_{12}-a_1} = \frac{\frac{a_2-a_{12}}{a_{12}-a_1} - n}{n-1}$$

In het bijzonder blijkt $m = 1$ te zijn als $\frac{a_2-a_{12}}{a_{12}-a_1} = n$ is; en mocht $\frac{a_2-a_{12}}{a_{12}-a_1} \gtrless n$ zijn dan is $m \lessgtr 1$, ten minste als $a_{12} > a_1$ is.

Kent men m bij zekere waarde van x, dan kan het aangroeien of afnemen van m bevoordeeld worden uit de betrekking:

$$(2-m)\,a = \text{constante}$$

welke constante gelijk 0 is, als $a_1a_2 = a_{12}^2$ is, en anders het teeken heeft van $a_1a_2 - a_{12}^2$.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan: *„Bijdrage tot de theorie der binaire mengsels."* IX.

DE ONTMOETING VAN $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ EN $\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)_v = 0.$

De vergelijking van $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ zullen wij, zooals in vorige mededeelingen, schrijven onder den vorm: $\frac{MRT}{(v-b)^2}\frac{db}{dx} = \frac{da}{dx}\frac{1}{v^2}$; en de vergelijking van $\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)_o = 0$ onder den vorm:

$$MRT\left\{\left(\frac{1}{x(1-x)}\right) + \left(\frac{db}{dx}\right)^2 \frac{1}{(v-b)^2}\right\} = \frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{v}.$$

Dan is de meetkundige plaats der snijpunten gegeven door de vergelijking:

$$(v-b)^2 + \left(\frac{db}{dx}\right)^2 x(1-x) = x(1-x)\frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{\frac{da}{dx}}\, v\, \frac{db}{dx}$$

of

$$(v-b)^2 - x(1-x)\frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{\frac{da}{dx}}\frac{db}{dx}(v-b) + x(1-x)\left[\frac{db}{dx} - b\frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{\frac{da}{dx}}\right] = 0.$$

De factor van den bekenden term dezer vergelijking: $\dfrac{\frac{db}{dx}\frac{da}{dx} - b\frac{d^2a}{dx^2}}{\frac{da}{dx}}$

kan, als $b = b_1(1-x) + b_2x$, en $a = A + 2Bx + Cx^2$ gesteld wordt geschreven worden onder den vorm:

$$\frac{db}{dx}\,\frac{B - \frac{C}{n-1}}{B + Cx}$$

en de vergelijking zelve onder den vorm:

$$\frac{(v-b)^2}{\left(\frac{db}{dx}\right)^2} - x(1-x)\frac{C}{B+Cx}\frac{(v-b)}{\frac{db}{dx}} + x(1-x)\frac{B - \frac{C}{n-1}}{B+Cx} = 0.$$

Als $B - \frac{C}{n-1}$ negatief is, dan heeft deze vergelijking zeker een positieven wortel, als n.l., wat voor het aanwezig zijn der lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ noodig is, de grootheid $B + Cx$ positief is. De negatieve wortel is voor het vraagstuk zonder beteekenis. De grootheid $\left(\frac{C}{n-1} - B\right)$ positief kan aldus geschreven worden:

$$(a_{12} - a_1) \frac{\frac{a_2 - a_{12}}{a_{12} - a_1} - n}{n-1} > 0.$$

Noemen wij het geval $\frac{a_2 - a_{12}}{a_{12} - a_1} < n$ het eerste geval, en $\frac{a_2 - a_{12}}{a_{12} - a_1} > n$ het tweede geval.

In het eerste geval heeft de tweede machtsvergelijking in $\frac{v-b}{\frac{db}{dx}}$ den factor van de eerste macht negatief en den bekenden term positief. Er kunnen dan 2 bestaanbare positieve waarden van $v-b$ aan de vergelijking voldoen. Deze wortels zijn evenwel slechts dan bestaanbaar, als

$$x^2 (1-x)^2 \left(\frac{C}{B+Cx}\right)^2 \geqq 4x(1-x) \frac{B - \frac{C}{n-1}}{B+Cx}$$

of

$$x(1-x) \geqq \left(\frac{B}{C} - \frac{1}{n-1}\right) \frac{B+Cx}{C}.$$

De wortels zijn dus onbestaanbaar als:

$$x^2 - x \left\{1 - 4\left(\frac{B}{C} - \frac{1}{n-1}\right)\right\} + 4\frac{B}{C}\left(\frac{B}{C} - \frac{1}{n-1}\right) > 0.$$

Voor waarden van x, die of bijna 0 of bijna 1 zijn, zijn ze dus onbestaanbaar. Hieruit volgt dat de meetkundige plaats der snijpunten van $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v = 0$ en $\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)_v = 0$ in het eerste geval een gesloten kromme is. Alleen hebben wij door te deelen door $x(1-x)$ de waarden $x = 0$ en $x = 1$ verduisterd, die echter slechts behooren bij $v - b = 0$ en $T = 0$. Deze gesloten kromme kan zich tot een enkel punt samentrekken, en zelfs geheel verdwijnen. Het samentrekken tot een enkel punt geschiedt als:

$$\left\{1-4\left(\frac{B}{C}-\frac{1}{n-1}\right)\right\}^2=16\,\frac{B}{C}\left(\frac{B}{C}-\frac{1}{n-1}\right)$$

of als

$$1-8\left(\frac{B}{C}-\frac{1}{n-1}\right)-\frac{16}{n-1}\left(\frac{B}{C}-\frac{1}{n-1}\right)=0$$

of

$$\frac{B}{C}=\frac{1}{8}\,\frac{(n+3)^2}{n^2-1}$$

of

$$\frac{a_2-a_{12}}{a_{12}-a_1}=1+8\,\frac{n^2-1}{(n+3)^2}$$

of

$$\frac{a_2-a_{12}}{a_{12}-a_2}-n=-(n-1)\left\{1-\frac{8\,(n+1)}{(n+3)^2}\right\}.$$

In deze uitdrukking is de waarde van den factor van $n-1$ steeds begrepen tusschen 0 en 1 voor waarden van n tusschen 1 en ∞. Voor waarden van $\frac{a_2-a_{12}}{a_{12}-a_2}<1+8\,\frac{n^2-1}{(n+3)^2}$ is de meetkundige plaats imaginair.

Het punt, waarin de meetkundige plaats verdwijnt, ligt bij $x=\frac{n+3}{(4n+1)}$ en dus steeds tusschen $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{4}$, en bij $v-b=\frac{\frac{db}{dx}}{4}\,\frac{n-1}{n+1}$ of $v=\frac{b_1+b_2}{2}$.

De waarde van MRT vindt men dan door substitutie in $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v=0$ gelijk aan:

$$MRT=\frac{(a_1+a_2-2a_{12})}{b_2-b_1}\,\frac{(n-1)^3\,(n+3)\,(3n+1)}{16\,(n+1)^5}.$$

Dit is niet het punt, waarin de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ verdwijnt. Reeds de omstandigheid, dat laatstgenoemde kromme verdwijnt tusschen $x=\frac{1}{3}$ en $x=\frac{1}{2}$, terwijl het hier besproken punt in dezelfde gevallen verdwijnt tusschen $x=\frac{1}{4}$ en $x=\frac{1}{2}$, toont dit aan. Wel kunnen wij hieruit besluiten, dat, naarmate n tot 1 nadert, beide punten wat de waarde van x aangaat, tot elkander naderen zullen.

Zoo is (zie Bijdrage III Verslag XV pag. 918) $x_g=0{,}48$ voor $\frac{1}{n-1}=5.04$, terwijl met $x=\frac{n+3}{4(n+3)}$ bijna 0.477 gevonden wordt

Maar de waarde van v is voor het hier besproken punt veel kleiner dan voor het punt, waarin $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ verdwijnt.

Men zou à priori moeten verwachten, dat deze twee punten van elkander verschillen. Denken wij ons $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ voor verschillende waarden van T als een oppervlak met de assen x, v en T, en zij de T-as de vertikale as. Dan is dit een oppervlak met het geheele v,x-vlak tot basis, en met een top bij $T = T_g$. Denken wij ons ook $\frac{dp}{dx} = 0$ als oppervlak op dezelfde assen geconstrueerd, dan gaan de doorsneden van dit oppervlak bij klimmende waarden van T naar grooter x en grooter v. Nu kan dit laatste oppervlak niet door den top van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ gaan zonder nog andere snijpunten, een snijkromme, op te leveren. Kan het in den top raken dan behoefde die snijkromme niet te bestaan. Maar een raakvlak aan $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ loopt evenwijdig aan het x,v-vlak, en een dergelijk raakvlak heeft $\frac{dp}{dx} = 0$ niet.

Dat een raakvlak aan den top van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ evenwijdig aan het x,v-vlak loopt volgt uit:

$$\frac{d^3\psi}{dx^2 dT} dT + \frac{d^3\psi}{dx^3} dx + \frac{d^3\psi}{dx^2 dv} dv = 0.$$

In den top zijn $\frac{d^3\psi}{dx^3}$ en $\frac{d^3\psi}{dx^2 dv}$ beide gelijk 0, terwijl $\frac{d^3\psi}{dx^2 dT}$ niet gelijk 0 is; bijgevolg is $\frac{dT}{dx}$ en $\frac{dT}{dv}$ nul, of het raakvlak evenwijdig aan het v,x-vlak.

Zoodra $\frac{a_2 - a_{12}}{a_{12} - a_1}$ niet alleen kleiner is dan n, maar ook kleiner dan $1 + 8\frac{n^2-1}{(n+3)^2}$, snijden de twee krommen elkander bij geen enkele temperatuur. Is daarentegen $\frac{a_2 - a_{12}}{a_{12} - a_1} < n$ en $> 1 + 8\frac{n^2-1}{(n+3)^2}$ dan snijden de twee oppervlakken $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{dp}{dx} = 0$ elkander zoodanig dat de projectie der doorsnede eens gesloten kromme is; de door-

snede zelve ligt dan aan de zijde der kleine volumes van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en tusschen twee lage temperaturen. Stellen wij die temperaturen voor door T_1 en T_2, dan begint eerst bij T_1 raking; tusschen T_1 en T_2 is er snijding en bij T_2 is er opnieuw raking. Bij T_1 beweegt de kromme $\frac{dp}{dx} = 0$ zich dus, bij verhooging van temperatuur, sneller naar grooter volumes, maar bij T_2 daarentegen de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$.

In overeenstemming met fig. 24 (Bijdrage V pag. 153) is de waarde van x voor het minimumvolume van $\frac{dp}{dx} = 0$ dan kleiner dan die der raakpunten; en het punt waarin de meetkundige plaats der raakpunten zich samentrekt ligt dan ook op dat gedeelte van $\frac{dp}{dx} = 0$, dat met toenemende x naar grooter volumes beweegt.

Wij kunnen dat verifieeren door aan te toonen dat $\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right)_v$ voor dat punt *positief* is. Daar $\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right)_v = 2\,\frac{MRT\left(\frac{db}{dx}\right)^2}{(v-b)^3} - \frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{v^2}$ is, zal voor een punt van $\left(\frac{dp}{dx}\right)_v$, of waarvoor $\frac{MRT\,\frac{db}{dx}}{(v-b)^2} = \frac{\frac{da}{dx}}{v^2}$ is, het teeken van $\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right)_v$ afhangen van

$$\frac{\frac{db}{dx}}{v-b} - \frac{1}{2}\,\frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{\frac{da}{dx}}$$

of van

$$\frac{\frac{da}{dx}}{\frac{d^2a}{dx^2}} - \frac{1}{2}\,\frac{v-b}{\frac{db}{dx}}$$

of van

$$\left(\frac{B}{C} + x\right) - \frac{1}{2}\,\frac{v-b}{\frac{db}{dx}}$$

Neemt men, zooals hierboven gevonden is, $\frac{B}{C} = \frac{1}{8}\frac{(n+3)^2}{n^2-1}$ en $x = \frac{n+3}{4(n+1)}$ en dus $\frac{B}{C} + x = \frac{1}{8}\frac{(n+3)(3n+1)}{n^2-1}$, terwijl $\frac{1}{2}\frac{v-b}{\frac{db}{dx}} =$ $= \frac{1}{8}\frac{n-1}{n+1}$ is, dan blijkt onmiddellijk dat het teeken zeker positief is.

Wij kunnen nu een inzicht verkrijgen op welke wijze aangroeien van de waarde van $\frac{a_2-a_{12}}{a_{12}-a_2}$ invloed uitoefent op de snijding der beide oppervlakken $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ en $\frac{dp}{dx} = 0$. Is deze grootheid, welke ik door k zal voorstellen, kleiner dan $1 + 8\frac{n^2-1}{(n+3)^2}$ dan is er geen snijding mogelijk. Bij deze beschouwing zullen wij n en C onveranderlijk laten, en dus $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ onveranderlijk houden. Laten wij nu k aangroeien, dan zal $\frac{dp}{dx} = 0$ veranderen en het oppervlak $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ gaan snijden. Zoolang $k < n$ geschiedt die snijding in een gesloten kromme. Zoowel in de v,x-projectie als in de T,x-projectie, als in de v, T-projectie, kunnen wij van een benedensten en van een bovensten tak spreken. Maar deze takken breiden zich niet over de geheele breedte, van $x = 0$ tot $x = 1$, uit. Bij het naderen van k tot n wordt de breedte dezer doorsnede grooter, maar de benedenste tak daalt voortdurend, en de bovenste tak stijgt. In de v,x-projectie beteekent dit, dat de tak met de kleinste waarde van v nadert tot b, en dat de bovenste tak grooter waarde van v verkrijgt. In de T,x-projectie beteekent dit dat voor den ondersten tak T nadert tot nul, en voor den bovensten tak aangroeit, maar toch nog vèr beneden de waarde van T_g blijft. (Zie Bijdrage III, pag. 919. Verslag XV). En eindelijk als k gelijk aan n is geworden, strekt de gesloten kromme der doorsnede zich uit van $x = 0$ tot $x = 1$, maar de onderste tak valt samen met de lijn $v = b$ en de waarde van T voor dien tak is het absolute nulpunt. Steeds is v en T voor den bovensten tak toegenomen. En de vraag doet zich voor of ook dan nog de geheele doorsnede zich bevindt op wat ik voor het oppervlak $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ den achterkant zal noemen; dat wil zeggen de punten met de kleinste waarde van v. Wij komen op die vraag aanstonds terug. Maar reeds nu laat zich inzien wat er uit aangroeien van k boven n zal volgen.

Het proces, dat wij hierboven beschreven, gaat voort. De onderste tak wordt niet imaginair, maar heeft waarden van $v < b$ en waarden van T die weder positief zijn. Voor het werkelijke vraagstuk zijn zij dus van geen beteekenis; en zoodra $k > n$ is hebben wij ons dus slechts met een enkelen tak voor de doorsnede bezig te houden. Dit zien wij ook onmiddellijk in uit de tweede machtsvergelijking in $v-b$ van pag. 262, welke dan één negatieven en één positieven wortel bezit. Als dus $k > n$ is, dan zullen wij kunnen zeggen dat de twee oppervlakken elkander in een kromme, die slechts één tak bezit, snijden. Bij $x = 0$ en $x = 1$ is de waarde van v steeds gelijk aan b en van T steeds gelijk 0. Daaruit volgt reeds, dat er van een maximumwaarde van T voor de doorsnede sprake zal zijn. Bij die waarde van T zullen de twee krommen bij gegeven waarde van T, nl. $\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)_{vT} = 0$ en $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT} = 0$, elkander raken. Zulk een raking hebben wij ook ontmoet in het geval $k < n$, en wij hebben toen besloten, dat de raking plaats had, zooals in fig. 24^c (Bijdrage V, pag. 154) is voorgesteld.

Maar er is nog een andere raking mogelijk, en wel zulk een, waarbij de kromme $\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)_{vT} = 0$, overal behalve in het raakpunt, ligt in het gebied waar $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT}$ positief is, of zooals wij ook zouden kunnen zeggen buiten $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT} = 0$. Voor de snijding der beide oppervlakken zou dit beteekenen, dat de gemeenschappelijke kromme lijn, die van $x = 0$, en $x = 1$ en $T = 0$ naar boven loopt, om den top van $\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)_{vT} = 0$ heenloopt, of dat zij, zooals tot hiertoe het geval was, geheel aan de zijde der kleine volumes blijft.

Bij de gradueele vervorming der gemeenschappelijke snijlijn, die van het aangroeien van k boven n het gevolg is, moet zij dus voor zekere waarde van k door den top van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ gegaan zijn. En met de voorwaarde voor deze omstandigheid zullen wij ons thans bezighouden. Eigenlijk heb ik deze vraag reeds trachten op te lossen in Bijdrage III pag. 923, waarheen ik voor de beteekenis der volgende formule verwijs. De omstandigheid dat de snijkromme door den top gaat wordt gegeven door

$$\frac{d^2a}{dx^2}(1-2x_g) = \frac{da}{dx}\,4y_g^2\,.$$

Maar de discussies dezer formule zal ik meer in overeenstemming met de stelselmatige behandeling van deze Bijdrage voeren.

Stelt men voor y_g^2 de waarde $\frac{(1-2x_g)^2}{4x_g(1-x_g)}$, (zie Bijdrage III pag. 922) dan kan aan deze vergelijking de volgende vorm gegeven worden:

$$\frac{B}{C} = \frac{x_g(3x_g-1)}{1-2x_g} - \frac{1}{n-1}.$$

Men kan deze vergelijking ook afleiden door de volgende overweging. Wil men dat het toppunt van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ ook een punt zij van $\frac{dp}{dx} = 0$, dan moet aan de volgende vergelijkingen voldaan worden: $\frac{d^2\psi}{dx^2{}_{vT}} = 0$, $\frac{d^3\psi}{dx^3{}_{vT}} = 0$, $\frac{d^3\psi}{dvdx^2} = 0$ en $\frac{d^3\psi}{dxdv} = 0$. Daaruit blijkt dat dan niet alleen aan $\frac{dp}{dx} = 0$, maar ook aan $\frac{d^2p}{dx^2} = 0$, moet voldaan worden. Dat beteekent dat het punt van de kromme $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT} = 0$ waarin deze kromme haar minimumvolume heeft, door den top moet gaan. Er moet dus voldaan worden aan:

$$\frac{MRT\frac{db}{dx}}{(v\,.\,b)^2} = \frac{\frac{da}{dx}}{v^2}$$

en aan

$$2\frac{MRT\left(\frac{db}{dx}\right)^2}{(v-b)^3} = \frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{v^2}$$

en dus ook aan

$$\frac{v-b}{2\frac{db}{dx}} = \frac{\frac{da}{dx}}{\frac{d^2a}{dx^2}} = \frac{B}{C} + x$$

Nu is voor den top van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ (Bijdrage III pag. 919)

$$\frac{v\,.\,b}{2\left(\frac{db}{dx}\right)} = \sqrt[3]{\frac{x_g^2(1-x_g)^2}{4(1-2x_g}} \text{ en } \frac{1}{n-1} = \frac{x_g^2}{1-2x_g} - \sqrt[3]{\frac{x_g^2(1-x_g)^2}{4(1-2x_g)}}.$$

Bijgevolg:

$$\frac{B}{C} + x_g = \frac{x_g^2}{1-2x_g} - \frac{1}{n-1}$$

of

$$\frac{B}{C} = \frac{x_g(3x_g-1)}{1-2x_g} - \frac{1}{n-1}.$$

Indien het mogelijk was x_g uit te drukken als explicite functie van n dan zou rechtstreeks blijken, dat $k > n$ moet zijn om de omstandigheid te vervullen dat $\frac{dp}{dx} = 0$ door den top ga. Wij zullen ons er nu mede moeten tevreden stellen om met behulp van de tabel (pag. 918) de waarde van k voor verschillende waarden van n te berekenen. Zoo behoort $\frac{1}{n-1} = 0{,}3704$ bij $x_g = 0{,}4$ en $\frac{B}{C}$ vinden wij dan gelijk aan $0{,}4 - 0{,}3704 = 0{,}0296$. Daar $\frac{B}{C} = \frac{1}{k-1}$ is, vinden wij $k = 1 + \frac{1}{0{,}0296}$, terwijl $n = 1 + \frac{1}{0{,}3704}$ is. Zoo vinden wij:

x_g	n	k
0,4	$1 + \frac{1}{0{,}37}$	$1 + \frac{1}{0{,}03}$
0,45	$1 + \frac{2}{3}$	$1 + \frac{1}{0{,}075}$
0,46	$1 + \frac{1}{2{,}08}$	$1 + \frac{1}{0{,}105}$
0,47	$1 + \frac{1}{3{,}06}$	$1 + \frac{1}{0{,}15}$
0,48	$1 + \frac{1}{5{,}04}$	$1 + \frac{1}{0{,}24}$
0,49	$1 + \frac{1}{10{,}91}$	$1 + \frac{1}{0{,}6}$.

Dus k steeds grooter dan n, maar de verhouding $\frac{k}{n}$ met n afnemend.

Dat $\frac{B}{C} - \frac{1}{n-1}$ of $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{n-1}$ steeds negatief moet zijn, voor het geval dat $\frac{dp}{dx} = 0$ door den top van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ gaat, blijkt als wij de waarde van $\frac{B}{C} - \frac{1}{n-1}$ uitdrukken in x_g. Deze waarde is:

$$\frac{B}{C}-\frac{1}{n-1}=\frac{x_g(3x_g-1)}{1-2x_g}-\frac{2}{n-1}$$

of

$$\frac{B}{C}-\frac{1}{n-1}=\frac{x_g(1-x_g)}{1-2x_g}\left\{-1+\sqrt[3]{\frac{2(1-2x_g)^2}{x_g(1-x_g)}}\right\}.$$

De factor van $\frac{x_g(1-x_g)}{1-2x_g}$ is alleen gelijk 0 voor $x_g=\frac{1}{3}$ en negatief voor alle waarden van x_g tusschen $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{3}$, tusschen welke waarden zij in ligt.

Voor alle waarden van $T<T_g$ heeft de doorsnede van beide oppervlakken de gedaante van fig. 24*a* (Bijdrage V, pag. 154). Voor $T=T_g$ is $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ tot een enkel punt samengetrokken, en de lijn $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT}=0$ heeft het minimumvolume juist in dat punt.

Nemen wij k nog grooter dan hierboven berekend is, dan zal de doorsnede der beide oppervlakken om den top heenloopen en er is weder sprake van een maximumtemperatuur, die natuurlijk dan weder beneden T_g ligt. Bij die maximumtemperatuur is er weder raking tusschen de twee krommen, maar dan is de raking zoodanig, dat $\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)_{vT}=0$ geheel ligt in het gebied, waar $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT}$ positief is, behalve in het raakpunt, waar $\frac{dp}{dx}=0$ is. Het raakpunt ligt dan op den tak van $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT}=0$, waar $\frac{dv}{dx}$ negatief is.

Hiermede zijn echter niet alle mogelijke gevallen voor de snijding der beide oppervlakken behandeld. Er blijven nog enkele opmerkingen te maken. Daartoe merken wij vooreerst op, dat als $\frac{da}{dx}$ negatief is, en voor de waarden van x, waarvoor dit het geval is, geen punten van de doorsnede aanwezig zijn. Voor zulke punten is $B+Cx$ negatief, wat bij positieve C slechts het geval kan zijn als B negatief is.

In de tweedemachtsvergelijking in $(v-b)$ is de factor van $\frac{v-b}{\frac{db}{dx}}$ positief geworden wegens het negatief zijn van $B+Cx$ en de derde

term is eveneens positief, daar $\frac{B-\frac{C}{n-1}}{B+Cx}$ zoowel teller als noemer negatief heeft. Er kan dus geen positieve waaarde van $v-b$ aan deze vergelijking voldoen. In de tweede plaats merken wij op dat voor die waarde van x, waarvoor $\frac{da}{dx}=0$ is, de waarde van $v-b$ oneindig is, en de waarde van T gelijk 0. De projectie van de doorsnede van de twee oppervlakken op het v,x-vlak is dan een kromme die bij $x=1$ en $v=b_2$ begint en een asymptoot heeft bij de waarde van x, waarvoor $\frac{da}{dx}=0$ is. De T,x-projectie der doorsnede is dan een lijn die bij $x=1$ en $x=-\frac{B}{C}$ een waarde voor T bezit gelijk aan nul, en ergens tusschen die twee waarden van x een maximum T heeft. Het is duidelijk dat bij deze waarde van T, waarbij de krommen $\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)_{vT}=$ en $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT}=0$ elkander aanraken, de aanraking geschiedt als in het laatst besproken geval, en dat de top van $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ ligt in het gebied waar $\frac{dp}{dx}$ positief is. En in de derde plaats wijzen wij nog op het bijzondere geval dat $B=0$ is, of $a_{12}=a_1$ of $k=\infty$. Dan is de waarde van x, waarvoor $\frac{da}{dx}=0$ is, zelve gelijk aan 0. De vergelijking ter bepaling van $v-b$ der doorsnede van de twee oppervlakken vereenvoudigt zich dan tot:

$$\frac{(x-b)^2}{\left(\frac{db}{dx}\right)^2}-(1-x)\frac{v-b}{\frac{db}{dx}}-\frac{1-x}{n-1}=0$$

of

$$\frac{v-b}{\frac{db}{dx}}=\frac{1-x}{2}+\sqrt{\frac{(1-x)^2}{4}+\frac{1-x}{n-1}}$$

Dit stelt een tak van een hyperbool voor, die door het punt $x=1$ en $v=b_2$ gaat en de as $x=0$ snijdt bij een waarde van

$$v=b_1+\left(\frac{b_2-b_1}{2}\right)\left\{1+\sqrt{\left(1+\frac{4}{n-1}\right)}\right\}.$$

De grootheid $k=\frac{a_2-a_{12}}{a_{12}-a_1}$, waarvan in zoo hooge mate het al of niet snijden der beschouwde oppervlakken afhangt en de wijze,

waarop zij elkander snijden, wordt bij dezelfde waarde van a_2 en a_1 geheel beheerscht door de waarde, welke wij aan a_{12} moeten toekennen. Neemt a_{12} af van a_2 tot a_1, dan neemt k toe van 0 tot ∞. Voor $a_{12} = \sqrt{a_1 a_2}$ heeft zij de waarde $\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}$ en dan zou een der overgangsgevallen $k = n$ luiden $\frac{a_2}{n^2} = a_1$, of de kritische druk der beide componenten is even groot. Maar zoolang de betrekking tusschen a_1, a_2 en a_{12} niet bekend is, kan een dergelijke eenvoudige regel niet als geldig beschouwd worden.

De temperaturen, waarbij de beide krommen $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{dp}{dx} = 0$ elkander raken, te berekenen is wegens de zeer samengestelde vormen waartoe dit vraagstuk voert, niet uit te voeren. Men zou daartoe de waarde van $v-b$ kunnen oplossen uit den tweede machtsvorm van bladz. 262, welke dan een funtie van x is, en de waarde van v knnnen substitueeren, hetzij in $\frac{dp}{dx} = 0$, hetzij in $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$. Men heeft dan een formule waarin T uitgedrukt is in de waarde van x der snijpunten van de beide krommen. Zoekt men dan de maximumwaarde van T, door bij $T =$ constante naar x te differentieeren dan vindt men een betrekking in x, waaruit de x van de raakpunten berekend zou moeten worden, en door substitutie van deze waarde van x de waarde van T_{max} of T_{min}. Maar zelfs in het bijzondere geval van $\frac{B}{C} = \frac{1}{n-1}$, of $k = n$, waarin $v - b = \frac{db}{dx} \frac{x(1-x)}{\frac{1}{n-1} + x}$ is, voert deze berekening tot een vorm, waarin x tot den derden graad opklimt. In alle andere gevallen is de vergelijking veel ingewikkelder. Men zou de waarde van x, v en T voor de maximum- en minimumtemperatuur natuurlijk ook kunnen berekenen met de 3 vergelijkingen:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0, \qquad \frac{dp}{dx} = 0 \quad \text{en} \quad -\frac{d^2\psi}{dx^2}\frac{d^2p}{dx\,dv} = \left(\frac{d^2p}{dx^2}\right)^2,$$

welke laatste vergelijking uitdrukt dat de beide krommen elkander raken. Daar $\frac{d^2p}{dv\,dx}$ zeker negatief is in de punten van de lijn $\frac{dp}{dx} = 0$, moet voor de raking $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ zeker positief zijn, iets wat reeds in de figuren 24 dezer bijdragen was voorgesteld.

Wiskunde. — De Heer KORTEWEG biedt eene mededeeling aan van den Heer J. A. BARRAU: *„Over drietalstelsels, in het bijzonder die van dertien elementen."*

(Mede aangeboden door den Heer JAN DE VRIES).

In eene mededeeling aan deze Akademie[1]) gaf Prof. J. DE VRIES een drietalstelsel van 13 elementen van ander type dan het cyclische van Prof. NETTO[2]); hij voegde daaraan evenwel de opmerking toe, dat een bewijs, dat deze beide typen de eenige zouden zijn, niet geleverd is.

De Heer K. ZULAUF toont in zijne dissertatie[3]) aan, dat de vroeger door KIRKMAN (1853) en REISZ (1859) gegeven stelsels met dat van DE VRIES identisch zijn, zoodat het aantal *bekende* systemen *twee* bedraagt, omtrent het aantal *mogelijke* stelsels wordt ook hierdoor niets beslist. Het scheen gewenscht, door een afzonderlijk onderzoek dit punt tot beslissing te brengen.

Hiertoe levert het gemak op, de uitdrukkingen te bezigen, welke in de theorie der configuraties gebruikelijk zijn, door de 13 elementen te beschouwen als *punten*, de 26 drietallen als *lijnen*, welke drie der punten dragen; het geheele drietalstelsel wordt dan tot het schema eener diagonaallooze Cf. $(13_6, 26_3)$, waarbij het onverschillig is, of deze Cf. al dan niet voor geometrische uitvoering vatbaar is. Eene classificatie van deze Cff. is nu het beoogde doel.

De restfiguur der tweede orde eener lijn van zulk een Cf., d.w.z. hetgeen overblijft, als men die lijn met hare drie punten en de 3×5 nog door deze punten gaande lijnen weglaat, is noodzakelijk eene Cf. (10_3), waarvan de 10 punten op drie wijzen perspectief zijn en wel naar de drie afgezonderde punten.

Maar dan wordt ook omgekeerd elke denkbare Cf. $(13_6, 26_3)$ van het verlangde type verkregen door:

1°. uit te gaan van alle mogelijke Cff. (10_3),

2°. voor elke Cf. (10_3) de Cf. $(10_3, 15_2)$ harer diagonalen op te maken,

3°. voor elke van deze Cff. $(10_3, 15_2)$ te onderzoeken, op hoeveel wijzen hare 15 lijnen in drie *hoofdvijfzijden*[4]) uiteenvallen,

4°. voor elk dezer gevallen de 5 lijnen elker hoofdvijfzijde naar één punt convergent en deze drie punten collineair te denken

---

1) *Versl. Kon. Akad. v. Wet.* III, p. 64, 1894.

2) *Substitutionentheorie*, p. 220; *Math. Annalen*, Bd. 42.

3) *„Ueber Tripelsysteme von 13 Elementen"*, Giessen, 1897.

4) Onder *hoofd-n-zijde* eener Cf. verstaan MARTINETTI en DE VRIES eene groep van *n* Cf-lijnen, welke te samen alle Cf-punten eens bevatten.

Het aantal typen van Cff. (10_3) bedraagt, volgens de classificaties van KANTOR [1]) en SCHROETER [2]), *tien*, naar hunne restfiguren te onderscheiden. Bezigen wij de lijst van SCHROETER, dan zijn de restfiguren der drietallen van het systeem van NETTO resp.:

N $(01..a..)_{cyc.}$ alle VII, $(0..6.8..)_{cyc.}$ [3]) alle VIII.

Die van het stelsel van KIRKMAN zijn:

K	1	1	1	2	2	3	3	5	5	7	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6	1	2	3	4	5	*a*
	2	4	6	4	8	4	9	6	7	8	8	5	7	0	9	9	0	5	7	8	0	7	6	9	8	*b*
	3	5	7	6	9	8	0	0	9	0	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
	IX	VIII	V	V	V	V	VIII	V	IX	V	VIII	V	V	II	VIII	VI	VIII	V	VIII	IX	X	III	III	X	III	X

De Cff. der diagonalen van de 10 Cff. (10_3) zijn resp.:

	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1 8	1 8	1 8	1 8	1 8	1 8	1 8	1 8	1 8	1 8
1 9	1 9	1 9	1 9	1 9	1 9	1 9	1 9	1 9	1 9
1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0
2 5	2 5	2 5	2 6	2 6	2 5	2 5	2 5	2 5	2 5
2 7	2 7	2 6	2 7	2 7	2 7	2 7	2 9	2 6	2 7
2 0	2 0	2 0	2 0	2 0	2 0	2 0	2 0	2 4	2 9
3 4	3 4	3 4	3 4	3 4	3 4	3 4	3 5	3 7	3 5
3 6	3 6	3 7	3 5	3 5	3 6	3 6	3 6	3 8	3 6
3 0	3 0	3 0	3 0	3 9	3 9	3 8	3 7	3 0	3 7
4 7	4 7	4 7	4 7	4 7	4 7	4 7	4 7	4 7	4 7
4 9	4 9	4 9	4 9	4 0	4 9	4 9	4 8	4 9	4 8
5 6	5 6	5 6	5 6	5 6	5 6	5 6	4 9	5 6	4 9
5 9	5 8	5 8	5 8	5 8	5 8	5 0	5 7	5 0	5 0
6 8	6 8	6 9	6 9	6 8	6 8	6 8	6 8	6 8	6 8
7 8	7 9	7 8	7 8	7 9	7 0	7 9	6 0	7 9	6 0

[1]) *Wiener Sitzungsberichte* 84, 1881.

[2]) *Göttinger Nachrichten*, 1889, N°. 8.

[3]) De cyclische orde is hierbij: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 *a b c*.

1	1	1	1	8	2	3	2	3	4	5	1	2	3	5	7	1	2	4	3	6	1	2	3	4	5	*a*
	2	4	6	9	4	7	6	5	6	7	8	0	4	6	9	9	5	7	0	8	0	7	6	9	8	*b*
	3	5	7	0	8	8	9	9	0	0	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
2	1	1	1	8	2	3	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	6	7	*a*
	2	4	6	9	4	7	6	5	6	7	8	7	0	9	6	9	0	6	7	8	0	5	4	8	9	*b*
	3	5	7	0	8	8	9	9	0	0	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
3	1	1	1	8	2	3	2	3	4	5	1	2	3	4	6	1	2	3	5	7	1	2	3	4	5	*a*
	2	4	6	9	4	6	7	5	6	7	8	5	0	7	9	9	0	4	6	8	0	6	7	9	8	*b*
	3	5	7	0	8	8	9	9	0	0	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
4	1	1	1	8	2	3	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	7	*a*
	2	4	6	9	4	6	7	5	6	7	8	0	7	9	6	9	6	0	7	8	0	5	4	9	8	*b*
	3	5	7	0	8	8	9	9	0	0	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
5	1	1	1	8	2	3	2	4	3	5	1	2	3	5	7	1	2	3	4	6	1	2	3	4	5	*a*
	2	4	6	9	4	7	5	6	6	7	8	0	4	6	9	9	7	5	0	8	0	6	9	7	8	*b*
	3	5	7	0	8	8	9	9	0	0	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
6	1	1	1	8	2	3	2	4	3	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	6	1	2	3	5	7	*a*
	2	4	6	9	4	7	5	6	6	7	8	7	9	0	6	9	0	5	7	8	0	6	4	8	9	*b*
	3	5	7	0	8	8	9	9	0	0	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
7	1	1	1	8	2	3	2	4	3	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	6	1	2	3	5	7	*a*
	2	4	6	9	4	7	5	6	6	7	8	0	9	7	6	9	7	5	0	8	0	6	4	8	9	*b*
	3	5	7	0	8	8	9	9	0	0	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
8	1	1	1	8	2	3	2	5	3	4	1	2	3	4	5	1	2	3	6	7	1	2	3	4	5	*a*
	2	4	6	9	4	7	6	7	5	6	8	0	9	7	6	9	5	4	8	0	0	7	6	9	8	*b*
	3	5	7	0	8	8	9	9	0	0	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
9	1	1	1	2	4	6	5	3	7	2	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	6	7	*a*
	2	4	6	8	8	9	7	5	3	4	8	7	6	9	0	9	0	8	7	6	0	5	4	8	9	*b*
	3	5	7	9	0	0	8	9	0	6	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
10	1	1	1	3	5	7	2	6	4	2	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6	1	2	3	4	5	*a*
	2	4	6	8	8	9	7	5	3	4	8	5	7	9	0	9	0	5	7	8	0	9	6	8	7	*b*
	3	5	7	9	0	0	8	9	0	6	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
11	1	1	1	3	5	7	2	6	4	2	1	2	3	4	6	1	2	3	4	5	1	2	3	4	6	*a*
	2	4	6	8	8	9	7	5	3	4	8	5	7	9	0	9	0	6	8	7	0	9	5	7	8	*b*
	3	5	7	9	0	0	8	9	0	6	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
12	1	1	1	3	5	7	2	6	4	2	1	2	3	4	5	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6	*a*
	2	4	6	8	8	9	7	5	3	4	8	0	6	9	7	9	5	7	8	0	0	9	5	7	8	*b*
	3	5	7	9	0	0	8	9	0	6	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
13	1	1	1	3	5	7	2	6	4	2	1	2	3	4	6	1	2	3	4	5	2	3	4	1	6	*a*
	2	4	6	8	8	9	7	5	3	4	8	9	5	7	0	9	0	6	8	7	5	7	9	0	8	*b*
	3	5	7	9	0	0	8	9	0	6	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
14	1	1	1	2	4	6	5	3	2	3	1	2	3	5	7	1	2	3	4	5	1	2	3	4	6	*a*
	2	4	6	8	8	9	7	5	7	4	8	4	0	6	9	9	6	8	7	0	0	5	7	9	8	*b*
	3	5	7	9	0	0	8	9	0	6	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
15	1	1	1	2	4	6	5	3	2	3	1	2	3	4	5	1	2	3	4	6	1	2	3	5	7	*a*
	2	4	6	8	8	9	7	5	7	4	8	6	7	9	0	9	5	0	7	8	0	4	8	6	9	*b*
	3	5	7	9	0	0	8	9	0	6	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
16	1	1	1	3	2	7	5	6	4	2	1	3	4	6	2	1	2	3	4	5	1	2	3	4	6	*a*
	2	4	6	8	8	9	7	5	3	4	8	7	9	0	5	9	7	6	8	0	0	9	5	7	8	*b*
	3	5	7	9	0	0	8	9	0	6	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
17	1	1	1	3	2	7	5	6	4	2	1	2	3	4	5	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6	*a*
	2	4	6	8	8	9	7	5	3	4	8	7	6	9	0	9	5	7	8	0	0	9	5	7	8	*b*
	3	5	7	9	0	0	8	9	0	6	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
18	1	1	1	3	2	7	5	6	4	2	1	2	3	4	6	1	2	3	4	5	1	2	3	4	6	*a*
	2	4	6	8	8	9	7	5	3	4	8	9	5	7	0	9	7	6	8	0	0	5	7	9	8	*b*
	3	5	7	9	0	0	8	9	0	6	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
19	1	1	1	3	2	7	5	6	4	2	1	2	3	4	5	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6	*a*
	2	4	6	8	8	9	7	5	3	4	8	9	6	7	0	9	5	7	8	0	0	7	5	9	8	*b*
	3	5	7	9	0	0	8	9	0	6	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
20	1	1	1	3	2	7	5	6	4	2	1	2	3	4	5	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6	*a*
	2	4	6	8	8	9	7	5	3	4	8	9	6	7	0	9	7	5	8	0	0	5	7	9	8	*b*
	3	5	7	9	0	0	8	9	0	6	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*

Hare mogelijke verdeelingen in hoofdvijfzijden zijn:

I	geene		
II	twee, zie **1** en **2**	der voorgaande tabel	
III	twee, „ **3** „ **4**	„ „ „	
IV	geene		
V	drie, „ **5, 6, 7**	„ „ „	
VI	ééne, „ **8**	„ „ „	
VII	ééne, „ **9**	„ „ „	
VIII	vier, „ **10, 11, 12, 13**	„ „ „	
IX	twee, „ **14** en **15**	„ „ „	
X	vijf, „ **16, 17, 18, 19, 20**	„ „ „	

Volgens 4°. geven deze verdeelingen nu aanleiding tot 20 tripelstelsels, waaronder alle denkbare met zekerheid voorkomen, ze kunnen echter nog onderling en met **K** of **N** identisch zijn. Nu merken wij op, dat VI en VII slechts op ééne wijze kunnen worden aangevuld, zoodra dus deze resten optreden, is het systeem identisch met **8**, resp. **9**; hieruit volgt reeds, dat **K** en **8**, evenzoo **N** en **9** van hetzelfde type zijn. (Zie tabel p. 276).

Nu treedt restfiguur VII op bij **11**, naar het drietal 37*a*; VI daarentegen bij:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20

resp. naar de drietallen:

123, 123, 145, 167, 123, 123, 47*a*, 37*a*, 35*c*, 57*b*, 56*a*, 79*c*, 49*a*, 27*a*, 18*a*, 35*c* en 60*b*,

dus is **11** identisch met **9** en **K**, de overige zijn identisch met **8** en **N** en er is *bewezen:*

buiten de beide bekende vormen bestaan geene drietalstelsels van dertien elementen.

Tevens blijkt dat het voor het determineeren van een gegeven stelsel voldoende is enkele restfiguren te gaan opmaken, tot men ontmoet hetzij VII (of VIII in grooter aantal dan zes), hetzij II, III, V, VI, IX of X.

Door het voorgaande is tevens eene methode gegeven [1]) tot het bepalen van het aantal drietalstelsels voor willekeurige n (mits $\equiv 1$ of 3, mod. 6), dat is tot het classificeeren aller diagonaallooze

[1]) Verg. DE VRIES *Verzl. en Meded. Kon. Akad. v. Wet.* VI, p. 13, waar dezelfde methode in meer beperkten zin wordt gebezigd tot het opsporen van (uitsluitend *regelmatige*) hoofdveelzijden der Cff. τ_n. Zulk eene hoofdveelzijde bepaalt echter een drietalstelsel en omgekeerd. Inderdaad komen de cyclische stelsels van 13 en 15 reeds bij DE VRIES voor (l. c. p. 16 en 17), doch zonder *als zoodanig* te worden beschouwd.

$$Cff. \left\{ n_{\frac{n-1}{2}} \;,\; \left(\frac{n(n-1)}{2\,.\,3}\right)_3 \right\},$$

namelijk :

1°. uitgaan van alle mogelijke :

$$Cff. \left\{ (n-3)_{\frac{n-7}{2}} \;,\; \left(\frac{(n-3)\,(n-7)}{6}\right)_3 \right\},$$

2°. opmaken van de Cff. harer diagonalen, dat zijn :

$$Cff. \left\{ (n-3)_3 \;,\; \left(\frac{3(n-3)}{2}\right)_2 \right\},$$

3°. nagaan op hoeveel wijzen elk dezer Cff. naar hare lijnen kan uiteenvallen in drie hoofd-$\frac{n-3}{2}$-zijden,

4°. telkens de lijnen van zulk eene veelzijde naar één punt convergent en deze drie punten collineair aannemen,

5°. in typen rangschikken der verkregen systemen.

Reeds bij $n = 15$ echter stuit deze methode op het ontbreken der voor 1°. noodige classificatie van Cff. $(12_4, 16_3)$, waarvan slechts een zestal vormen zijn opgesomd [1]). Bepalen wij ons tot den meest bekenden en meest regelmatigen vorm, van Hesse :

A	1	2	3	4
5	a	b	c	d
6	b	c	d	a
7	c	d	a	b
8	d	a	b	c

waarin elk punt van het viertal $abcd$ collineair is met de punten der beide andere viertallen, die er mede in dezelfde rij of kolom staan, dan ontstaan *drie* typen van tripelstelsels van 15 elementen :

I. Aanvulling $x\,a\,b,\ x\,c\,d,\ x\,12,\ x\,34,\ x\,56,\ x\,78,$
$y\,a\,c,\ y\,b\,d,\ y\,13,\ y\,24,\ y\,57,\ y\,68,$
$z\,a\,d,\ z\,b\,c,\ z\,14,\ z\,23,\ z\,58,\ z\,67,$
$x\,y\,z.$

Alle resten zijn A, het stelsel is identisch met het cyclische [2]) :

$(1\,.\,2\,..\,5\,...)$; $(1\,.\,3\,...\,9\,...)$; $(1\,...\,6\,...\,11\,...)$.

II. Aanvulling $x\,a\,b,\ x\,c\,d,\ x\,12,\ x\,34,\ x\,56,\ x\,78,$
$y\,a\,c,\ y\,b\,d,\ y\,13,\ y\,24,\ y\,58,\ y\,67,$
$z\,a\,d,\ z\,b\,c,\ z\,14,\ z\,23,\ z\,57,\ z\,68,$
$x\,y\,z.$

---

[1]) Verg. schrijvers proefschrift § 36.

[2]) L. Heffter, *Math. Annalen*, Bd. 49.

Er zijn drie resten A, namelijk van

$$x\,y\,z,\quad x\,56 \quad \text{en} \quad x\,78;$$

er zijn vier resten B, d.w.z. van het type der Cf. $(16_3, 12_4)$ van DE VRIES met de samenstelling

B	1	2	3	4
5	a	b	c	d
6	b	c	d	a
7	c	d	a	b
8	d	a	b	c

Deze resten komen voor bij $x\,a\,b$, $x\,c\,d$, $x\,12$, $x\,34$.
De overige resten zijn van andere typen.

III. Aanvulling $x\,a\,b$, $x\,c\,d$, $x\,12$, $x\,34$, $x\,58$, $x\,67$,
$y\,a\,c$, $y\,b\,d$, $y\,13$, $y\,24$, $y\,56$, $y\,78$,
$z\,a\,d$, $z\,b\,c$, $z\,14$, $z\,23$, $z\,57$, $z\,68$,
$x\,y\,z$.

Alleen $x\,y\,z$ heeft rest A, er zijn geene resten B, alle overige resten zijn van andere typen.

Of door aanvulling van andere Cff. $(16_3, 12_4)$ nog andere stelsels dan de drie genoemde zullen te voorschijn komen, is hiermede natuurlijk geenszins beslist; in elk geval zal B door aanvulling op ten minste ééne wijze tot II voeren, daar ze onder hare resten voorkomt.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt eene verhandeling aan van den Heer M. J. VAN UVEN: „*Algebraische Strahlencongruenzen und verwandte complexe Ebenen als Schnitte derselben.*" In handen gesteld van de Heeren JAN DE VRIES en W. KAPTEYN om daarover in de volgende vergadering verslag uit te brengen.

Sterrekunde. — De Heer JULIUS biedt eene verhandeling aan van den Heer A. BREWSTER JZN.: „*Rotation du Soleil.*" In handen gesteld van de Heeren W. H. JULIUS, E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN en P. ZEEMAN om daarover in de volgende vergadering verslag uit te brengen.

Plantkunde. — De Heer KOORDERS biedt eene verhandeling aan, getiteld: „*Beitrag zur Kenntnis der Flora von Java. II. Die Piperaceae von Java.*"

Voor de Boekerij worden aangeboden door den Heer ZWAARDEMAKER de dissertaties van 1°. A. K. M. NOYONS: „*Over den Autotonus der spieren*" en 2°. W. MULDER: „*Quantitatieve betrekking tusschen prikkel en effect bij het statisch orgaan.*"

De vergadering wordt gesloten.

ERRATUM.

pag. 41 regel 15 v. o. staat $a_{p+1}\,\Delta^{(p)}$; dit moet zijn $(a_p + 1)\,\Delta^{(p)}$.
„ 43 „ 3 „ „ „ Δ'_1; dit moet zijn Δ°_1
Δ'_2; „ „ „ Δ°_2.
„ 158 „ 8 „ b. achter: Wall., voeg bij: var. *minor* K. et V.

(8 October 1908).

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING van Zaterdag 31 October 1908.

Voorzitter (Waarnd): de Heer D. J. KORTEWEG.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 282.

Verslag van de Heeren JAN DE VRIES en W. KAPTEYN over eene verhandeling van den Heer M. J. VAN UVEN: „Algebraische Strahlencongruenzen und verwandte complexe Ebenen als Schnitte derselben", p. 283.

W. VAN BEMMELEN: „Aardstroom-registratie te Batavia" (3de mededeeling), p. 284.

A. A. W. HUBRECHT: „De vroegste ontwikkelingsstadiën van Galeopithecus volans", p. 290.

H. J. HAMBURGER: „De permeabiliteit van bloedcellen voor calcium", p. 290.

A. K. M. NOYONS: „Over de zelfstandigheid van het electrocardiogram tegenover het vormcardiogram". (Aangeboden door de Heeren H. ZWAARDEMAKER en C. A. PEKELHARING), p. 296. (Met één plaat).

J. SCHMUTZER: „De mineralogische en chemische samenstelling van eenige gesteenten uit het Müller-Gebergte in Centraal-Borneo". (Aangeboden door de Heeren C. E. A. WICHMANN en F. A. H. SCHREINEMAKERS), p. 301.

J. A BARRAU: „Over de combinatorische opgave van STEINER". (Aangeboden door de Heeren D. J. KORTEWEG en JAN DE VRIES), p. 318.

A. F. HOLLEMAN en J. J. POLAK: "Over de bromeering van toluol", p. 326.

O. POSTMA: „Over de kinetische afleiding van de Tweede Hoofdwet der Thermodynamica", (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en J. D. VAN DER WAALS), p. 330.

W. VOIGT: „Einige Bemerkungen über die Leidener Beobachtungen des ZEEMAN-Effectes bei tiefen Temperaturen". (Aangeboden door de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en H. A. LORENTZ), p. 342.

N. L. SÖHNGEN: Ureumsplitsing bij afwezigheid van eiwitten". (Aangeboden door de Heeren M. W. BEIJERINCK en S. HOOGEWERFF), p. 348.

P H. SCHOUTE: „Over groepen van polyeders met diagonaalvlakken afgeleid uit polytopen", p. 361. (Met één plaat).

J. D. VAN DER WAALS: „Bijdrage tot de theorie der binaire mengsels". X, p. 375.

J. D. VAN DER WAALS Jr.: „Over de wet der moleculaire attractie bij electrische dubbelpunten" (Naschrift). (Aangeboden door de Heeren J. D VAN DER WAALS en P. ZEEMAN), p. 391.

C. WINKLER en D. M. VAN LONDEN: „Over de functie van de ventrale kerngroep in den thalamus opticus van den mensch", p. 393. (Met één plaat).

M. STUYVAERT: „Sur certaines courbes gauches du sixième ordre". (Aangeboden door de Heeren JAN DE VRIES en H. DE VRIES), p. 400.

Aanbieding eener verhandeling van den Heer J. F. VAN BEMMELEN: „Ueber den Unterschied zwischen Hasen- und Kaninchenschädel", p. 407.

Aanbieding van een boekgeschenk, p. 407.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Bericht van de Heeren H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN, ROSENBERG, WIND en KOORDERS dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 3 October 1908 ter begeleiding van een schrijven van den Minister van Buitenlandsche Zaken waarin om advies gevraagd wordt over een door het uitvoerend comité voor het Internationaal Poolonderzoek uitgesproken wensch om de namen kenbaar te maken van de afgevaardigden der Regeering. De Heer VAN DER STOK heeft op verzoek van het Bestuur een concept antwoord opgesteld, hetwelk wordt voorgelezen en goedgekeurd.

3°. Missive van Z.Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 3 October 1908, waarbij bericht wordt dat aan den Heer A. H. BLAAUW, doctorandus in de Plant- en Dierkunde te Utrecht ook een rijkstoelage verleend is om met de inkomsten uit het Buitenzorg-fonds te dienen voor de voortzetting zijner studiën aan het Botanisch Station te Buitenzorg, benevens bericht van den Heer BLAAUW dat hij van voornemen is in den zomer van 1909 naar Buitenzorg te vertrekken.

4°. Brief van Administrateuren van het P. W. KORTHALS-fonds waarbij zij bericht geven hunne goedkeuring te hechten aan het voorstel der Afdeeling om de dit jaar beschikbare *f* 600.— uit genoemd fonds aan te wenden ten behoeve van den Heer J. BOLDINGH, doctorandus in de plant- en dierkunde te Utrecht, voor een reis naar de eilanden Curaçao, Aruba en Bonaire. Dit bedrag is sedert ontvangen en zal ter beschikking gesteld worden van genoemden heer.

5°. Bericht van den Heer HUGO DE VRIES dat hij bereid is de Akademie te vertegenwoordigen bij de herdenking van het eeuwfeest van CHARLES DARWIN op 22—24 Juni 1909 te Cambridge.

6°. Uitnoodiging van den Voorzitter van het Congresso di Matematica e Fisica te Faenza dat de Akademie zich zal doen vertegenwoordigen bij de herdenking van het 3de eeuwfeest van E. TORRICELLI op 24—25 October 1908. Is met een telegram van gelukwensch beantwoord.

7°. Schrijven van den Heer A. BREWSTER Jzn. waarin deze zijne in de vorige vergadering aangebodene verhandeling terugtrekt, daar zij wegens den ongunstigen finantieelen toestand der Akademie waarschijnlijk eerst over een jaar ter perse zal kunnen gelegd worden.

De Voorzitter verwelkomt den Heer W. VAN BEMMELEN, Correspondent der Afdeeling, welke voor het eerst de vergaderingen der Akademie bijwoont.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES brengt, ook namens den Heer W. KAPTEIJN, verslag uit over een verhandeling van Dr. M. J. VAN UVEN, getiteld: *„Algebraische Strahlencongruenzen und verwandte complexe Ebenen als Schnitte derselben"*.

Schrijver gaat uit van de verwantschap tusschen twee vlakken welke ontstaat uit een functionale betrekking tusschen twee complexe veranderlijken. Worden overeenkomstige punten door rechten verbonden dan ontstaat een stralencongruentie, welke, als de bedoelde vlakken evenwijdig zijn, o.a. de eigenschap vertoont, dat elk paar evenwijdige doorsneden een functionale betrekking tusschen twee nieuwe veranderlijken bepaalt, terwijl de nieuwe functie nauw samenhangt met de oorspronkelijke.

In de eerste vijf hoofdstukken worden enkele typen van stralencongruenties uitvoerig behandeld, terwijl het laatste hoofdstuk de betrekking tusschen twee veranderlijken tracht te bepalen, die met een gegeven congruentie samenhangt.

Het eerste hoofdstuk handelt over de te bezigen coordinatenstelsels en notaties. Het tweede levert een onderzoek naar de congruenties bepaald door de functionale betrekkingen $zw = 1$ en $z = w^2$. Nadat in het derde hoofdstuk een algebraische bewerking is uiteengezet welke de komende berekeningen overzichtelijk doet zijn, levert het vierde hoofdstuk de behandeling der congruenties behoorende bij $z = w^n$ en $z = w^{-n}$, waar n een rationaal getal beteekent. Het vijfde hoofdstuk geeft een toepassing op de gevallen $n = 3$, $n = \frac{3}{2}$ en $n = -2$.

In het laatste hoofdstuk beschouwt de schrijver de algemeene quadratische vergelijking in haar verband met de congruenties $zw = 1$ en $z = w^2$. En ten slotte wordt de kubische vergelijking onderzocht, waarbij in het bijzonder de vergelijking $z^2 = aw^3 + bw + d$ wordt behandeld.

Schrijver heeft getracht zijn onderwerp zoo volledig mogelijk te bewerken, en is daarin, naar wij meenen, ten volle geslaagd. Bij het onderzoek der stralencongruenties vinden wij b.v. een grondig onderzoek van de axiale regelvlakken van gegeven rechten en van de regelvlakken der stralen, welke op een kegelsnede rusten. Ons oordeel is, dat deze arbeid van Dr. VAN UVEN ten volle verdient, in de werken der Akademie te worden opgenomen.

Geophysica. — De Heer VAN DER STOK biedt eene mededeeling aan van den Heer W. VAN BEMMELEN over: *„Aardstroom-registratie te Batavia"*. (3de mededeeling).

(Medegedeeld in de vergadering van 26 September 1908).

In de vorige mededeeling omtrent mijn aardstroommetingen op Java sprak ik de verwachting uit, weldra meer licht te kunnen verschaffen omtrent de abnormale intensiteit van den aardstroom tusschen Anjer en Batavia gevonden.

Inderdaad heb ik mijn voornemen om den stroom te meten tusschen Batavia en eenige andere plaatsen in de residenties Bantam en Batavia kunnen uitvoeren, dank zij de welwillende medewerking van den Hoofdinspecteur der Staatssporen, die mij het nachtelijk gebruik van de spoortelegraaflijnen toestond.

Om een nauwkeurige contrôle op de nieuwe uitkomsten te verkrijgen, heb ik naast den aardstroom door de spoortelegraaflijn stroomende, dien tusschen Batavia en Anjer met de vroeger gebruikte directe telegraaflijn opgevangen en geregistreerd, en tevens de aardmagnetische N-Z component laten opteekenen.

De plaatsen, met welke ik door middel van de spoortelegraaflijn verbinding heb gekregen, zijn:

Laboean, aan Java's Westkust 32 km. Z.Z.W. van Anjer gelegen.

Serang op 28 km. Oost van Anjer gelegen.

Rangkas Betoeng op 46 km. Oost van Laboean gelegen. Tusschen Anjer, Serang, Rangkas Betoeng en Laboean verheft zich een vulkanisch gebergte met den vulkaan Karang (1780 M.) als hoogste top.

Tangerang	21 km.	W.	van	Batavia	gelegen
Bekassi	20 „	O.Z.O.	„	„	„
Krawang	54 „	O.Z.O.	„	„	„

De richtingen en afstanden der plaatsen ten opzichte van Batavia (observatorium) zijn:

Batavia—Anjer	W	5 N.
„ Laboean	W	12 Z.
„ Serang	W	4 N.
„ Rangkas Betoeng	W	17 Z.
„ Tangerang	W	1 Z.
„ Bekassi	O	17 Z.
„ Krawang	O	14 Z.

Tot beter begrip van de hier mede te deelen uitkomsten omtrent den aardstroom tusschen Batavia en bovengenoemde plaatsen, wil ik in het kort de vroeger gevonden uitkomsten memoreeren.

Bij alle aardstroommetingen heb ik steeds de variaties in de intensiteit van den stroom vergeleken met die, welke gelijktijdig in de aardmagnetische component optraden.

Die aardmagnetische component was altijd de horizontale ontbondene in de richting loodrecht op de verbindingslijn der twee eindstations. De variaties der magnetische component werden gemeten in absolute maat, die van den aardstroom werden bepaald door het potentiaalverschil per Kilometer, dat noodig zou zijn om een even groote variatie in den aardstroom tusschen de twee eindstations te veroorzaken, als door den galvanometer werd aangegeven.

Hierbij werd dus in het midden gelaten of bij de variaties van den aardstroom die potentialen aan de twee eindpunten in werkelijkheid optraden.

Uit de verkregen diagrammen bleek, dat vooral voor den aardstroom tusschen ongeveer Oost en West van elkaar gelegen plaatsen, iedere schommeling in den aardstroom aan een gelijktijdige overeenkomstige schommeling van de N.Z. gerichte magnetische component beantwoordde, maar dat voor N.Z. gelegen plaatsen de overeenstemming met de O.W. component der aardmagneetkracht veel geringer was.

Het verband tusschen de overeenkomstige schommelingen van stroom en magneetkracht was dusdanig, dat die van den aardstroom, met een zeker phaseverschil aan die der magneetkracht voorafgingen en relatief in amplitudo toenamen als de duur van de schommeling afnam.

Quantitatief vertoonden die twee verhoudingen van phase en amplitudo een groot verschil voor de noordkustvlakte en het vulkanische Zuidgedeelte van Java; voornamelijk wat de amplitudo aanging.

In de Noordkustvlakte was n.l. de aangroeiing van den aardstroom bij korter worden van den duur der schommeling veel geringer, zooals uit de volgende cijfers blijkt

Gemiddelde halve duur van de schommeling	Amplit. v/d aardstroom in volt. per KM. / Amplit. v/d magn. compon. in absol. maat.	
	Noord-Java Batavia-Cheribon	Zuid-Java Buitenzorg-Tasik Melaja
0.5 minuut	21.2	59.0
1.2 „	20.5	55.0
9,0 „	16.5	15.0

Terwijl de aardstroom tusschen Semarang en Cheribon en ook tusschen Semarang en Soerabaja hetzelfde type als die tusschen Batavia en Cheribon bleek te bezitten, was dit ook wel het geval met den stroom tusschen Anjer en Batavia, alleen met dat onderscheid, dat de amplitudines der schommelingen ruim viermaal grooter werden gevonden. Daar volgens speciaal met dat doel uitgevoerde experimenten aan de realiteit van dit verschijnsel niet viel te twijfelen, lag het voor de hand om in de eerste plaats na te gaan hoe of de stroom tusschen Batavia en *andere* plaatsen, gelegen tusschen Anjer en Cheribon, zich gedroeg.

In Maart en April van dit jaar heb ik deze metingen verricht en heb daartoe voor iedere station, in verbinding met Batavia, gedurende eenige nachten de aardstroomvariaties samen met die van Anjer-Batavia, alsmede van de aardmagnetische N.Z. component, laten registreeren.

Aardmagnetische O—W Component		Aardstroom				
Halve duur van de schommeling	Amplitudo	Amplitudo v/d. aardstr. in V.p. KM. Amplit. v/d. magneetkr. in absol. maat				Ampl. Btv.-Anjer / Ampl. Btv.-Station
1 3 min.	1.2γ	Batavia—Laboean	71	Batavia—Anjer	83	1.2
7.3	2 8	„ „	60	„ „	62	1.1
0 5	1.6	Batavia—Serang	86	„ „	97	1.1
2.0	0.9	„ „	66	„ „	75	1.1
9.6	3 3	„ „	57	„ „	68	1.2
0.9	0.5	Batavia—Rangkas Betoeng	80	„ „	82	1.0
10 0	1.2	„ „ „	52	„ „	47	0.9
0.5	1.0	Batavia—Tangerang	49	„ „	97	2.1
6 2	0.8	„ „	39	„ „	82	2 0
0 5	0 9	Batavia—Bekassi	47	„ „	89	1.9
13 7	7.5	„ „	43	„ „	57	1.3
0 7	0.4	Batavia—Krawang	25	„ „	93	3.7
13.7	2 8	„ „	25	„ „	72	3.6
		Batavia—Cheribon				4.2

Op de verkregen diagrammen heb ik vervolgens de amplitudines van een aantal schommelingen van korter en langer duur uitgemeten.

Hieronder volgen de gemiddelde waarden, waarbij voor ieder geval de verhouding met den Batavia-Anjer stroom is gevoegd

Uit de verhoudingsgetallen in de laatste kolom blijkt ten eerste, dat voor ieder geval die verhouding voor korter- en langerdurende schommelingen zeer weinig verschilt.

(Alleen Btv.-Bekassi met 1.9 en 1.3 maakt daarop een uitzondering). Dat wil zeggen, dat de aardstroom ook voor streken tusschen Anjer en Cheribon gelegen het vroeger gevonden type — dat Noordkustvlakte-type zou genoemd kunnen worden — draagt. Uit die getallen blijkt verder, dat de aardstroom geleidelijk toeneemt, wanneer men Batavia respectievelijk met meer Westelijk gelegen plaatsen verbindt.

Stellen we den aardstroom tusschen Batavia en Cheribon 1.0, dan is voor kortdurende schommelingen :

		Ampl. aardstr.
Batavia—	Cheribon	1.0
„	Krawang	1.1
„	Bekassi	2.2
„	Tangerang	2.0
„	Rangkas Betoeng	4.2
„	Serang	3.8
„	Anjer	4.2
„	Laboean	3.5

Stellen wij nu, dat bij het optreden van eene zekere verandering in de aardmagneetkracht (tengevolge van een kortdurende schommeling) een potentiaal-verval tusschen Batavia en Cheribon ontstaat van 1 volt per km., waardoor een gelijktijdige aardstroom-verandering ontstaat. We kunnen dan met bovenstaande getallen berekenen welke de potentialen op de andere plaatsen zullen worden.

Die worden n.l. — als wij den potentiaal te Cheribon nul stellen — :

Laboean	595	volt
Anjer	645	„
Serang	496	„
Rangkas Betoeng	481	„
Tangerang	212	„
Batavia	200	„
Bekassi	156	„
Krawang	141	„
Cheribon	0	„

Hieruit volgen de volgende potentiaalgradienten :

Tusschen	Potent. gradient	Geologische formatie.
Anjer en Serang	5.3	Jong vulkanisch
Serang en Tangerang.	4.5	Kwartair
Rangkas Betoeng en Tangerang	4.1	Kwartair
Tangerang en Bekassi	2.1	Kwartair en alluviaal
Bekassi en Krawang	0.4	Alluviaal
Krawang en Cheribon	1.0	Kwartair en alluviaal
Cheribon en Semarang	0.9	Kwartair en kalk
Semarang en Soerabaja	1.1	Kwartair, kalk en alluviaal.

In de laatste kolom van bovenstaande tabel heb ik aangegeven, welke bodemsoorten volgens den geologischen atlas van VERBEEK en FENNEMA op de verschillende trajecten worden ontmoet.

Het valt niet te miskennen, dat er verband schijnt te bestaan tusschen gradient en bodemsoort; in dien geest n.l. dat de gradient in het alluviaal het geringste is, in kwartair grooter en in het vulkanische gesteente het grootst. Die opvolging nu komt mij geenszins onwaarschijnlijk voor.

Ik vond ook voor de vulkanische Preanger voor kortdurende schommelingen een hooge waarde, n.l. 3; maar hier treedt het andere type van amplitudo-verhouding op en is die gradient voor langzame schommelingen weer klein, n.l. ongeveer één.

De bodemsoorten op de geologische kaart aangegeven, zijn die, aan de oppervlakte aangetroffen. Op relatief geringe diepte zullen die grenzen zeker anders zijn. Het bovenaangevoerde verband tusschen bodemsoort en potentiaalgradient wijst er dus op, dat de gemeten aardstroomen ook oppervlakkige stroomen zijn. Dat ze dientengevolge in een bergland een ander karakter dragen dan in de vlakte, kan geen verwondering baren, al is het mij onmogelijk te verklaren, waarom dat karakter nu juist zóó is, als werd gevonden.

Alles wijst er op, dat de volgende stap in dit onderzoek zou moeten zijn, het brengen van de aardverbindingen op een zekere diepte onder de oppervlakte b.v. één of meer kilometers.

Helaas is dit onmogelijk.

Ik had het plan gevormd daarvoor twee nieuw te boren artesische putten in Serang en Batavia te benutten, maar de overweging, dat de wand dier putten geheel van geleidend ijzer zou zijn en de diepte slechts 0.2 à 0.3 km., bovendien het isolatieverlies op de verbindingslijn groote onzekerheid in de uitkomsten zou teweegbrengen, hebben mij van dit ongetwijfeld moeitevol experiment afgeschrikt.

Het schijnt mij raadzaam de registraties op dezelfde wijze voort te zetten, maar dan in nauwere aansluiting met de geologische gesteldheid van den bodem.

Dr. L. STEINER van Budapest heeft mij opmerkzaan gemaakt op het foutieve van mijn toepassing der formule $A = 0.8 \sqrt[4]{\frac{1}{TM}}$ (zie 1ste mededeeling. Verslag. Vergad. Jan. 25, 1908. pg. 515) op de harmonische termen van den aardstroom Batavia-Cheribon.

Inderdaad is hier een rekenfout in het spel gekomen, die merkwaardiger wijze een schijnbare overeenstemming tusschen de waargenomen waarden en de volgens de formule berekende heeft veroorzaakt.

Dr. STEINER leidde als formule af

$$\frac{A}{M} = 3.9 \frac{1}{T^{0.75}} \text{ of } \frac{A}{M} = 3.9 \frac{T^{0.25}}{T}$$

Hiermede wordt gevonden

	Amplitudo				
	Aardstroom volt. p. KM. $\times 10^{-5}$	Magn. Comp. c. g. s. $\times 10^{-5}$	Aardstroom Magn. comp. Observ.	Aardstroom Magn. comp. Calc.	Δ C—O
A_1	74.6	18.62	4.0	3.9	— 0.1
A_2	43.8	7.63	5.7	6.6	0.9
A_3	27.7	2.96	9.4	8.9	— 0 5
A_4	8.9	0.90	9.9	10.8	0.9
A_5	6.9	0.53	13.0	13.0	0.0
A_6	6.6	0.42	15.7	15.0	— 0.7

Dr. STEINER merkt op, dat deze uitdrukking een zelfde karakter draagt, als de theoretisch door mij afgeleide formule

$$\frac{A}{M} = C \frac{\varrho}{1 + c'} \cdot \frac{1}{T}$$

omdat $1 + c'$ langzaam grooter wordt, bij afnemende T.

Nemen wij bijv. volgens SCHUSTER (Phil. Tr. Vol. 180 p. 496) voor de bolfunctie van de tweede orde voor den dagelijkschen term, $\sigma = 10$, wat beantwoordt aan een specifieken leidingsweerstand van de aarde $\varrho = 3.70 \times 10^{13}$, dan wordt:

δ	$1 + c'$	$\frac{1 + c'}{1.172}$
1	1.019	$0.869 = 0.1^{0.061}$
5	1.093	$0.933 = 0.5^{0.100}$
10	1.172	1.000 —
20	1.278	$1.091 = 2^{0.126}$
30	1.337	$1.141 = 3^{0.120}$
40	1.374	$1.173 = 4^{0.115}$
50	1.399	$1.194 = 5^{0.110}$
100	1.466	$1.251 = 10^{0.097}$

Hier is dus de exponent in maximo 0.126 en nadert dus de boven gevonden waarde 0.25.

Er schijnt dus mogelijkheid te bestaan om het verband tusschen de dagelijksche variatie van aardstroom en magnetische kracht in overeenstemming met de theoretische beschouwing omtrent het ontstaan van den aardstroom te brengen; maar voor de variaties van korten duur is dat niet het geval.

Mijn ophanden zijnde vertrek naar Europa verhindert mij zoowel om thans nader op deze vraagpunten in te gaan, als ook om nieuwe proefnemingen te doen.

Batavia, Augustus 1908.

Dierkunde. — De Heer HUBRECHT doet eene mededeeling over: „*De vroegste ontwikkelingsstadiën van Galeopithecus volans*" en biedt daarover eene verhandeling aan voor de Werken der Akademie.

Physiologie — De Heer HAMBURGER doet een mededeeling over: „*De permeabiliteit van bloedcellen voor calcium*".

Het wordt tegenwoordig wel door niemand meer betwijfeld, dat de roode bloedlichaampjes permeabel zijn voor anionen. Het eerst werd dit voor het chloor door quantitatieve chemische bepalingen vastgesteld [1]) en ook met betrekking tot andere anionen bestaat ten aanzien van het vermogen om door de bloedlichaampjes te dringen geen gegronde twijfel. [2]) Anders is het gesteld met de metaalionen

[1]) HAMBURGER. De permeabiliteit der roode bloedlichaampjes in verband met de isotonische coefficiënten. Versl. en Meded. d. Koninkl. Akad. v. Wetensch. Afd. Natuurk. 3e R. Dl. VII, 1889. — Over den invloed der ademhaling op de permeabiliteit der bloedlichaampjes. Ibid. Dl. IX, 1891. — Zeitschr. f. Biologie **26** 1889 S. 414; 1892 S. 405.

[2]) HAMBURGER. Verslag. d. gewone Vergad. d. Kon. Akad. v. Wetensch. 27 Oct. 1900. HAMBURGER und VAN LIER. Archiv f. (Anat. u.) Physiol. 1902 S. 492.

of kationen. Algemeen is men van oordeel, dat voor dezen de bloedlichaampjes volstrekt ondoordringbaar zijn. Het schijnt, dat die meening gegrond is op een experiment van GÜRBER [1]). Deze onderzoeker leidde door een suspensie van roode bloedlichaampjes in een keukenzoutoplossing, koolzuur en vond toen, dat wel chloor in de bloedlichaampjes binnendrong maar dat het kalium- en natriumgehalte van bloedlichaampjes en vloeistof onveranderd bleef. Voor beide kationen zouden dus de bloedlichaampjes ondoordringbaar zijn en men heeft zich des te eerder bij die opvatting aangesloten, omdat in normale omstandigheden het kalium zich in de bloedcellen, het natrium zich in het serum bevindt. Stilzwijgend schijnt men nu de ondoordringbaarheid van roode bloedlichaampjes voor natrium en kalium ook op de andere kationen te hebben uitgestrekt en verschillende schrijvers hebben zich nog in den allerlaatsten tijd in dien zin uitgesproken [2]).

Onderzoekingen, uitgevoerd in gemeenschap met HEKMA over den invloed van verschillende stoffen en vooral van geringe hoeveelheden calcium op de phagocytose, hebben echter genoemde opvatting bij mij aan het wankelen gebracht. Wanneer men ziet, dat sporen Ca in staat zijn de phagocytose, en zooals ik later nog constateerde de chemotaxis, in hooge mate te bevorderen, dan vraagt men zich af, of hier niet een indringen van Ca in de witte bloedlichaampjes plaats heeft.

Nu kan echter van zulk een indringen het strikte bewijs slechts geleverd worden worden door quantitatief-chemische bepalingen. Maar men stuit hier op het bezwaar, dat witte bloedlichaampjes in groote hoeveelheid moeilijk zijn te verkrijgen. Dit bezwaar bestaat niet bij de roode, en aangezien deze tot dusverre nooit eenig verschil in permeabiliteit met die der witte hebben getoond, scheen het aanbevelenswaardig om het vraagstuk bij de laatste te onderzoeken.

Wij zijn tot dit doel op verschillende wijzen te werk gegaan. Vooreerst werden roode bloedlichaampjes, na uitgewasschen te zijn met een isotonische rietsuikeroplossing, vermengd met NaCl-soluties, en het bleek toen, dat in deze zoutoplossingen Ca was overgegaan. Men zou tegen deze proeven het bezwaar kunnen opperen, dat de roode bloedlichaampjes door uitwassching in een suikeroplossing, niet

---

1) GÜRBER. Sitzungsber. d. med. physik. Gesellsch. zu Würzburg 25 Febr. 1895.

2) Vergl. bijv. HÖBER in het Handboek van VON KORANYI und RICHTER, 1907. S. 287 und 288.

3) HAMBURGER en HEKMA, Zittingsversl. der Koninkl. Akad. v. Wetensch. 29 Juni 1907.

meer in een physiologischen toestand verkeerden en daardoor permeabel waren geworden voor Ca.

Daarom werden de proeven op een andere wijze herhaald, en wel zoo, dat aan het bloedvocht geringe hoeveelheden van stoffen werden toegevoegd, die ook onder normale omstandigheden daarin voorkomen.

In de eerste plaats voegden wij aan het bloed 0.024°/₀ en 0.012°/₀ $CaCl_2$ toe. Vervolgens werden serum en bloedlichaampjes op hun Ca-gehalte onderzocht en dit vergeleken met het Ca-gehalte van serum en bloedlichaampjes van het oorspronkelijke bloed. Ging er geen Calcium in de bloedlichaampjes over, dan moest het toegevoegde Ca geheel in het serum worden teruggevonden. Ging een deel in de bloedlichaampjes over, dan moest ook dit blijken en als contrôle kon dan nagegaan worden, in hoeverre de gezamenlijke vermeerdering van het calciumgehalte in bloedlichaampjes en serum, met het toegevoegde Ca overeenkwam.

Wij laten hier een tabel volgen, die zonder nadere verklaring wel duidelijk zal zijn. In deze tabel is tevens opgenomen een experiment, dat de vraag beantwoordt of roode bloedlichaampjes, die uit een met Ca bedeeld serum calcium hebben opgenomen, dit weer afstaan, wanneer zij wederom in hun normaal serum worden teruggebracht, m. a. w. of de bloedlichaampjes ook voor calcium *extrameabel* zijn.

Tot goed begrip van deze tabel zij nog opgemerkt, dat de bepalingen van het calcium zijn verricht, door na verbranding van de ingedroogde massa's de asch met verdund zoutzuur uit te trekken en bij het waterheldere filtraat alkohol en H_2SO_4 te voegen. Het calcium wordt dan als $CaSO_4$ neergeslagen. Eindelijk zij nog opgemerkt, dat in deze proeven 80 ccm. runderbloed werden gebruikt en dat daarin voorkwamen 32.4 ccm. bloedlichaampjes en 47.6 ccm. serum.

(1). 32.4 cc. *bloedlichaampjes van met* 0.024°/₀ *$CaCl_2$ vermengd* bloed, leveren na uitwasschen met rietsuikeroplossing **0.0458** gr. $CaSO_4$.

(2). 32.4 cc. *bloedlichaampjes van met* 0.024°/₀ *$CaCl_2$ vermengd* bloed, leveren na uitwasschen met serum en daarna met rietsuikeroplossing . . . . . **0.0361** gr. $CaSO_4$.

3). 32.4 cc. *bloedlichaampjes van normaal* bloed, leveren na uitwasschen met rietsuikeroplossing . . . **0.0354** gr. $CaSO_4$.

(4). 32.4 cc. *bloedlichaampjes van met* 0.012°/₀ *$CaCl_2$ vermengd* bloed leveren na uitwasschen met rietsuikeropl. . **0.0398** $CaSO_4$.

(5). 47.6 cc. *Serum van het met* 0.024°/₀ *$CaCl_2$ vermengde* bloed leverden . . . . . **0.0492** gr. $CaSO_4$.

(6). 47.6 cc. *Serum van het met* 0.024°/₀ *$CaCl_2$ vermengde* bloed leverden . . . . . **0.0492** gr. $CaSO_4$.

(7). 47.6 cc. van het normale oorspronkelijke serum leverden . . . . . **0.0369** gr. $CaSO_4$.

(8). 47.6 cc. *Serum van het met* 0.012°/₀ *$CaCl_2$ vermengde* bloed leverden. . . . . **0.0437** gr. $CaSO_4$.

(9). 47.6 cc. Serum, waarbij dezelfde hoeveelheid $CaCl_2$ gevoegd was als bij de overeenkomstige 80 cc. bloed, zooals sub (1) en sub (5) en (6) leveren . . . . . **0.0596** gr. $CaSO_4$.

Bestudeert men de cijfers van deze tabel, dan blijkt duidelijk:

1°. *dat Ca in de boedlichaampjes is binnengedrongen* (Vergel. (3) met (1) en (4);

2°. *dat de bloedlichaampjes dit binnengedrongen Ca weer afgeven, wanneer zij in normaal serum worden teruggebracht* (Vergel. (3) met (1) en (3)

3°. *dat het aan het bloed toegevoegde calcium, in bloedlichaampjes en serum weer geheel wordt teruggevonden.*

Tevens leert deze tabel, dat in de bloedlichaampjes ook van het normale bloed, Ca voorkomt (Vergel. (3)).

Het laatste strijdt met de algemeen verspreide meening, dat in het bloed het calcium uitsluitend in het serum gevonden wordt. Zoo vindt men b.v. in de bekende tabellen van ABDERHALDEN over de quantitatieve analysen van verschillende bloedsoorten, overal een afwezigheid van Ca in de bloedlichaampjes aangegeven, en in het boek van FRÄNKEL: „Descriptive Biochemie" pag. 557 leest men: „Das Calcium ist lediglich im Serum enthalten."

Wat kan de oorzaak van deze tegenspraak zijn? Wij gelooven, dat deze gelegen is in de methode van quantitatieve bepaling van het calcium. Gelijk bekend is heeft men dit metaal of als oxalaat of als sulphaat bepaald en men scheen dan stilzwijgend van de onderstelling uit te gaan, dat deze verbindingen geheel of nagenoeg geheel onoplosbaar zijn in de vloeistoffen, waarin zij ontstaan. Dit nu is geenszins het geval en doet zich vooral gelden, wanneer het volume der vloeistof aanzienlijk is. Door nauwkeurige bepalingen van de oplosbaarheid van calciumsulfaat in zuren alcohol, heb ik mij er van overtuigd, dat naast een zwakke troebelheid, die men na een 24 uren steeds te zien krijgt, een groot deel van het $CaSO_4$ opgelost blijft.

Houdt men met die oplosbaarheid rekening, dan blijkt, dat de bloedlichaampjes wel degelijk een niet te verwaarloozen hoeveelheid Ca bevatten en de cijfers in de zooeven gegeven tabel toonen dit duidelijk aan.

Nog een andere methode werd toegepast om de permeabiliteit voor calcium te onderzoeken.

Indien de meermalen door J. Loeb en anderen uitgesproken doch nimmer bewezen opvatting juist is. dat wanneer een NaCl-solutie aan cellen wordt toegevoegd, een uitwisseling plaats grijpt tusschen natrium-ionen van het chloornatrium en andere kationen van de cellen, dan mag men verwachten, dat toevoeging van NaCl aan het bloedserum, een overgang van calciumionen uit de bloedcellen naar het serum zal tengevolge hebben. Om dit te onderzoeken, werd aan het bloedserum van een bekende hoeveelheid bloed 0.1 % en 0.16 % NaCl toegevoegd, vermeerderingen, welke ook in het normale en à fortiori in het pathologische leven voorkomen, en die, gelijk wij vroeger waarnamen, het leven der phagocyten onaangetast lieten (Hamburger en Hekma, l. c.). Vervolgens werd in het serum het calciumgehalte bepaald en dit vergeleken met dat van het oorspronkelijke bloed. Het calciumgehalte werd hier bepaald door toevoeging van ammoniumoxalaat en meting van het volume van het calciumoxalaat in trechtervormige capillaire buisjes.

Het resultaat der Ca-bepalingen voldeed echter geenszins aan de verwachting. Inplaats dat het gehalte toegenomen was bleek een afneming aanwezig te zijn, gelijk de laatste kolom van het volgende tabelletje leert.

Na Cl toegevoegd aan het serum.	Verdunning van het serum.	Vermindering van het Ca-gehalte van het serum.
0.1 %	9.6 %	21.8 %
0.16 %	12.2 %	29.5 %

Waaraan was die afneming toe te schrijven?

Wellicht aan de verdunning, die het serum had ondergaan, doordien het hyperisotonisch gemaakte serum aan de bloedlichaampjes water had onttrokken? In de tweede kolom is de graad van die verdunning in procenten aangegeven. Waren deze nu geheel aansprakelijk voor de procentische afneming van het Ca-gehalte dan moesten de cijfers van beide kolommen geheel overeenstemmen. Gelijk men ziet, is dit niet het geval en is het calciumgehalte van het serum meer afgenomen, dan met de verdunning overeenkomt. Men moet daaruit besluiten, dat onder den invloed van NaCl calcium in de bloedlichaampjes is overgegaan.

Daarvoor scheen mij geen andere verklaring mogelijk dan deze, dat in de bloedlichaampjes, tengevolge van het waterverlies, een wijziging in de dissociatie had plaats gehad, en dat deze wijziging voor

het verschijnsel moest aansprakelijk gesteld worden. Was dit het geval, dan moest ook toevoeging van een isosmotische hoeveelheid van een niet-elektrolyt aan het serum, b.v. van rietsuiker, eveneens een overgang van Ca naar de bloedlichaampjes tengevolge hebben, ja zelfs moest dan de afneming van calciumgehalte nog grooter zijn dan bij toevoeging van NaCl. Immers in de gemaakte onderstelling moest een deel van de toegevoegde Na-ionen calcium naar het serum lokken.

Zoo werden dan de volgende mengsels vervaardigd:

1	100	serum	+	0.1	gr.	NaCl.
2	100	„	„	0.2	„	„
3	100	„	„	0.3	„	„
4	100	„	„	0.884	„	rietsuiker
5	100	„	„	1.76	„	„
6	100	„	„	2.55	„	„

Van deze zes oplossingen, en voor de vergelijking ook van normaal serum, werden 20 cc. bij 20 cc. van dezelfde bloedlichaampjes gevoegd. Na vermenging werden de suspensies een uur aan zichzelf overgelaten en werd in het serum het calciumgehalte bepaald.

In de volgende tabel zijn de uitkomsten samengevat.

	Volume van het Ca-oxalaat.	Procentische daling van het Ca in het serum.
Onvermengd serum.	39	
1. serum + 0.1 % Na Cl	33	15.3 %
2. „ „ 0.2 „ „ „	29	25.6 %
3. „ „ 0.3 „ „ „	25	36. %
4. „ „ 0.884 „ rietsuiker	30	23 %
5. „ „ 1.76 „ „	28	28.3 %
6. „ „ 2.55 „ „	22	43.6 %

Bestudeert men deze tabel, dan blijkt ten duidelijkste, dat inderdaad door toevoeging van rietsuiker, een aanzienlijke overgang van calcium uit de bloedlichaampjes naar het serum heeft plaats gehad, en verder dat in overeenstemming met ons vermoeden, de isosmotische NaCl-oplossingen een ietwat geringeren overgang bewerkten.

De hoofdoorzaak voor den overgang van Ca naar de bloedlichaampjes bij toevoeging van een stof aan het serum moet dus gezocht

worden in een waterverlies, dat de bloedlichaampjes daardoor ondergaan, m. a. w., *verhooging van osmotische drukking van het bloedvocht veroorzaakt een overgang van Ca naar de bloedlichaampjes.*

Wordt de verhooging van de osmotische drukking veroorzaakt door een zout (electrolyt) dan heeft daarnaast een tegenovergestelde beweging van het calcium plaats en wel onder den invloed van het kation van het zout; doch deze beweging is van veel geringeren omvang.

In dit verband zij nog gewezen op het feit, dat ook het phagocytaire vermogen in aanzienlijke mate benadeeld wordt reeds door geringe verhooging van osmotische drukking van het medium, en dat de aard van de stof, waardoor die verhooging van osmotische drukking verkregen wordt, weliswaar niet zonder beteekenis is, maar toch een ondergeschikte rol speelt. [1])

Uitvoeriger mededeelingen over de in dit opstel besproken onderzoekingen zullen elders verschijnen.

Physiologie. — De heer ZWAARDEMAKER biedt eene mededeeling aan van den heer A. K. M. NOYONS, adsistent bij het Physiol. Lab. te Utrecht: *„Over de zelfstandigheid van het electrocardiogram tegenover het vorm-cardiogram".*

(Mede aangeboden door den Heer C. A. PEKELHARING).

Voornamelijk door de onderzoekingen van ENGELMANN [2]) en MARCHAND [3]) heeft men de electromotorische verschijnselen, die bij elk contraheerend hart optreden en die we in het electrocardiogram tegenwoordig vastleggen, kunnen terugbrengen tot uitingen van den veranderenden actiestroom, die in elk musculeus weefsel kan verwekt worden door indirecte of directe prikkeling van spierelementen.

Doordat de contractie gewoonlijk als de eenig zichtbare manifestatie geldt van de spierprikkeling en spieractie, heeft men onwillekeurig het electrische phenomeen zich gebonden gaan denken aan dit contractieproces. Op theoretische gronden achtte BIEDERMANN [4]) het echter reeds zeer wel denkbaar, „dasz eine Muskelstelle erregt ist und daher „sich negativ zu benachbarten, ruhenden Stellen verhält, ohne dabei „in merklichem Grade contrahirt zu sein". In deze theoretische overwegingen ligt de kern van mijn onderzoek vastgelegd. Het

[1]) HAMBURGER en HEKMA. Zittingsverslag der Koninkl. Akad. v. Wetensch. 29 Juni 1907.

[1]) ENGELMANN. PFLÜGER's Archiv, Bd. XVII 1878.

[2]) MARCHAND, PFLÜGER's Archiv, Bd. XVI 1877 en XVII 1878.

[3]) BIEDERMANN W., Elektrophysiologie, Jena, 1895, pag. 322.

experiment leert nu, dat deze opvattingen overeenkomstig de werkelijkheid zijn.

Reeds in mijn proefschrift [1]) heb ik naar aanleiding van eenige proeven de veronderstelling uitgesproken, dat het electrische verschijnsel bij het zich contraheerend hart een eigen proces vertegenwoordigt. Daarvoor pleiten de volgende proeven.

Het bloot gelegde hart van eene Anodonta fluviatilis wordt in situ door middel van de onpolariseerbare magazijnelectroden afgeleid naar den snaargalvanometer. (De electroden hebben met haar katoenpitten eerst gedurende een kwartier in leidingwater gestaan en daarna in de pericardvloeistof van den mossel).

De snaargalvanometer van EINTHOVEN met permanenten magneet (EDELMANN's klein model) wordt gevoed met een stroom van 4 volt bij matige snaarspanning (38 van de 60 deelstrepen). De bewegingen van het hart worden geregistreerd door een hefhoompje met steunplaatje en verticaal op de as geplaatst strootje, dat een schaduwbeeld op de spleet van het registratie-apparaat werpt. De registratie geschiedt langs photographischen weg.

Het hart voert, blijkens de eerste helft van figuur 1 regelmatige contracties uit, die gepaard gaan met electrische schommelingen, welke iets eerder beginnen.

Ter plaatse van het kruisje worden op het hart 3 gutt. eener 3 % KCl-oplossing gedroppeld, hetgeen na eenigen tijd stilstand van het vorm-cardiogram tengevolge heeft, terwijl het electrisch verschijnsel gewijzigd wordt. Kort na de KCl-toediening zijn er nog zwakke bewegingen van het hart aan het hefhoompje waarneembaar, doch weldra houden deze op, terwijl de electrische schommelingen, die in den beginne van het chemisch prikkelingsproces eerst klein geworden waren, nu weer bijna haar oorspronkelijke grootte hebben bereikt.

In figuur 2 ziet men het stilstaan van het hart, terwijl het electrocardiogram blijft voortbestaan.

Bij een ander proefobject (Anodonta fluviatilis) werden behalve de reeds beschrevene, nog andere eigenaardigheden waargenomen. Toen het hart door de inwerking der chemische stoffen stil was gaan staan, bleef het electrisch verschijnsel met de gewone frequentie der hartscontracties telkens periodiek optreden. Maar behalve deze periodiek kon men zeer duidelijk ontwaren, dat in deze rhytmische electrische verschijnselen onderling weer groepvormingen voorkwamen, die nagenoeg eenzelfden periode-duur bezaten als de periodieke lengte-schommelingen van den autotonus, welke vóór den stilstand

[1]) NOYONS A. K. M., Proefschrift: Over den autotonus der spieren, Utrecht 1908.

van het vorm-cardiogram ook reeds duidelijk waarneembaar waren geweest in het vormcardiogram.

Ook bij andere dieren had ik gelegenheid gegevens te verzamelen voor de zelfstandigheid van het electrocardiogram tegenover het vormcardiogram. De volgende proef demonstreert zulks fraai aan het hart van Tripodonotus natrix onder digitonine-vergiftiging. Het hart van een ringslang werd 29 Mei 's middags gepraepareerd. Na blootlegging en vaatonderbinding werd het hart uitgesneden, op een kurkplaat gefixeerd, terwijl hartsbasis en ventrikelpunt werden afgeleid naar den snaargalvanometer als boven beschreven. De bewegingen van voorhof en ventrikel werden volgens de suspensie-methode geregistreerd. Figuur 3 geeft de photografische registratie van het vormcardiogram en electrocardiogram bij het onvergiftigd hart.

Nadat aan het hart dien eigen middag 5 gutt. 1 °/₀ digitonine opgelost in 0,9 °/₀ NaCl zijn toegevoegd, ziet men na eenigen tijd de typische verschijnselen der digitonine-intoxicatie optreden. Den volgenden dag vertoont het hart geen vorm-veranderingen meer, tenzij door eenige kunstgrepen (afspoelen met 0.9 °/₀ NaCl en opdroppelen van 5 gutt. CaCl 1 °/₀ en 3 gutt. KCl 3 °/₀). 's Avonds om 11.30 staat het hart geheel stil. Desniettegenstaande gaat het electrisch phenomeen rustig rhythmisch door. Deze toestand duurt voort tot den 31sten Mei. Steeds vertoont het electro-cardiogram den gewonen spontanen rhythmus. Nu wordt opnieuw 1 °/₀ digitonine rijkelijk op het hart gedroppeld, hetgeen een duidelijk effect op het electrisch verschijnsel ten gevolge heeft. Dit effect gelijkt naar den vorm vrij getrouw op de electrische wijzigingen van het electrodiogram, die reeds eenige dagen te voren opgewekt werden door bedroppeling van het hart met dezelfde stof. Men zie hiervoor figuur 4.

Dat de afwijking van de snaar onder invloed der vergiftiging met digitonine niet een gevolg is van veranderingen van mechanischen of chemischen aard op de contactplaatsen der electroden, leerde mij herhaalde bedroppeling der electroden, toen het hart geheel afgestorven was, waarbij de snaarafwijking uitbleef.

Dien geheelen dag duren de regelmatige, periodische electrische schommelingen nog steeds voort, hoewel ze aldoor afnemen in grootte. *Het blijkt, dat men door stralende warmte en door afkoeling de frequentie en de grootte dier schommelingen respectievelijk kan vergrooten en verkleinen zonder dat men iets van vormveranderingen aan het hart ontwaart.* Den 1sten Juni staat het hart volmaakt stil, ook in electrisch opzicht. Alleen blijkt bij afleiding dat het hart voor het eerst een sterken demarcatiestroom levert, ten bewijze dat het nu ten deele dood is.

Ook bij het kikvorschhart had ik menigmaal de gelegenheid om waar te nemen, dat het electro-cardiogram na digitalis-intoxicatie nog waarneembaar blijft, terwijl het hart geen vormveranderingen meer vertoont. Voor dit resteerend electrocardiogram mogen ook geen „fibrillaire Zuckungen", als spieractie, aansprakelijk gesteld worden, daar ook bij het bezien van het hart met een sterk vergrootende loupe deze bewegingen niet zichtbaar bleken, terwijl toch het hart rustig electrisch pulseerde.

Men bereikt dezen eigenaardigen toestand onder digitalis-intoxicatie het fraaist en zekerst, wanneer men het hart niet vergiftigt door een grootere dosis in een keer toe te dienen, doch door telkens gedurende het geheele vergiftigingsproces nieuwe kleine doses op te droppelen. Op deze wijs slaagde ik er eenmaal in een electrisch phenomeen bij stilstand der vormveranderingen te voorschijn te roepen, dat gedurende geruimen tijd grooter bleef dan het normale electrocardiogram vóór de vergiftiging.

Wanneer men aldus, gefractioneerd, met kleine doses vergiftigt, kan het voorkomen, dat de initiale verkleining van het electrocardiogram onder invloed der intoxicatie bij haar optreden zeer vertraagd wordt. Over het algemeen kan men de genoemde digitalis-intoxicatieverschijnselen bij het electrocardiogram zonder noemenswaardige verschillen bewerkstelligen, zoowel bij toediening van digitaleïne als digitonine.

Van een dier vergiftigingsproeven doe ik hier een kort overzicht volgen. Bij eene Rana temporaria, waarvan hersenen en ruggemerg door een piqûre verwoest zijn, worden atrium en ventriculus gesuspendeerd volgens de suspensiemethode en basis en apex cordis door middel van onpolariseerbare electroden naar den snaargalvanometer met permanenten magneet afgeleid. De snaargalvanometer wordt gevoed met 4 volt; de snaarspanning is aanzienlijk en bedraagt 7 van de 60 deelstrepen.

Het hart pulseert rustig en krachtig. Eenige seconden na het begin der registratie worden 3 gutturae eener 1 °/₀ oplossing van digitaleïne in 0,9 °/₀ NaCl op het hart gedroppeld. Aanstonds begint het hart hierop te reageeren met een lichte versnelling van het slagtempo, terwijl de tonus van atrium en ventriculus afnemen om kort daarna aanzienlijk te gaan toenemen. Het electrocardiogram, dat eerst kleiner wordt, neemt weldra aanzienlijk in grootte toe, terwijl de ruststand van de snaar in de pauze der hartscontractie, zich naar den eenen kant verplaatst. Figuur 5 laat dit duidelijk zien. Om ± 2 minuten wordt de bedroppeling met digitaleïne herhaald, zonder dat dit telkens opnieuw de genoemde electrische veranderingen in het leven roept.

Langzamerhand gaan de contracties van atrium en ventriculus kleiner en kleiner worden, terwijl de tonus van beide aanzienlijk toeneemt. Een kwartier na de eerste vergiftiging staat het hart volmaakt stil in systole, blijkens de registratie en blijkens het bekijken van het hart. Het electrocardiogram pulseert rustig voort en vertoont groote en kleine uitslagen, die elkaar afwisselen, zooals men bij figuur 6 kan waarnemen. Na verloop van vijf minuten worden ook de electrocardische pulsaties kleiner en een half uur na de eerste vergiftiging hebben ze geheel opgehouden. Ook FANO en FAYOD[1]) maken melding van electrische veranderingen aan het onder digitalis-vergiftiging stilstaand hart van Emys.

Ten slotte moge nog als bewijsmateriaal voor de zelfstandigheid van het electrocardiogram aangevoerd worden de totale descongruentie tusschen het electrisch phenomeen en het vorm-cardiogram, zooals dit voorkomt bij behandeling alleen van het hart of van het geheele proefdier met toxische stoffen, al moge hierbij dan ook niet een volledig stilstaan van atrium en ventriculus tot stand gebracht kunnen worden. Dergelijke descongruenties doen zich o.a. voor bij opdroppeling van het hart met antiarine, nitras strychnini, sulfas atropini; bij injectie van het proefdier met nitras strychnini, sulfas atropini en coffeïnum; voorts bij blootstelling van het proefdier in toto aan dampen van chloroform, aether en azijnzuur.

Niet alleen het geheele hart vertoont deze descongruenties en de eigenaardige, min of meer typische reacties op de toegediende stoffen, doch ook afzonderlijke hartsgedeelten kunnen dergelijke verschijnselen aanbieden, zooals mij bleek bij onderzoek van den uitgesneden ventrikel van het hart van den aal onder toediening van antiarine en digitaleïne.

Uit bovenstaande kan men besluiten niet alleen, dat er in het spontaan-pulseerend hart nog andere acties optreden, dan die we in de contractie uitgedrukt vinden, maar ook, dat deze acties tot op zekere hoogte onafhankelijk zijn. De voor het oog onzichtbare acties, gekenmerkt door bepaalde electrische verschijnselen, doen denken aan de resultaten van prikkelprocessen, zooals men ze ook bij de zenuw kan aantoonen zonder daarbij voorkomende vormverandering. Moge echter het electrocardiogram al een zekere zelfstandigheid bezitten tegenover het vorm-cardiogram, omgekeerd tot een onafhankelijkheid van het laatste ten opzichte van het eerste te besluiten, daartoe geeft het meegedeelde allerminst grond.

---

[1]) FANO et FAYOD, De quelques rapports entre les propriétés électriques des oreillettes du coeur. — Archiv. ital. de Biologie, Tome IX 1888.

s

'an

Petrographie. — De Heer WICHMANN biedt eene mededeeling aan van den Heer J. SCHMUTZER, over: „*De mineralogische en chemische samenstelling van eenige gesteenten uit het Müller-Gebergte in Centraal-Borneo.*"

(Mede aangeboden door den Heer F. A. H. SCHREINEMAKERS.).

Prof. M. DITTRICH te Heidelberg analyseerde de volgende vier gesteenten, welke door Prof. G. A. F. MOLENGRAAFF in Centraal-Borneo werden verzameld:

II 710, een glazige amphibooldaciet, die als rolblok werd aangetroffen op de rolsteenbank aan den linkeroever van den Sebilit, ± 3 KM. boven Kebijau;

II 599, de glasrijke amfibooldaciet, waaruit de 1.50 m. hooge rotsen in den Embahoe, $^1/_4$ KM. beneden N^a-Pemali bestaan; het handstuk werd geslagen dicht bij het contact met het nevengesteente.

II 749, biotietamphiboolandesiet met ouden habitus, van den rechteroever van den Tebaoeng, tegenover N^a-Oeroei.

I 893, aplietische mikrograniet van den waterval, N.W. rotswand, Boekit Kelam.

I. *Hyalopilitische Amphibooldaciet.* (Amphiboolphyrivitroyellowstonose).

Het grijszwarte, glazige gesteente vertoont een ruwige, conchoïdale breuk; slechts onduidelijk treden spaarzame, witte veldspaatphenokristen, waarvan de diameter 1 mm. niet te boven gaat, en zeer zeldzame, sterk glinsterende, nog kleinere groene amphiboolnaaldjes uit de vetglanzende grondmassa te voorschijn. Mikroskopisch vormt de *plagioklaas* der eerste generatie (andesien-oligoklaas) scherpe, idiomorphe kristallen, die meest geïsoleerd liggen, maar zich soms tot aggregaten samenvoegen. Zonaire bouw is locaal mooi ontwikkeld; onder de tweelingswetten heerscht de albietwet, de Karlsbad- en periklienwet komen ondergeschikt voor. Hier en daar treedt er een uitgesproken neiging tot skeletvormige ontwikkeling aan den dag, deels tengevolge van verschillen in de kristallisatiesnelheid naar ongelijkwaardige richtingen, waardoor zich vlakken (bij voorkeur (010)) tot ver buiten de deze oorspronkelijk begrenzende ribben plaatvormig verbreeden, deels door dichte ophooping van glasinsluitsels met negatieve kristalvormen, hetwelk in den grond met hetzelfde verschijnsel samenhangt. Deze glasinsluitsels dringen de veldspaatsubstantie tot smalle, in twee hoofdrichtingen georiënteerde lijstjes samen, die zich vereenigen tot

een uiterst samengesteld meandrisch patroon, terwijl ook de kristalomtrek een onregelmatig-gekanteeld verloop aanneemt. Het glas vormt echter ook onregelmatige, snoer- of knotsvormige insluitsels, en is noch in kleur, noch in den aard der mikrolieten van het glas der grondmassa onderscheiden.

De *amphibool* komt voor in versche zuiltjes en kristalfragmenten; de inwerking van het magma op de kristallen bij de effusie heeft niet tot het ontstaan van een eigenlijken resorbtiezoom aanleiding gegeven, maar zich beperkt tot een ronding en een groote aanhooping van de magnetietglobulieten der grondmassa langs de peripherie. Het dichroïsme beweegt zich tusschen donkergrijsgroen // de *c*-as en groenachtig grijsgeel loodrecht daarop; ten opzichte van de lengterichting werd een uitdooving van 15° gemeten. Evenwijdig aan (100) en (001) vindt men soms een smalle tweelingslamel ingeschakeld. Behalve de volkomen prismasplijting treedt er een stelsel van ruwverloopende barsten dwars op de lengterichting op. Kwarts ontbreekt.

De *grondmassa* bestaat hoofdzakelijk uit kleurloos glas, waarin uitnemend idiomorphe *veldspaten* met lijst- of tafelvorm, de eersten vaak met mooien skeletbouw en graag fluïdaal gerangschikt, op den voorgrond treden. Albietlamelleering en zwakke zonaire opbouw zijn algemeen, glasinsluitsels veel spaarzamer dan in de phenokristen; daartegenover voeren de kristallen veel mikrolieten van magnetiet en bronziet. Deze twee laatste mineralen nemen onder de uitscheidingen der glasbasis een belangrijke plaats in. De *magnetiet*, die op grond van de chemische analyse titaanhoudend schijnt te zijn, kan naar de grootte tot twee scherp gescheiden generaties worden gebracht. De intratellurische magnetiet (gem. kristaldiam. 15 μ) vormt uitnemende octaëders, welke zoowel in de grondmassa, als in de phenokristen ingesloten voorkomen. In de grondmassa treft men de magnetietkristallen deels geïsoleerd, deels in aggregaten aan en dan vaak evenwijdig tot dendritische kristalstokken vergroeid. Dat de gemiddeld 10 $\times$ kleinere magnetietkristalletjes en globulieten, die naast de hier genoemde voorkomen, eerst in de effusieperiode ontstonden, bewijst hun sterke ophooping aan den omtrek der geresorbeerde amphiboolphenokristen, waar zij zich voornamelijk uit weer opgeloste amphiboolsubstantie hebben geïndividualiseerd. De *bronziet* vormt een vrij dicht weefsel van slanke naalden, die loodrecht op de prisma-as gewoonlijk een onregelmatige afzondering vertoonen. Van de veldspaatmikrolieten onderscheiden zij zich door de hooge breking, van apatiet (dat als insluitsel in de plagioklaasphenokristen voorkomt) door het zoneteeken, van de zeer enkele bijgemengde, dichroïtische, groene, soms volgens (100) vertweelingde hoornblendezuiltjes der tweede generatie door de

zeer lichte kleur, de zwakke dubbelbreking en de rechte uitdooving. De gronden, waarop hier de aanwezigheid van bronziet, en niet van enstatiet of hyperstheen is aangenomen, zullen nader worden toegelicht. We kunnen de mikroskopische beschrijving eindigen met het voorkomen te vermelden van uiterst fijne, niet nader te bepalen, sterk dubbelbrekende mikrolieten, waarvan de lengte slechts enkele $\mu\mu$, de dikte naar schatting niet meer dan 0,1 μ bedraagt.

De chemische analyse leverde de volgende waarden, welke aan de berekening van den gesteentenorm volgens Cross, Iddings, Pirsson en Washington [1]) werd ten grondslag gelegd.

	%	Mol. Prop.	ilm.	orth.	alb.	anorth.	kor.	magn.	bronz.	kwarts
SiO_2	66.16	1.103	—	126	384	124	—	—	33	436
Al_2O_3	15.39	0.151	—	21	64	62	4	—	—	—
Fe_2O_3	1.25	0.008	—	—	—	—	—	8	—	—
FeO	1.72	0.024	6	—	—	—	—	8	10	—
MgO	0.90	0.023	—	—	—	—	—	—	23	—
CaO	3.47	0.062	—	—	—	62	—	—	—	—
Na_2O	3.94	0.064	—	—	64	—	—	—	—	—
K_2O	2.00	0.021	—	21	—	—	—	—	—	—
H_2O [1])	4.94	—	—	—	—	—	—	—	—	—
TiO_2	0.50	0.006	6	—	—	—	—	—	—	—
	100.27									

[1]) Gloeiverlies 5.11 %.

Hieruit kan de volgende norm worden berekend:

kwarts	26.16	$Q = 26.16$	Sal = 89.03
orthoklaas	11.68	$F = 62.46$	
albiet	33.54		
anorthiet	17.24		
korund	0.41	$C = 0.41$	
bronziet	3.62	$P = 3.62$	Fem = 6.39
magnetiet	1.86	$M = 2.77$	
ilmeniet	0.91		

[1]) Quantitative classification of Igneous Rocks, Chicago, 1903.

zoodat het gesteente volgens het Amerikaansche systeem behoort tot Klasse 1, (Persalane); Subklasse 1, (Persalene); Orde 4, (Brittanare); Rang 3, (Coloradase); Subrang 4, (Yellowstonose). De eenige positive afwijking, die de modus ten opzichte van den norm vertoont, is de aanwezigheid van amphibool, zoodat aan het beschreven gesteente de naam Amphiboolphyrivitroyellowstonose toekomt. [1]).

Op den aard van den rhombischen pyroxeen werpt de chemische analyse eenig licht. Het mikroskopisch onderzoek bleef staan bij de waarneming, dat de pyroxeen zich door de lichte kleur van den hypersteen verwijdert. De hierboven uitgevoerde samenvatting van de oxyden tot mineraalmolekulen bewijst nu, dat in het pyroxeenmolekuul MgO sterk ten opzichte van FeO overweegt. Dat de modus van het gesteente door het optreden van amphibool van den hier berekenden norm een weinig afwijkt, verandert daaraan niet veel, zelfs wanneer men afziet van de omstandigheid, dat de amphibool quantitatief ver achterstaat bij den tot kristallisatie gekomen rhombischen pyroxeen. Het feit toch, dat bij de resorbtie van de amphiboolphenokristen slechts magnetiet, geen pyroxeen als nieuwe uitscheiding optreedt, wettigt de onderstelling, dat de amphibool tot de ijzerrijke variëteiten moet worden gerekend, en hieruit mag de gevolgtrekking worden gemaakt, dat de verhouding der oxydquanta MgO en FeO, welke na de kristallisatie van den amphibool voor de vorming van rhombischen pyroxeen beschikbaar bleven, niet al te zeer in het nadeel van MgO kon zijn gewijzigd vergeleken bij de verhouding, welke de norm-berekening oplevert. Deze verschillende gronden pleiten dus wel tegen hypersteen, en vóór bronziet of ijzerhoudenden enstatiet. In overeenstemming met onze deductie komen, zooals nader zal

---

[1]) Ondanks het ontbreken van kwarts in dit gesteente, is het op grond van het hooge SiO_2-gehalte niet tot den andesiet, maar tot den daciet gebracht; hetzelfde werd met het gesteente II 599 van den Embahoe gedaan. Bij de gesteenteanalysen, door Osann, Beiträge zur chemischen Petrographie, II Teil, Stuttgart 1905, verzameld, groepeeren zich genoemde typen als volgt naar het SiO_2-gehalte (niet H_2O-vrij):

SiO_2 in %		75	74	73	72	71	70	69	68	67	66	65	64	63	62	61	60	59	58	7	56	55	54	53	52	51	50
Aantal analysen	Daciet	1	—	1	—	3	5	4	7	3	4	3	3	2	1	1	—	—	—								
	Andesiet				—	—	—	1	2	1	10	6	10	9	11	20	24	16	13	10	16	12	6	2	3	3	—

Hieruit is te berekenen, dat het SiO_2-gehalte bij den „daciet" schommelt om een gemiddelde van 67.5%, bij den „andesiet" om 59.5%. Natuurlijk hebben deze cijfers slechts eene zeer betrekkelijke waarde; intusschen nemen de gesteenten II 710 en II 599 ook in den projectiedriehoek van Osann plaatsen in, die geheel vallen binnen het gebied der daciet- en kwartsporphyrietprojecties, doch slechts aan de grens van het gebied der andesieten (glimmer-, hoornblende-, hypersteen resp. augietandesieten en porphyrieten, cf. Osann, Versuch einer chem. Classification der Eruptifgesteine, Tsch. Min. Petr. Mitt. XX, Heft 5. 6 1900, Taf. IX, X).

blijken, onmiskenbare enstatiet (bronziet)-kristallen van grootere afmetingen voor in den glazigen daciet II 599 van den Embahoe, welke met dit gesteente eene nauwe chemische en mineralogische verwantschap vertoont. Ook dáár voert de glasbasis dezelfde karakteristieke rhombische pyroxeenmikrolieten, waarvan de bronzietnatuur door de chemische analyse waarschijnlijk wordt gemaakt.

Na herleiding van Fe_2O_3 tot FeO, leveren de molekulairproporties, op eene som 100 berekend, de volgende waarden (TiO_2 bij SiO_2 gevoegd):

SiO_2	Al_2O_3	FeO	MgO	CaO	Na_2O	K_2O
75.45	10.27	2.72	1.56	4.22	4.35	1.43

waaruit volgt de formule volgens Osann:

	s	A	C	F	a	c	f	n	m	k	Reeks
I	75.45	5.78	4.49	4.02	8.09	6.28	5.62	7.53	10.00	1.46	*a v*
II	75.45	5.78	4.22	4.29	8.09	5.90	6.00	—	—	—	
III	—	—	—	—	(12.14	9.42	8.43)	—	—	—	
IV	—	—	—	—	(12.14	8.85	9.00)	—	—	—	

Deze cijfers eischen eene kleine toelichting. Zooals reeds bij de berekening van den norm bleek, blijft er na verzadiging van de alkaliën en CaO met Al_2O_3 een niet onbelangrijk quantum sesquioxyd over. Daar het geanalyseerde materiaal absoluut versch, zelfs mikroskopisch vrij van elk spoor van ontleding was, is de mogelijkheid van eene relatieve toename van Al_2O_3 door wegvoering van alkaliën en CaO uitgesloten: eene dienovereenkomstige verdeeling van het Al_2O_3 overschot over alkaliën en CaO [1]) zou hier dus niet wel te verdedigen zijn. Ook de oplossing van brokstukken uit een aluminiumrijk nevengesteente door het dacietmagma moet als hoogst onwaarschijnlijk gelden; zoowel makro- als mikroskopisch ontbreekt daartoe de geringste aanduiding. Het Al_2O_3-overschot kan overigens niet steken in aan Al_2O_3 buitengewoon rijke amphibolen of pyroxenen [2]), zooals uit het mikroskopisch onderzoek voldoende blijkt; het moet integendeel in de glasmassa worden gezocht.

In de zeldzame gevallen, waarin er na verzadiging van de alkaliën en kalk een Al_2O_3-overschot optreedt, substitueert Osann MgO in de atoomgroep $CaAl_2O_4$ [3]) terwijl Becke [4]) het Al_2O_3-overschot in de

[1]) L. Milch, Ueber Spaltungsvorgänge in granitischen Magmen nach Beobachtungen im Granit des Riesengebirges, Festschrift H. Rosenbusch, 1906, 127.

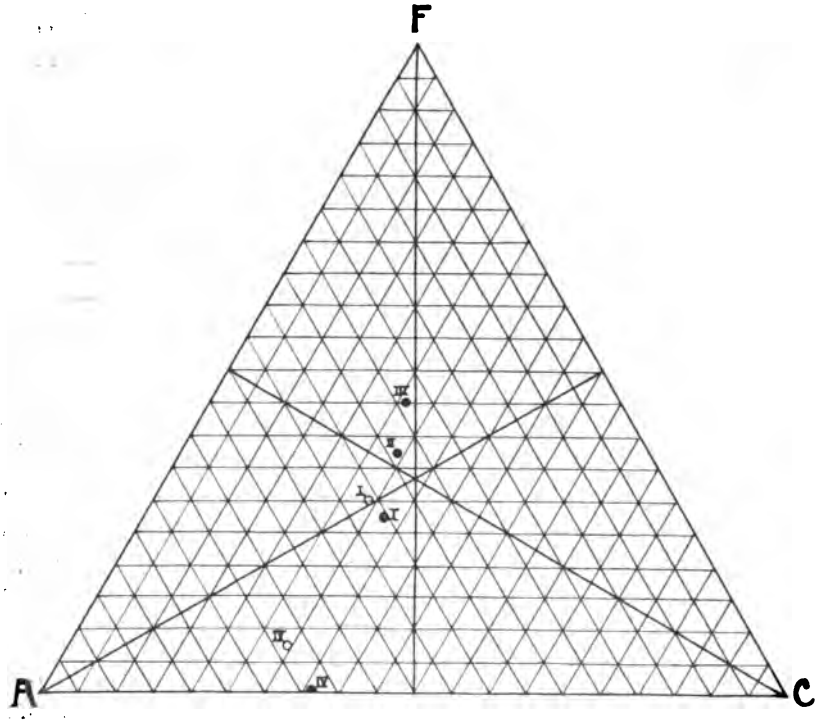
[2]) A. Osann, Versuch einer chemischen Classification der Eruptifgesteine, Min. Petr. Mitt. XXII, 1903, 337.

[3]) Min. Petr. Mitt. XXII, 1903. 337.

[4]) Ibid. 215.

formule verwaarloost en afzonderlijk vermeldt; het bedraagt hier in molekulairproporties 0.27. Dienovereenkomstig is in I de gesteenteformule aangegeven naar OSANN, in II naar BECKE. In III en IV zijn deze dubbele waarden voor a, c en f naar BECKE op een som van 30 inplaats van 20 (I en II) berekend.

In onderstaande graphische voorstelling geeft I de projectie aan van het gesteente; de gevulde cirkel met de waarden van a, c, f volgens OSANN als grondslag, de niet gevulde met die volgens BECKE.



II. *Hyalopilitische Amphibooldaciet* (Amphiboolphyrivitroyellowstonose). Uit de glazige basis van dit vettig glanzende, zwartgrijze gesteente, dat neiging tot eene schelpachtige breuk en in een der handstukken eene duidelijke en vrij regelmatige afzondering tot dunne, vlakke platen van 1—7 mm. dikte vertoont, treden reeds makroskopisch kleine plagioklazen met levendigen mikrotienhabitus en glinsterende amphiboolzuiltjes te voorschijn. De zeer versche ook hier meest goed idiomorphe, prismatische en tafelvormige *plagioklaas*-phenokristen liggen vaak groepsgewijze bijeen en bezitten een sterken zonairen opbouw, die zich reeds in scheef doorvallend licht door evenwijdige, sterk lichtende strepen te kennen geeft en waarbij zure en basische zonen meermalen met elkaar afwisselen. Dezelfde twee-

lingswetten werden aangetroffen als in het vorige gesteente; de albietlamellen grijpen soms met onregelmatige vertandingen in elkaar, waardoor bij samengroeiing van meerdere kristallen een verward polarisatiebeeld ontstaat. De plagioklaas der phenokristen behoort tot ietwat basischer mengsels dan in den vorigen daciet; de samenstelling daalt tot die van basischen labrador af, maar nadert naar de andere zijde tot die van andesien. De kristallisatie van den basischen plagioklaas is reeds vóór die van de amphiboolphenokristen geëindigd, doch heeft een tijd daarmee samengeloopen; de zuurdere plagioklaas voert daarentegen vaak amphiboolzuiltjes als insluitsel. Naar de afmetingen kan men de plagioklazen in dit gesteente in drie groepen verdeelen: *a*) kristallen met een gemiddelden diameter van 1.5 mm., die gewoonlijk sterk met kleurlooze en bruine glasinsluitsels beladen en daarmede vaak tot op een peripherischen zoom na geheel zijn opgevuld; *b*) kristallen, die gemiddeld de helft kleiner en waarin de bruine glasinsluitsels zeer zeldzaam, de kleurlooze in het algemeen veel minder talrijk zijn; *c*) nog kleinere, nog steeds mooi zonair opgebouwde, volgens de albiet- en Karlsbadwet vertweelingde prismatische kristallen, die geleidelijk in de jongste en kleinste lijstvormige, meest fluidaal gerangschikte veldspaatjes van de glasbasis overgaan. Terwijl *b* nog tot de eigenlijke phenokristen moet worden gerekend, kan men *c* het best tot de tweede generatie rekenen. Zooals blijkt, is intusschen de grens tusschen de kristallen van de 1e en 2e generatie bij de veldspaten niet scherp te trekken, al is er bij de extremen geen plaats voor twijfel. Reeds werd het voorkomen van twee soorten glasinsluitsels vermeld, die ook hier gaarne den vorm van negatieve kristallen aannemen: van kleurlooze, die een zeer licht rosen indruk maken en soms talrijke mikrolieten voeren, en van bruingrijze, die sterk spherolitisch zijn gedevitrificeerd. De natuur van dit bruine glas, dat ook in snoeren in de kleurlooze glasbasis voorkomt, is niet geheel opgehelderd. Alleen lijkt het vrij zeker, dat het bruine glas geen omzettingsproduct van het kleurlooze is. Maar dan moeten reeds in de intratellurische periode beide glassoorten naast elkaar hebben bestaan, daar zij naast elkaar in de plagioklaas- en amphiboolphenokristen voorkomen. Men heeft in het bruine glas dus waarschijnlijk omgesmolten vreemde bestanddeelen of, wat misschien meer voor de hand ligt, een intratellurisch liquatieproduct te zien.

De *amphibool*, die in overvloed aanwezig is, vormt stompe naalden, die een lengte van 1 mm. niet overschrijden; $\mathfrak{c}$ = groen, $\mathfrak{b}$ = grijsgroen, $\mathfrak{a}$ = grijsgeel, waarbij $\mathfrak{c} > \mathfrak{b} > \mathfrak{a}$, maar $\mathfrak{c}$ en $\mathfrak{b}$ zich slechts weinig van elkaar verwijderen. Er komt ook wel een zonaire bouw voor, waarbij in de normale amphiboolsubstantie — vooral in sommige sneden

loodrecht op de lengteas goed waarneembaar — evenwijdig aan den kristalomtrek een zoom verloopt, welke de kleuren c = blauwgrijsgroen of donkergrijsgroen, b = bruingrijsgroen, a = lichtgrijsgeel vertoont. De idiomorphe kristallen zijn door resorbtie vaak zoo sterk aangegrepen, dat de grondmassa er met diepe bochten binnendringt. De resorbtiezoom wordt gevormd door een uiterst dicht viltig weefsel van fijne mikrolieten, die hier en daar grooter worden, locaal zelfs de veldspaatlijsten van de grondmassa in grootte overtreffen en dan met zekerheid als rhombische pyroxeen kunnen worden bepaald. Daarmede gemengd vindt men magnetiet en sterk dubbelbrekende korrels, die waarschijnlijk voor augiet moeten worden gehouden. De resorbtiezoom is niet overal duidelijk ontwikkeld; bij eenige kristallen schijnt hij zelfs voor een deel te ontbreken. Een verklaring daarvoor zou de onderstelling kunnen leveren, dat het gesteente nog na de resorbtieperiode met geweld is opgeperst geworden, waardoor de componenten van den resorbtiezoom op sommige plaatsen van den phenokrist werden weggeveegd. Deze opvatting wordt op positieve wijze gesteund door de waarneming, dat de zoom zich vaak wolkig in de grondmassa oplost, terwijl de grootere naaldjes vrij algemeen loodrecht op de lengteas in stukken zijn gebroken, die ten opzichte van elkaar zijn gedesoriënteerd. Doch er is meer: ook de componenten der eerste generatie vertoonen mechanische deformaties, die vóór de vastwording van de glasbasis en met hooge waarschijnlijkheid na de resorbtieperiode zijn tot stand gekomen. De veldspaat vertoont onregelmatige scheuren en barsten, waarlangs soms albietlamellen ten opzichte van elkaar verschoven zijn en die met grondmassaglas zijn gevuld, zoodra de fragmenten door een onderlinge verplaatsing niet meer nauwkeurig aaneensluiten.

De amphibool is bijna steeds door onregelmatige scheuren loodrecht op de zuilrichting in stukken gebroken, welke vaak vrij ver van elkaar zijn weggevoerd; niet zelden ook langs de splijtrichtingen opengespalkt. Ook hier zijn de gapende scheuren met glas gevuld, en, wat belangrijk is, dit glas is bijna steeds geheel vrij van de resorbtieproducten, die langs den oorspronkelijken kristalomtrek optreden. Men kan hierin het bewijs zien, dat deze scheuren werden geopend op een tijdstip, dat de resorbtieperiode ongeveer ten einde was, een conclusie, die geheel in overeenstemmiug is met het genoemde feit, dat de naaldjes, die de resorbtiezoomen vormen, zelf veelvuldig gebroken zijn. Hiermede wordt het bestaan van een derde phase in de afkoelingsgeschiedenis van het gesteente plausibel gemaakt, hetgeen in een opvallend parallelisme tot het voorkomen der verschillende beschreven veldspaatgeneraties staat.

Tot de tweede generatie behooren streng idiomorphe kristallen van rhombischen pyroxeen, die wat grooter zijn dan de beschreven naalden uit den resorbtiezoom, doch daarmede genetisch identiek zijn. Ze zijn gaarne evenwijdig vergroeid; de vlakken (100) en (010) zijn sterk ontwikkeld en verdringen soms de prismavlakken (110) ($1\bar{1}0$) geheel. Aan deze laatste loopt eene duidelijke splijting parallel; locaal treedt er ook eene pinakoïdale splijting op. Ze vertoonen bij lichtgrijze kleuren een zwak dichroïsme. Eenige uitmuntende doorsneden ⊥c leverden in convergent licht centraal het uittredingspunt van een scherpe, positieve bissectrix, zoodat, hierbij gevoegd de rechte uitdooving, de *enstatiet* (bronziet)-natuur van het mineraal vaststaat.

De *grondmassa* eindelijk wordt gevormd door een glasbasis, waarin behalve de genoemde veldspaten voorkomen: amphiboolprisma's van veel geringer afmetingen dan de eigenlijke phenokristen, die daarin echter zonder scherpe groottegrens overgaan en blijkens den dichten peripherischen mikrolietenzoom tot de eerste generatie behooren; magnetiet, evenals in den beschreven daciet II 710 in twee generaties aanwezig, en tallooze bronzietnaaldjes met de karakteristieke ruwe afzondering // (001). Apatiet komt als insluitsel in den amphibool voor.

De chemische analyse van het gesteente leverde:

	%	Mol. Prop.	ilm.	magn.	orth.	alb.	anorth.	diops.	bronz.	kwarts
SiO_2	65.72	1.095	—	—	72	408	136	14	42	423
Al_2O_3	15.06	0.148	-	—	12	68	68	—	—	—
Fe_2O_3	1.35	0.009	—	9	—	—	—	—	—	—
FeO	1.80	0.025	6	9	—	—	—	7	42	—
MgO	1.57	0.039	—	—	—	—	—			—
CaO	4.18	0.075	—	—	—	—	68	7	—	—
Na_2O	4.24	0.068	—	—	—	68	—	—	—	—
K_2O	1.07	0.012	—	—	12	—	—	—	—	—
TiO_2	0.48	0.006	6	—	—	—	—	—	—	—
H_2O—105°	0.69	—	—	—	—	—	—	—	—	—
H_2O+105°	3.77	—	—	—	—	—	—	—	—	-
	99.93									

Waaruit de volgende norm volgt:

kwarts	25.38	Q = 25.38	Sal = 86.58
orthoklaas	6.67	F = 61.20	
albiet	35.63		
anorthiet	18.90		
diopsied	1.54	P = 6.03	Fem = 9.03
bronziet	4.49		
ilmeniet	0.91	M = 3.00	
magnetiet	2.09		

en het gesteente geplaatst wordt in Klasse I (Persalane); Subklasse 1 (Persalone); Orde 4 (Brittanare); Rang 3 (Coloradase); Subrang 4 (Yellowstonose).

Wanneer men in aanmerking neemt, dat het diopsiedmolekuul als amphibool is gekristalliseerd, is er eene bevredigende overeenstemming tusschen norm en modus waar te nemen.

Herleidt men Fe_2O_3 tot FeO, dan geven de molekulairproporties, op een som 100 berekend (TiO_2 bij SiO_2 gevoegd) de waarden:

SiO_2	Al_2O_3	FeO	MgO	CaO	Na_2O	K_2O
74.14	9.97	2.83	2.63	5.05	4.58	0.81

zoodat de formule volgens Osann wordt:

	s	A	C	F	a	c	f	n	m	k	Reeks
I	74.14	5.39	4.58	5.93	6.78	5.76	7.46	8.5	9.2	1.56	*av*
II					(10.17	8.64	11.19)				

In I is a + c + f = 20; in II a + c + f = 30.

Beide dacieten vertoonen dus eene sterke chemische verwantschap, welke ook op de graphische voorstelling, fig. 1, tot uitdrukking komt. De iets grooter basiciteit van het tweede gesteente, dat meer CaO en MgO, iets minder SiO_2 en de helft minder K_2O bevat, komt mikroskopisch in het karakter der veldspaten en het grooter gehalte aan amphibool uit.

Ter vergelijking zijn hier eenige analysen samengesteld, die met de beide besprokene eene groote overeenstemming vertoonen:

	I	II	III	IV	V	VI	VII
SiO_2	67.34	66.16	65.88	65.72	65.66	65.39	64.81
Al_2O_3	15.96	15.39	15.61	15.06	15.61	15.49	15.73
Fe_2O_3	3.38	1.25	2.42	1.35	2.10	2.80	1.68
FeO	0.80	1.72	2.71	1.80	2.07	1.99	2.91
MgO	0.88	0.90	1.76	1.57	2.46	2.06	2.82
CaO	2.98	3.47	3.70	4.18	3.64	4.48	4.22
Na_2O	4.12	3.94	3.92	4.24	3.65	4.56	3.98
K_2O	1.66	2.00	2.29	1.07	2.03	1.59	1.43
H_2O+	2.20	4.94	1.05	3.77	1.07	0.55	0.62
H_2O-	—	—	—	0.69	—	—	—
CO_2	—	—	sp.	—	—	—	—
TiO_2	0.56	0.50	0.43	0.48	1.37	—	0.08
P_2O_5	—	—	0.13	—	sp.	0.11	0.23
MnO	—	—	0.08	—	—	—	0.08
Som	99.78	100.27	100.00	99.93	100.27	99.02	100.61

I. Biotietdaciet, Kolantziki, Megara, Griekenland, anal. A. Röhrig, cf. Washington, Journ. Geol. III, 150, 1895 (Yellowstonose).

II. Amphibooldaciet, rolblok link. oev. Sebilit, ± 3 KM. boven Kebijau, anal. M. Dittrich.

III. Granitiet, Mazaruni District, Brit. Guyana, anal. J. B. Harrison, cf. Washington, Chem. Anal. of Igneous Rocks, 1903, 191 (Yellowstonose).

IV. Amphibooldaciet, $^1/_4$ K.M. beneden N^a Pemali, Embahoe, anal. M. Dittrich.

V. Daciet, Sepulchre Mountain, Yellowstone nat. Park, anal. J. E. Whitfield, cf. J. P. Iddings, XII Ann. Rep. U. S. Geol. Surv. I, 648, 1891 (Yellowstonose).

VI. Pyroxeendaciet (Kwartspyroxeenandesiet), Cumbal, Columb. Andes, cf. Küch, N. Jahrb. f. Min. 1886, I.

VII. Biotietporphyriet, North Mosquito, Col., anal. Hillebrand, cf. Cross, XII^A Monogr. U. S. Geol. Surv., Clarke, U. S. Bull. No. 168, 155. (Yellowstonose).

III. *Biotietamphiboolandesiet* (Biotietamphiboolphyrovitritonalose).

Het gesteente, waaruit de Boekit Loeboek is opgebouwd, en waarvan het handstuk II 749, tegenover N^a^ Oeroei aan den Tebaoeng geslagen, een monster vertegenwoordigt, behoort tot de meest versche oude andesieten van het Westelijk Müllergebergte. Naar den makroskopischen habitus neemt het een geheel aparte plaats in ; een donkergroene grondmassa, die in de meer ontlede gesteenten sterk verbleekt, vormt het bindmiddel tusschen onregelmatig verdeelde, soms dicht opeengedrongen, tot 6 mm. diam. bereikende plagioklazen met mikrotienhabitus, slanke amphiboolkristallen (tot 8 × 2 mm.) en zeszijdige tafeltjes van bronskleurigen biotiet (3—4 mm. diam.) De lamellair vertweelingde, vaak zeer mooi zonaire *plagioklaas* onderscheidt zich niet wezenlijk van de reeds hiervoor beschrevene. Een allereerst begin van ontleding uit zich in eene geringe albietiseering langs spleten, welke met eene troebeling samengaat, en eene spaarzame ontwikkeling van secundaire amphiboolblaadjes. Aan insluitsels voert de overigens heldere plagioklaas primairen amphibool ,vaak volgens (100) vertweelingd, magnetiet, apatiet en enkele scherpe zuiltjes van zirkoon, terwijl peripherisch soms augietkorrels worden omsloten, die karakteristiek zijn voor de resorbtiezoomen der amphiboolphenokristen, waaruit blijkt, dat de kristallisatie van den plagioklaas eerst tijdens of na de eruptie een einde nam.

De *amphibool* vormt prismatische individuen, die sterk magmatisch geresorbeerd en omgeven zijn door een breeden, los samenhangenden zoom van chloritiseerende amphiboolblaadjes, pyroxeen-, magnetiet- en titanietkorrels, welke met de gewone grondmassacomponenten vermengd zijn. Slanke zuilen zijn soms tot op een smalle, gekartelde graat na geheel in deze producten omgezet. De uitdooving ten opzichte van de *c*-as bereikt eene waarde van 20° ; het pleochroïsme beweegt zich tusschen dofbruingroen en lichtbruingroen ; de gewone tweelingen naar (100) komen voor. Aan insluitsels voert de amphibool basische plagioklaas, magnetiet en wolkige ophoopingen van uiterst fijne, evenwijdig geplaatste mikrolieten, die waarschijnlijk evenals een deel van de magnetietglobulieten hun ontstaan danken aan een chemische dissociatie van de amphiboolsubstantie. Het onderzoek van den *biotiet* levert geen bijzondere gezichtspunten ; de zure *grondmassa* bestaat uit unduleuze, waarschijnlijk primaire kwartskorrels, die stof- en kleurlooze glasinsluitsels voeren, sanidien en zuren, kort prismatischen en zonair opgebouwden, ook slank lijstvormigen plagioklaas met albietlamelleering, welke mineralen door een spaarzaam, sterk globulitisch getroebeld kleurloos glas zijn gecementeerd. Locaal komen enkele bijna kleurlooze, soms vertweelingde en sterk met glas beladen

augietkorrels voor, die blijkens hun voorkomen aan of bij de resorbtiezonen van de amphiboolphenokristen, ook dáár, waar zij aanzienlijker afmetingen (tot 0.1 mm.) aannemen, als een resorbtieproduct moeten worden beschouwd. Het glas van de grondmassa voert magnetiet in octaëders, korrels en zuiltjes van apatiet, en prisma's van zirkoon, en wordt overal verdrongen door pluisjes, vezeltjes en blaadjes van een groen chloritisch product, dat zich sterk om de amphiboolphenokristen ophoopt en zich in hoofdzaak ten koste van den bij de resorbtie uitgescheiden secundairen amphibool heeft gevormd.

De analyse van het meest versche materiaal leverde het volgend resultaat:

	%	Mol. Prop.	ilm.	magn.	hem.	orth.	alb.	anorth.	diops.	enstat.	kwarts
SiO_2	62.70	1.045	—	—	—	114	396	152	22	52	309
Al_2O_3	16.37	0.161	—	—	—	19	66	76	—	—	—
F_2O_3	2.81	0.018	—	14	4	—	—	—	—	—	—
FeO	1.62	0.022	8	14	—	—	—	—	—	—	—
MgO	2.50	0 063	—	—	—	—	—	—	11	52	—
CaO	4.84	0 087	—	—	—	—	—	76	11	—	—
Na_2O	4.05	0.066	—	—	—	—	66	—	—	—	—
K_2O	1 83	0.019	—	—	—	19	—	—	—	—	—
$H_2O - 105°$	0.87	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$H_2O + 105°$	1.79										
TiO_2	0 64	0.008	8	—	—	—	—	—	—	—	—
	100 02										

waaruit de samenstelling volgt:

Kwarts	18.54	Q = 18.54	Sal = 84.81	
orthoklaas	10.56	F = 66.27		
albiet	34.58			
anorthiet	21.13			
diopsied	2.38	P = 7.58	Fem = 12.69	
enstatiet	5.20			
ilmeniet	1.22	M = 5.11		
magnetiet	3.25			
hematiet	0.64			

Het gesteente behoort daardoor tot Klasse II (Dosalane); Subklasse 1 (Dosalone); Orde 4 (Austrare); Rang 3 (Tonalase); Subrang 4

(Tonalose). De grootere basiciteit ten opzichte van de vorige gesteenten uit zich hier chemisch in de afname van het SiO_2-, de toename van het MgO en CaO-gehalte. De modus wijkt vrij belangrijk van den norm af door het optreden van biotiet en amphibool, welke mineralen als de eigenlijke dragers moeten gelden van de MgO, die hier in het enstatietmolekuul is ondergebracht. Een deel van de MgO steekt echter ook in den augiet en den amphibool der resorbtiezoomen en in den chloriet.

De molekulairproporties op eene som 100 berekend — Fe_2O_3 tot FeO herleid — geven:

SiO_2	Al_2O_3	FeO	MgO	CaO	Na_2O	K_2O	TiO_2
69.34	10.68	3.85	4.18	5.77	4.38	1.26	0.53

Formule volgens Osann:

s	A	C	F	a	c	f	n	m	k	Reeks
69.87	5.64	5.05	8.75	5.8	5.2	9	7.7	9.2	1.33	*a v*
				(8.7)	(7.8)	(13.5)				

In de graphische voorstelling komt naast de nauwe verwantschap met de beide vorige dacieten ook het basischer karakter duidelijk tot uitdrukking. Ook hier volgen ter vergelijking de analysen van eenige chemisch nauw verwante gesteenten:

	I	II	III	IV	V	VI
SiO_2	62.78	62.70	62.27	62.09	62.09	61.22
Al_2O_3	17.16	16.37	16.92	17.03	16.69	16.14
Fe_2O_3	1.96	2.81	2.40	2.38	1.45	3 01
FeO	2 31	1 62	2.59	2.69	3.76	2.58
MgO	2 32	2.50	2.87	3.08	1.93	4.21
CaO	4.84	4.84	4.78	5.65	6.08	5.46
Na_2O	4.11	4.05	4.72	4.10	3.36	4.48
K_2O	2.15	1.83	1.47	1.67	1.84	1.87
H_2O+	0.88	1.79	1.22	0.13	1.47	0.40
H_2O-	0.24	0.87	—	0.04	0.19	0.04
TiO_2	0.56	0.64	0.16	0.65	0.32	0.61
P_2O_5	0.15	—	sp.	0.19	0.39	0.25
MnO	0.06	—	—	sp.	sp.	sp.
BaO	0.04	—	—	0.07	0.10	—
Som	99.58	100.02	99.47	99.84	99.77	100.36

I Yentniet, Yentna River, Alaska; anal. H. N. STOKES, cf. J. E. SPURR, Am. Journ. Sci. X, 310, 1900 (Tonalose; voert nog, in de som inbegrepen, S = 0.02, en sp. van Cl, SrO, Li_2O).

II Biotietamphiboolandesiet, recht. oever Tebaoeng, tegenover Nº. Oeroei, Centraal-Borneo, anal. M. DITTRICH. (Tonalose).

III Andesiet, Punta della Civitate, Capraja-eil., Italië, anal. A. RÖHRIG, cf. H. EMMONS, Quart. Journ. Geol. Soc. XLIX. 142, 1893 (Cl = 0.07 ; Tonalose).

IV Hypersteenaugietandesiet, Palisades, Crater Lake, Oregon, anal. H. N. STOKES, cf. H. B. PATTON, Bull. U. S. Geol. Surv. 168, 223, 1900 (SrO = 0.07 ; Tonalose).

V Hoornblendeporphyriet, Nevada City, Calif., anal. H. N. STOKES, cf. W. LINDGREN XVII Ann. Rep. U. S. Geol. Surv. II, 59; 1896 (SO_3 = 0.10, Tonalose).

VI Pyroxeenmicadioriet, Electric Peak, Yellowstone Nat. Park.; anal. W. H. MELVILLE, cf. J. P. IDDINGS, XII Ann. Rep. U. S. Geol. Surv. I, 627, 1891 (NiO = 0.09, Tonalose).

IV. *Aplietische Mikrograniet* (normat. Graniphyrilassenose).

Het ruw aanvoelende, kalkwitte, poeierig afgevende, zeer fijnkorrelige gesteente voert vaak holruimten, waarin zich glimmerrozetten en serpentineuze producten hebben afgezet, welke ook in mikroskopische aggregaten door het heele gesteente verspreid liggen en daardoor een zekere poreusheid verraden.

De eigenlijke gesteentecomponenten zijn meest vrij versch, en hiermede in overeenstemming schijnt het optreden der secundaire producten — waaronder de muscoviet een eerste plaats inneemt, — met groote waarschijnlijkheid op pneumatolytische processen, niet op atmospherische verweering te moeten worden teruggevoerd. De structuur is holokristallijn porphyrisch, maar als zoodanig slechts mikroskopisch te herkennen. De zeer spaarzame phenokristen (diam. gem. 0.3 mm.) bestaan uit *albiet*; ze vertoonen een weinig ontwikkelde idiomorphie, zijn zelden volgens de albietwet vertweelingd, maar treden vaak onregelmatig vergroeid tot groepen van 2—3 individuen samen. Een begin van ontleding uit zich in het optreden van opake globulieten, die in hoofdzaak evenwijdig aan de splijtrichtingen zijn gerangschikt. Kwarts- en orthoklaasphenokristen ontbreken geheel. De holokristallijne *grondmassa* bestaat uit lijstvormige, zelden tafelvormige, sterk unduleuze en steeds volgens de albietwet vertweelingde, onregelmatig divergeerende, locaal evenwijdig gerichte zure *plagioklazen*, die door *kwarts*korrels met soms vrij geprononceerde idiomorphie, dan echter steeds peripherisch door veldspaat franjeachtig verknipt,

veelal echter zonder aanduiding van kristallographische begrenzing, en verder een weinig *orthoklaas* zijn gecementeerd. De veldspaat vertoont slechts een zeer geringen aanvang van ontleding; daarentegen zijn vooral pluisjes en blaadjes van secundairen kleurloozen glimmer, daarnaast serpentineuze producten en enkele onregelmatige zuiltjes van secundairen amphibool, zoo ook eene locaal zich verdichtende globulitische troebeling, waarschijnlijk door limoniet veroorzaakt, in de grondmassa zeer verbreid. Donkere, primaire bestanddeelen schijnen dus in het gesteente geheel te ontbreken; het plagioklastisch karakter van den veldspaat stempelt het gesteente tot een basische, Na_2O-rijke facies van aplietischen mikrograniet.

De chemische analyse leverde:

	%	Mol. Prop.	magn.	orth.	alb.	anorth	kor.	hyp.	kwarts
SiO_2	72.44	1.207	—	132	438	88	—	7	542
Al_2O_3	16.51	0 162	—	22	73	44	23	—	—
Fe_2O_3	0.24	0 001	1	—	—	—	—	—	—
FeO	0 52	0.007	1	—	—	—	—	6	—
MgO	0.05	0.001	—	—	—	—	—	1	—
CaO	2 47	0.044	—	—	—	44	—	—	—
Na_2O	4 54	0.073	—	—	73	—	—	—	—
K_2O	2.13	0.022	—	22	—	—	—	—	—
TiO_2	sp.	—	—	—	—	—	—	—	—
$H_2O-105°$	0.13	—	—	—	—	—	—	—	—
$H_2O+105°$	1.13								
	100.16								

Waaruit de volgende normatieve samenstelling volgt:

kwarts	32.52	Q = 32.52	
orthoklaas	12.23	F = 62.71	Sal = 97.58
albiet	38.25		
anorthiet	12.23		
korund	2.35	C = 2.35	
hypersteen	0.89	P	Fem = 1.12
magnetiet	0.23	M	

In de onderstelling, dat het gesteente versch is, vindt het een plaats in Klasse I (Persalane), Subklasse 1 (Persalone); Orde 4 (Brittanare);

Rang 2 (Toscanase); Subrang 4 (Lassenose). De vraag is echter, of er, in aanmerking genomen de besproken ontleding van het gesteente, van de toewijzing van een plaats in het chemische systeem sprake kan zijn. Zooals uit de mikroskopische beschrijving volgt, moet het belangrijk overschot aan Al_2O_3 na binding aan K_2O, Na_2O en CaO in de veldspaatmolekulen althans voor een groot worden toegeschreven aan het voorkomen van muscoviet. Neemt men voor muscoviet de formule $KH_2Al_3(SiO_4)_3$ aan [1]), dan verdwijnt het Al_2O_3 overschot bij de aanwezigheid van 5.84% orthoklaas naast 9.15% muscoviet. Dit laatste cijfer is echter overdreven hoog. Neemt men, in overeenstemming met eene mikroskopische schatting, een gehalte van ongeveer 3% muscoviet aan, en verdeelt men de rest van de Al_2O_3 gelijkelijk over K_2O, Na_2O en CaO, in de onderstelling, dat deze oxyden in gelijke mate door oplossingen zijn verwijderd, dan verkrijgt men de volgende samenstelling voor het gesteente:

kwarts	28.32	Q = 28.32	Sal = 95.60
orthoklaas	12.79	F = 67.28	
albiet	40.87		
anorthiet	13.62		
muscoviet	3.00		
hypersteen	0.89	Fem = 1.12	
magnetiet	0.23		
water	1.11		
Som	100.83		

Laat men den muscoviet, als van blijkbaar secundairen oorsprong, buiten beschouwing, dan nog neemt het gesteente in het chemisch systeem dezelfde plaats in:

$$\frac{Sal}{Fem} = \frac{95.60}{1.12} > \frac{7}{1}, \text{ Persalane}$$

$$\frac{Q}{F} = \frac{28.32}{67.28} < \frac{3}{5} \text{ en } > \frac{1}{7}, \text{ Brittanare}$$

$$\frac{K_2O + Na_2O}{CaO}\,^{2)} = \frac{23 + 78}{49} = \frac{101}{49} > \frac{5}{3} \text{ en } < \frac{7}{1}, \text{ Toscanase}$$

$$\frac{K_2O}{Na_2O} = \frac{23}{78} < \frac{3}{5} \text{ en } > \frac{1}{7}, \text{ Lassenose.}$$

Tegen den naam lassenose zullen dus wel geen ernstige bezwaren kunnen worden ingebracht.

---

[1]) Rosenbusch, Mikrosk. Physiogr. 1, 2. p. 262. 1905.

[2]) De K_2O, Na_2O en CaO-molekulen werden elk met 5 verhoogd, daarvan kwamen echter 4 K_2O-molekulen op den hier buiten rekening gelaten muscoviet.

Inplaats van hypersteen voert het gesteente amphibool en serpentijn, welk eerste mineraal zeer zeldzaam is, terwijl het laatste zich hoofdzakelijk beperkt tot de holruimten en in het geanalyseerde gesteentemonster, blijkens het lage MgO-gehalte, geen belangrijke plaats inneemt.

De molekulairproporties leveren, Fe_2O_3 tot FeO herleid en het geheel op een som 100 berekend:

SiO_2	Al_2O_3	FeO	MgO	CaO	Na_2O	K_2O
79.46	10.66	0.66	0.07	2.90	4.81	1.45

de formule volgens OSANN:

	s	A	C	F	a	c	f	n	m	k	Reeks
(OSANN)	79.46	6.26	3.63	—	12.66	7.34	—	7.7	—	1.73	*av*
(BECKE)	79.46	6.26	2.90	0.73	12.66	5.86	1.48		(10.0)		

Men heeft hier het zeldzame geval, dat $Al_2O_3 > K_2O + Na_2O + CaO + (Mg,Fe)O$. Voegt men met OSANN MgO en FeO in het molekuul (MgFe) Al_2O_4 bij C, dan blijft er nog een overschot van 0.77 Al_2O_3; verwaarloost men echter met BECKE het Al_2O_3 surplus boven $(K,Na)_2O + CaO$, gelijk aan 1.50, dan wordt $C = 2.90$ en $F = 0.73$. De berekening van $a + c + f = 30$ levert:

	a	c	f
(OSANN)	18.99	11.01	—
(BECKE)	18.99	8.79	2.22

In de graphische voorstelling geeft IV de plaats van het gesteente aan; de gevulde cirkel de waarden volgens OSANN, de ongevulde die volgens BECKE.

Wiskunde. — De Heer D. J. KORTEWEG biedt eene mededeeling aan van den Heer J. A. BARRAU: „*Over de combinatorische Opgave van* STEINER."

(Mede aangeboden door den Heer JAN DE VRIES).

In hare meest algemeene gedaante luidt deze opgave:

voor welke waarden van n, en op hoeveel wezenlijk verschillende [1]) *wijzen, is het mogelijk een aantal combinaties p aan p van n elementen op te schrijven zóódanig, dat daarin alle combinaties q aan q dier elementen, elk éénmaal, voorkomen?*

Eene meetkundige inkleeding der vraag is:

welke combinatorische configuraties, welker punten R_0 worden voor-

[1]) D.w.z. die niet door substituties der *n* elementen in elkander overgaan.

gesteld door de combinaties q aan q van n letters, terwijl de combinaties p aan p hare R_{p-q} voorstellen, bezitten systemen van R_{p-q}, die alle punten der Cf., elk éénmaal, bevatten, en hoeveel typen van zulke systemen zijn er in elk bepaald geval?

De eerste vraag gaf aanleiding tot onderzoekingen voor $p = 3$, $q = 2$, de *tripelstelsels* (KIRKMAN, REISS, NETTO, MOORE, HEFFTER, BRUNEL [1])); de tweede vraag wordt besproken door J. DE VRIES [2]) en CARP [3]).

Hier worden eenige resultaten medegedeeld voor $p > 3$, $q > 2$. Wij houden ons daarbij aan den eersten vorm der vraag en noemen een systeem als het daarin verlangde een $S(p, q), n$.

Als men in een $S(p, q), n$ alle p-tallen, die eene bepaalde willekeurig gekozen letter gemeen hebben, afzondert, en hieruit die letter weglaat, ontstaat een $S(p-1, q-1), n-1$; bij herhaling der bewerking een $S(p-2, q-2), n-2$ en zoo vervolgens; de mogelijkheid van een $S(p, q)$ vóóronderstelt dus die eener reeks systemen van lageren rang [4]), welke reeks men kan afbreken bij

$$S(p - q + 2, 2), \; n - q + 2$$

Omgekeerd worden alle denkbare systemen verkregen door aanvulling van systemen, welke aanvangen met $q = 2$.

Zoo laten zich verwachten:

uit $S(3, 2), n = 7$:	$S(4, 3), n = 8$	A
uit $S(3, 2), n = 9$:	$S(4, 3), n = 10$	B
	$S(5, 4), n = 11$	C
	$S(6, 5), n = 12$	D

enz. Wij willen aantoonen, dat de vier genoemde systemen, *elk slechts in één type*, bestaan.

---

[1]) *Cambridge and Dublin Math. Journal* II, 1847; *Journal f. d. r. u. a. Mathem.* 56, 1859; *Mathem. Annalen* 42, 1893; 43, 1893; 49, 1897; 50, 1898; *Association française, Congrès de Bordeaux* 1895; *Journal de Liouville* (5) VII, 1901.

[2]) *Versl. en Meded. Kon. Akad. v. Wet.* 3e Reeks, VI, p. 13, 1889; *Mathem. Annalen* 34, 35, 1889, '90.

[3]) Proefschrift, Utrecht 1902, p. 38 en vlg.

[4]) Voor *elk* systeem dezer reeks moet worden voldaan aan de voorwaarde: $\binom{n}{q}$ deelbaar door $\binom{p}{q}$. Zoo zal er *geen* $S(6, 4), n = 15$ bestaan, hoewel $\binom{15}{4}$ deelbaar is door $\binom{6}{4}$, wegens de onmogelijkheid van een $S(5, 3), n = 14$: $\binom{14}{3}$ is niet deelbaar door $\binom{5}{3}$.

A. Een $S(4, 3)$, $n = 8$ bestaat uit $\binom{8}{3} : \binom{4}{3} = 14$ viertallen en is dus eene schematische Cf. $(8_7, 14_4)$. Voegt men aan de drietallen van een $S(3, 2)$, $n = 7$, dat is van eene Cf. (7_3) eene nieuwe letter toe, en kiest men van de zoo ontstane viertallen er eene uit, dan moeten in de gezochte aanvulling met zeven nieuwe viertallen de paren van het gekozen drietal elk nog tweemaal voorkomen, er blijft dus een nieuw viertal over, dat complementair is met het gekozene. Dit geldt voor elk viertal: de geheele aanvulling is dus complementair en slechts op ééne wijze mogelijk.[1])

B. Als men in een $S(4, 3)$, $n = 10$, dat is eene Cf. $(10_{12}, 30_4)$, een willekeurig viertal 1 2 3 4 uitkiest, komt elk paar dezer letters nog in drie andere viertallen voor; er zijn dus nog 18 zulke viertallen. Vervolgens komt elke enkele letter nog tweemaal voor, aangevuld met drietallen uit 5, 6, 7, 8, 9, 0, welke drietallen samen dus eene Cf. $(6_4, 8_3)$ vormen. Van het geheele systeem blijven dan slechts drie viertallen uit 5, 6, 7, 8, 9, 0 over, welke paarsgewijze hoogstens twee letters gemeen mogen hebben. Zulke stelsels van drie bestaan echter slechts in één type[2]), als:

5 6 7 8 ; 5 6 9 0 ; 7 8 9 0,

waarmede dus het te vormen systeem moet aanvangen. De acht hierin ontbrekende letterdrietallen vormen noodzakelijk de Cf. $(6_4, 8_3)$, welke slechts op ééne wijze in vier elkander aanvullende paren uiteenvalt. Vult men deze paren resp. aan met 1, 2, 3 en 4 (in welke volgorde is onverschillig), dan ontstaan de viertallen:

1 5 7 9 ; 2 5 7 0 ; 3 5 8 9 ; 4 5 8 0
1 6 8 0 ; 2 6 8 9 ; 3 6 7 0 ; 4 6 7 9.

De geheele verdere aanvulling is nu bepaald en *moet* luiden:

1 4 5 6 ; 1 2 5 8 ; 2 3 7 9 ;
2 3 5 6 ; 1 2 6 7 ; 2 3 8 0 ;
1 3 7 8 ; 1 3 5 0 ; 2 4 5 9 ;
2 4 7 8 ; 1 3 6 9 ; 2 4 6 0 ;
1 2 9 0 ; 1 4 7 0 ; 3 4 5 7 ;
3 4 9 0 ; 1 4 8 9 ; 3 4 6 8 .

Nu hiermede het bestaan van slechts één type verzekerd is, kunnen wij daaraan een eenvoudiger vorm geven, wij zullen dit op twee wijzen doen.

---

[1]) Het schema $(8_7, 14_4)$ wijst in het maatpolytoop B_8 de hoekpunten aan, die met het nulpunt en zijn overstaande hoekpunten samen een kruispolytoop C_8 vormen (*Nieuw Archief v. Wisk.* 2e Reeks, VII, p. 255).

[2]) Het complementaire eener indeeling van zes elementen in drie paren.

Vooreerst bedenken wij, dat het uit $S(4, 3)$, $n = 10$ afgeleide $S(3, 2)$, $n = 9$ *regulier commutatief* is (MOORE), d. w. z. dat zijne groep eene regelmatige commutatieve ondergroep bezit van het type:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	1	5	6	4	8	9	7
3	1	2	6	4	5	9	7	8
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	4	8	9	7	2	3	1
6	4	5	9	7	8	3	1	2
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	7	2	3	1	5	6	4
9	7	8	3	1	2	6	4	5

Inderdaad ontstaat een $S(3, 2)$, $n = 9$ als men bijv. de tripels

1 2 3 ; 1 4 7 ; 1 5 9 ; 1 6 8

aan alle substituties dezer groep onderwerpt.

Voegt men nu aan elk dezer twaalf drietallen eene 0 toe, en onderwerpt ook de viertallen:

1 2 4 5 en 1 2 6 9

aan de substituties der groep, dan ontstaan de $12 + 18 = 30$ viertallen van het $S(4, 3)$, $n = 10$.

Ten tweede merken wij op, dat het systeem cyclisch is en bijv. ontstaat door de viertallen:

1 2 3 7 ; 1 2 4 5 ; 1 3 5 8

aan den cyclus (1 2 3 4 5 6 7 8 9 0) te onderwerpen.

C. Kiest men uit een $S(5, 4)$, $n = 11$, dat is eene Cf. $(11_{10}, 66_5)$ een vijftal 1 2 3 4 5, dan moeten alle drietallen daarvan nog driemaal, alle paren bovendien nog tweemaal, de enkele letters daarna nog driemaal voorkomen, waarmede de $10 \times 3 + 10 \times 2 + 5 \times 3 = 65$ overige vijftallen van het systeem zijn uitgeput. De enkele letters worden aangevuld met viertallen uit 6, 7, 8, 9, 0, a, welke hoogstens drie letters gemeen mogen hebben en te samen eene Cf. $(6_{10}, 15_4)$ vormen, bestaande uit vijf $(6_2, 3_4)$ als in B voorkwamen. Hiervan bestaat echter slechts één type [1]), zoodat het $S(5, 4)$ bijv. aanvangt met:

1 8 9 0 a	2 7 9 0 a	3 7 8 0 a	4 7 8 9 a	5 7 8 9 0
1 6 7 0 a	2 6 8 9 a	3 6 8 9 0	4 6 8 0 a	5 6 9 0 a
1 6 7 8 9	2 6 7 8 0	3 6 7 9 a	4 6 7 9 0	5 6 7 8 a

[1]) Afgeleid uit het bekende stelsel van vijf driedeelingen van zes elementen van SERRET.

De verdere samenstelling is nu bepaald en *moet* luiden:

1 2 6 9 0	1 4 6 9 *a*	2 3 6 0 *a*	2 5 6 7 9	3 5 6 7 0
1 2 7 8 *a*	1 4 7 8 0	2 3 7 8 9	2 5 8 0 *a*	3 5 8 9 *a*
1 3 6 8 *a*	1 5 6 8 0	2 4 6 7 *a*	3 4 6 7 8	4 5 6 8 9
1 3 7 9 0	1 5 7 9 *a*	2 4 8 9 0	3 4 9 0 *a*	4 5 7 0 *a*
1 2 3 6 7	1 2 5 6 *a*	1 3 5 6 9	2 3 4 6 9	2 4 5 6 0
1 2 3 8 0	1 2 5 7 0	1 3 5 7 8	2 3 4 7 0	2 4 5 7 8
1 2 3 9 *a*	1 2 5 8 9	1 3 5 0 *a*	2 3 4 8 *a*	2 4 5 9 *a*
1 2 4 6 8	1 3 4 6 0	1 4 5 6 7	2 3 5 6 8	3 4 5 6 *a*
1 2 4 7 9	1 3 4 7 *a*	1 4 5 8 *a*	2 3 5 7 *a*	3 4 5 7 9
1 2 4 0 *a*	1 3 4 8 9	1 4 5 9 0	2 3 5 9 0	3 4 5 8 0

Een eenvoudigen vorm van het systeem[1]) verkrijgt men door de vijftallen:

1 2 3 4 0; 1 2 3 5 8; 1 2 3 6 7;
1 2 4 5 9; 1 2 4 6 8; 1 2 5 7 0

te onderwerpen aan den cyclus:

(1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 *a*).

D. Door eene redeneering, analoog als onder *A*, blijkt, dat $S(6,5), n = 12$, dat is eene Cf. $(12_{66}, 132_6)$ noodzakelijk ontstaan moet zijn door *complementaire* aanvulling van $S(5,4), n = 11$ en dus slechts in één type voorkomt.

In het algemeen ontstaat door complementaire aanvulling uit elk

$$S(p = q + 1, q),\ n = 2q + 3$$

een

$$S(p = q + 2, q + 1), n = 2q + 4.$$

Overgaande tot systemen $S(p,q = 2)$, n voor willekeurige p[2]), merken wij op, dat voor hun bestaan ten minste noodig is:

$$\frac{n(n-1)}{1.2} \text{ deelbaar door } \frac{p(p-1)}{1.2}$$

en

$$n-1 \text{ deelbaar door } p-1,$$

welke voorwaarden alleen worden vervuld door de beide getallenreeksen:

$$\begin{array}{ll} I & n = p(p-1).x + 1 \\ II & n = p(p-1).x + p \end{array} \Bigg\} x = 0,1,2,\ldots\ldots$$

[1]) Een $S(5,4)$, $n = 11$ werd gegeven door Lea (*Educ. Times* IX), de methode waarop dit werd samengesteld is mij onbekend, daar deze publicatie niet in mijn bereik was; het systeem moet echter van hetzelfde type zijn. Wij merken nog op, dat het, om dit te bewijzen, niet voldoende is aan te voeren dat alle resten een vast type vertoonen, verg. Martinetti (*Annali di Matem.* (2) XV). Hetzelfde geldt trouwens voor *A*, *B* en *D*.

[2]) Deze $S(p,2)$ zijn wel te onderscheiden van de systemen van Brunel, waarin elk p-tal wordt beschouwd als alleen de p paren van op elkander volgende elementen bevattend. (*Proc. Verb. Soc. de Bordeaux*, 1895/96, p. 58 en 1898/99, p. 59, 71).

De term $x = 0$ is in I zonder beteekenis, in II geeft hij te kennen, dat men bij het opschrijven aller $n = p$ letters vanzelf alle paren dier letters heeft opgeschreven. Dit systeem $II, x = 0$ zal in het volgende nog van dienst zijn.

Wij geven nu eerst uitbreiding aan het *multiplicatie-theorema* van NETTO (l.c. § 3), dat den vorm aanneemt:

Uit een $S(p,2), n_1$ *en een* $S(p,2), n_2$ *laat zich een* $S(p,2), n_1 n_2$ *afleiden, indien men beschikt over een stelsel van* $p(p-1)$ *permutaties van* p *elementen, waarin nimmer een tweetal elementen dezelfde plaats inneemt.*

Immers, zijn de elementen der beide systemen resp. $a_k (k = 1,2 \ldots . n_1)$ en $b_l (l = 1,2, \ldots . . n_2)$, dan kan men $n_1 n_2$ nieuwe elementen aanduiden door $c_{k,l}$. Van deze elementen vormt men nu *drie* soorten van p-tallen, namelijk:

1°. uit *elk* p-tal $a_1 a_2 \ldots . a_p$ nieuwe p-tallen:

$$c_{1,l}, c_{2,l}, \ldots , . c_{p,l} \quad (l = 1,2 \ldots . . . . n_2);$$

2°. uit *elk* p-tal $b_1 b_2 \ldots . b_p$ nieuwe p-tallen:

$$c_{k,1}, c_{k,2}, \ldots . . . . c_{k,p} \quad (k = 1,2 \ldots . . . . n_1);$$

3°. uit *elk* p-tal $a_1 a_2 \ldots . a_p$, gecombineerd met *elk* p-tal $b_1 b_2 \ldots . b_p$ nieuwe p-tallen:

$c_{1,l_1}, c_{2,l_2} \ldots . . . . c_{p,l_p}$, waarin $l_1 \ldots . . . . l_p$ telkens dezelfde zijn als de indices $1 \ldots . p$ van het p-tal der b, doch $p-1$ maal van volgorde verschillen volgens de $p-1$ permutaties van het beschikbaar gedachte stelsel van permutaties.

Het is duidelijk, dat op deze wijze nooit een tweetal der nieuwe elementen meer dan eens kan optreden, terwijl het aantal gevormde p-tallen bedraagt:

$$n_2 \frac{n_1(n_1-1)}{p(p-1)} + n_1 \frac{n_2(n_2-1)}{p(p-1)} + p(p-1) \frac{n_1(n_1-1)}{p(p-1)} \cdot \frac{n_2(n_2-1)}{p(p-1)} = \frac{n_1 n_2 (n_1 n_2 - 1)}{p(p-1)}$$

zoodat inderdaad een $S(p,2), n_1 n_2$ gevormd is.

Nu beschikt men over zulk een permutatie-systeem, als:

1) $p = 4$: de twaalf even permutaties;

2) p *priem*, het systeem bestaat dan uit:

$$(1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots . . . . p)_{cyc.}$$
$$(1,\ 3,\ 5,\ 7 \ldots . . . . p-1)_{cyc.}$$
$$(1,\ 4,\ 7,\ 10 \ldots . . . .)_{cyc.}$$
$$\ldots . . . . . .$$
$$(1,\ p,\ p-1,\ p-2 \ldots 2)_{cyc.}\ ^{1}).$$

[1]) Zie bijv BRUNEL, *Proc. Verb. Soc. de Bordeaux* 1894/95, p. 56 of AHRENS. *Mathematische Unterhaltungen*, p. 272: „Promenaden von n^2 Personen zu je n". Het is niet uitgemaakt of ook andere waarden van p eene oplossing toelaten.

(Voor $p = 3$ bevat het systeem juist de volledige groep en ontstaat het theorema van NETTO).

Wij hebben dus:

De uitvoerbaarheid der multiplicatie is verzekerd voor $p = 4$ of priem.

Door nu als factoren te nemen $n_1 = n_2 = p$, dus term $II, x = 0$, verkrijgen wij:

Voor $p = 4$ of priem is het bestaan van $S(p,2)$, $n = p^2$ verzekerd.

Zulk een systeem, term II, $x = 1$, is, als Cf.-schema beschouwd, eene Cf. $\{p^2_{p+1}, p(p+1)_p\}$; hare p-tallen laten zich in $(p+1)$ hoofdgroepen van p indeelen, welke elk alle p^2 elementen bevatten.

Wij kunnen nu ook uitbreiding geven aan een ander theorema van NETTO (l.c. § 2), dat den vorm aanneemt:

Uit een $S(p, 2)$, n laat zich een $S(p, 2)$, $(p-1)\,n + 1$ afleiden, indien men beschikt over een schema van $(p-1)^2$, onderling niet meer dan één element gemeen hebbende, p-tallen uit $p(p-1)$ elementen, welke elementen in p hoofdgroepen van $(p-1)$ moeten kunnen uiteenvallen.

Immers, men kan dan aan de elementen $a_{1,1}, a_{1,2} \ldots a_{1,n}$ van het gegeven stelsel $(p-2)$ reeksen van nieuwe toevoegen:

$$\begin{array}{l} a_{2,1}\ ,\ a_{2,2}\ ,\ \ldots\ a_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p-1,1}\ ,\ a_{p-1,2}\ ,\ \ldots\ a_{p-1,n}\ , \end{array}$$

benevens een laatste element a_0.

Voor elk p-tal van het gegeven systeem vorme men nu uit de $p(p-1)$ elementen met dezelfde tweede indices een schema als het in de stelling bedoelde, zorgende dat steeds de $(p-1)$ elementen met gelijken tweeden index eene hoofdgroep vormen. Ten slotte voege men aan elke hoofdgroep het element a_0 toe, waardoor ook deze hoofdgroepen tot p-tallen zijn aangevuld. Het is duidelijk, dat de gevormde p-tallen twee aan twee ten hoogste één element gemeen kunnen hebben, terwijl hun aantal bedraagt:

$$(p-1)^2 \cdot \frac{n(n-1)}{p(p-1)} + n = \frac{\{(p-1)\,n+1\}\{(p-1)\,n\}}{p(p-1)},$$

zoodat een $S(p, 2), (p-1)\,n + 1$ gevormd is.

De uitvoerbaarheid der methode hangt nu af van de aanwezigheid van een schema:

$$\{p(p-1)_{p-1}\ ,\ (p-1)^2_p\}$$

of p door $p-1$ vervangend,

$$\{p(p+1)_p\ ,\ p^2_{p+1}\},$$

doch dat is juist de notatie van het hierboven genoemde $S(p, 2)$, $n = p^2$, mits men in het diagram daarvan rijen en kolommen verwisselt. Het voldoet bovendien aan de verdere voorwaarden, wij hebben dus:

De afleiding van een $S(p,2)$, $(p-1)n+1$ *uit een* $S(p,2)$, n *is verzekerd, als* $p = 5$ *of een priemgetal* $+ 1$ *is.*

Past men dit toe op $n = p$, dan komt:

Het bestaan van $S(p, 2)$, $n = p(p-1)+1$ *is verzekerd voor* $p = 5$ *of een priemgetal* $+ 1$.

Deze systemen vormen den term I, $x = 1$; als Cf.-schema's zijn ze Cff. $\{p(p-1)+1_p\}$.

Het is duidelijk, dat hare resten naar één element weer worden tot $S(p-1, 2)$, $n = (p-1)^2$, dat is tot term II, $x = 1$ uit de reeks der $p-1$.

In cyclischen vorm heeft men voor het eerste drietal:

$n = 13$, $p = 4$: (1, 2, . . 5, . . 7) cyc.
$n = 21$, $p = 5$: (1, 2, . . 5, . . 15, . . 17 . .) cyc.
$n = 31$, $p = 6$: (1, 2, . . 5, . . 7 . . 14, . . 22 . .) cyc. [1])

Ten slotte gaan wij over tot het opstellen van een $S(4, 2,)$ $n=15$,

Als Cf. is het systeem eene Cf. $(25_8, 50_4)$, de rest naar elk viertal is eene Cf. (21_4). Deze moet de eigenschap bezitten, dat de onverbonden elementen tot drietallen kunnen worden saamgevoegd, zoodat daaruit eene Cf. $(21_4, 28_3)$ ontstaat, welke in vier hoofd-7-zijden uiteenvalt. [2]) Door dan de zeven lijnen van zulk eene 7-zijde telkens naar één punt convergent en de vier convergentie-punten collineair te denken, ontstaat de verlangde Cf. $(25_8, 50_4)$.

Men verkrijgt eene oplossing door aan den cyclus

(1, 2, 3, . . . 21)

te onderwerpen:

1, . . 3, . . 9, . . 12;
1, . . 8, . . 15 , (aangevuld met 22);
1, . . 2, . . 6 , (om beurten aangevuld met 23, 24 en 25);

en dan ten slotte toe te voegen:

22, 23, 24, 25.

Op gelijke wijze zal in het algemeen een

---

[1]) Verg. E. Malo, *Interm. des Mathém* XVI, p. 63). De daar voor elke p gegeven $2p$ cyclen zijn onderling identisch en leveren dus telkens slechts één type.

[2]) Verg. eene vorige mededeeling in deze *Versl.* p. 274. Het is mij intusschen gebleken, dat het daar gegeven resultaat, voorzoover $n = 13$ betreft, op ongeveer dezelfde wijze verkregen werd door Brunel (*Journal de Liouville*, 1901), en reeds in 1899 door de Pasquale, *Rendic. R. Inst. Lombardo* (2) 32, p 213.

$$S(p, 2),\ n = 2p(p-1) + 1,$$

dat is eene $\quad$ Cf. $\{2p(p-1) + 1_{2p},\ 4p(p-1) + 2_p\}$,

bestaan uit eene

$$\text{Cf. } \{(2p-1)(p-1)_p\},$$

welker ontbrekende elementenparen zich laten vereenigen tot $(p-1)$-tallen zoodat eene

$$\text{Cf. } \{2p(p-1)_p,\ p(2p-1)_{p-1}\}$$

gevormd wordt, die in p hoofd-$(2p-1)$-zijden uiteenvalt.

Daar in de reeks $p = 4$, evenals voor $p = 3$, de beide uitbreidingen der theorema's van NETTO van toepassing zijn, kan men, in het eerste honderdtal, systemen $S(4, 2)$ vormen voor:

$$n = 13,\ 25,\ 49;\ 4,\ 16,\ 40,\ 52,\ 64,\ 76,\ 100.$$

De nog ontbrekende waarden zijn:

$$n = 37,\ 61,\ 73,\ 85,\ 97;\ 28,\ 88,$$

waarvan 85 door 28 zou kunnen worden verkregen.

Scheikunde. — De heer HOLLEMAN hield, mede namens den heer J. J. POLAK, eene mededeeling aan *over de bromeering van toluol.*

Na het onderzoek van VAN DER LAAN (Rec. **26**., 1) [1]) is er eene uitvoerige verhandeling over dit onderwerp verschenen van de heeren BRUNER en DLUSKA (Bull. de l'acad. des sciences de Cracovie, Juillet 1907).

Zij brachten broom en toluol in toegesmolten buizen samen en bestudeerden het tijdelijk verloop der reactie. Daarbij bleek een zeer opvallend feit; de verhouding, waarin broomtoluol en benzylbromied ontstaat, was afhankelijk van de concentratie waarin broom en toluol oorspronkelijk werden samengebracht.

Hierdoor was een zeer opvallend resultaat verklaard, dat VAN DER LAAN bij de verdere doorvoering zijner proeven had gevonden; terwijl hij n.l. vroeger bij de bromeering van toluol in het donker bij 50° de vorming van 43.7 % benzylbromied konstateerde, vond hij later gemiddeld 56.6 %; maar toen had hij 2.5 cM³ broom op 50 cM³ toluol gebruikt, terwijl hij vroeger 3 cM³ broom had toegevoegd.

Daar BRUNER en DLUSKA in toegesmolten buizen, V. D. LAAN in een open kolf had gebromeerd, de eersten daarenboven dit opvallende

[1]) Zie ook deze Verslagen Deel XIV, 439 [1905].

feit enkel bij 25° hadden geconstateerd, was het noodig hunne proeven in een open kolf te herhalen en bij verschillende temperaturen. Het resultaat daarvan is in onderstaande tabellen samengevat.

	Mol. toluol op 1 mol Br_2	% benzylbromied in het reactieprod.
Temp 50°	4.26	24.1
	8.00	42.3
	8.47	45.3
	10.47	56 2
	13.40	67.0
	20.60	82.5
	28.55	95.3

	Mol. toluol op 1 mol Br_2	% benzylbromied in het reactieprod.
Temp. 25°	4.7	7.9
	8.0	10.6
	16.6	20.1
	25.5	36.5

Bij al deze proeven werd de inwerking voortgezet totdat het broom geheel verbruikt was.

De verhouding, waarin *o*- en *p*-broomtoluol bij verschillende verdunningen ontstaan, verandert slechts weinig, zooals uit onderstaande tabel blijkt:

Temp.	Mol. toluol op 1 mol Br_2	Stolp. v/h mengsel o + p	% broomtoluol ortho	para
50°	8.00	1°.1	42	58
	10.47	0°.1	43.7	56.3
25°	4.7	2°.4	39.8	60.2
	8.0	2°.5	39.7	60 3

Ook bij deze proeven is de reactie geheel ten einde gevoerd.

Ter verklaring van het merkwaardige, boven op nieuw bevestigde feit, dat de verhouding benzylbromied: broomtoluol van de concentratie afhangt waarin broom en toluol tot inwerking gebracht worden,

zou men de volgende onderstelling kunnen maken: het primaire inwerkingsprodukt zij benzylbromied; dit worde door katalysatoren, zooals jodium, $SbBr_3$, $FeBr_3$, $AlBr_3$ in broomtoluol omgezet. Als het broom in grootere concentratie werkt, zoude het als autokatalysator kunnen fungeeren; bij groote verdunning zoude dan die autokatalyse nagenoeg niet bestaan. Om deze onderstelling te bewijzen droeg ik den heer EUWES op, de inwerking van genoemde katalysators op broombenzyl te bestudeeren.

1. *$FeBr_3$ als katalysator.* 7.174 gr. broombenzyl werd in 50 cM³ toluol opgelost en er 0,037 gr $FeBr_3$ aan toegevoegd. De temperatuur van het mengsel werd in volslagen duisternis gedurende 3 dagen op 50° gehouden. Na dit tijdverloop was bijna alle broom in den vorm van HBr afgesplitst; er was *p*- benzyltoluol ontstaan.

2. $SbBr_3$ *als katalysator.* 21.834 gr. broombenzyl, 100 cM³. toluol en 5.940 gr. $SbBr_3$ werden gedurende 3 dagen in volslagen duisternis op 50° gehouden. Slechts ca. 5 °/₀ broombenzyl was aangegrepen, doch niet in broomtoluol omgezet. Want toen het onveranderde broombenzyl met dimethylanilien was weggenomen (zie Rec. **26**, 18) bleef er een weinig vloeistof over, die bij — 50° nog niet vast was en een broomgehalte van 50.9 °/₀ had, terwijl voor C_7H_7Br 46.78°/₀ wordt berekend. Er zijn dus in geringe hoeveelheid hooger gebromeerde produkten ontstaan,

3. *Br_2 zelf als katalysator.* Het was altijd nog mogelijk, dat broom zelf de omzetting van broombenzyl in broomtoluol bewerkte, waartoe de andere katalysatoren niet in staat waren. Om dit na te gaan heeft de heer EUWES 4.169 gr. broombenzyl, 50 cM³ toluol en 1.3 cM³ broom bij 50° in het donker samengebracht. Na 3 dagen was het broom verdwenen en had zich 4.207 gr. C_7H_7Br gevormd. De totale hoeveelheid broombenzyl werd bepaald op 7.405 gr. Er was dus nieuw gevormd 7.405—4.169 = 3.236 gr., zoodat het reactieprodukt $\frac{3.236}{4.207} \times 100 = 79.3$ °/₀ broombenzyl bevatte. Uit bovenstaande tabellen blijkt, dat onder deze omstandigheden, zonder voorafgaande toevoeging van broombenzyl, 81 °/₀ daarvan ontstaat. Het toegevoegde broombenzyl is dus door broom evenmin in broomtoluol omgezet.

De onderstelling van autokatalyse moet dus worden opgegeven. BRUNER l.c. heeft de meening geuit, dat de moleculen broom de substitutie in de CH_3-groep, atomen of ionen broom de substitutie in de kern zouden veroorzaken, waarbij dan eene (uiterst minieme) splitsing van het broommolecule wordt ondersteld. Ook BANCROFT, Journ. phys. chem. **12**,439 heeft eene soortgelijke onderstelling gemaakt. De experimenteele grondslag daarvan is eene waarneming van J. B.

COHEN, DAWSON en CROSSLAND, Soc. 87,1034 (1905) volgens welke elektrolytisch ontwikkeld chloor uitsluitend substitueerend op de kern zoude werken onder omstandigheden die met gewoon chloor aanzienlijke hoeveelheden benzylbromied doen ontstaan. Daar wij bij het nauwkeuriger bestudeeren van hunne resultaten aan de juistheid daarvan meenden te moeten twijfelen, herhaalden wij hunne proeven, enkel HBr.aq in plaats van zoutzuur elektrolyseerende. Het bleek ons hierbij, dat ook met elektrolytisch ontwikkeld broom aanzienlijke hoeveelheden broombenzyl werden verkregen, zooals door eene verbeterde methode van onderzoek van het reactieprodukt kon worden bewezen. Ook bleek de waterstof, die zich bij de electrolyse tevens ontwikkelt, in staat te zijn, langzaam broombenzyl te ontbroomen.

Eene andere hypothese ware dat broom zich met het gevormde HBr verbindt tot lichamen HBr_n die de kernsubstitutie zouden kunnen bewerken, terwijl de vrije molekulen broom de zijketen aantasten. Dat HBr zich met broom vereenigt, is op grond van verschillende waarnemingen zeer waarschijnlijk te achten. Ofschoon ook deze hypothese bij hare nadere uitwerking nog vele moeielijkheden overlaat, hebben wij in elk geval den buitengewoon grooten invloed kunnen aantoonen, dien de aanwezigheid van HBr op de verhouding broom-toluol: benzylbromied uitoefent. Omdat HBr slechts weinig in toluol oplost hebben wij proeven gedaan met HBr-ijsazijn en in dit milieu toluol gebromeerd. IJsazijn wordt, onder de omstandigheden waaronder wij werkten, door broom nagenoeg niet aangegrepen.

25 cM^3 toluol, 100 cM^3 met HBr verzadigd ijsazijn en 1.5 cM^3 broom werden in een kolf van WURTZ ingesmolten en op een waterbad in het volle zonlicht verwarmd. Er was slechts 13 % broombenzyl ontstaan, terwijl zonder HBr-ijsazijn zich onder deze omstandigheden 100 % broombenzyl vormen.

Dezelfde proef werd gedaan, waarin enkel het HBr-ijsazijn door ijsazijn was vervangen. Thans was 68 % broombenzyl gevormd, hetgeen aantoont dat ijsazijn alleen ook reeds veel minder broombenzyl doet ontstaan.

In de derde plaats werd 80 cM^3 HBr-ijsazijn met 20 cM^3 toluol en 1.3 cM^3 broom ingesmolten en gedurende 6 dagen in volslagen duisternis op 49° verwarmd. Alle broom was verdwenen en er had zich slechts 4 % broombenzyl gevormd, terwijl zich onder deze omstandigheden uit toluol en broom alleen 41 % daarvan zoude gevormd hebben.

Eene uitvoerige mededeeling omtrent deze onderzoekingen zal in het Recueil verschijnen.

Amsterdam, Org. Chem. lab. d. Univ. October 1908.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer O. POSTMA: „*Over de Kinetische afleiding van de Tweede Hoofdwet der Thermodynamica.*"

(Mede aangeboden door den Heer v. D. WAALS).

§ 1. In een vorige mededeeling[1]) heeft schrijver dezes getracht aan te geven, hoe men zich kan voorstellen, dat een ensemble van molecuul-systemen alleen kinetische energie bezittende langzamerhand overgaat naar een toestand, waarbij alle plaats-combinaties en tevens alle snelheidscombinaties der moleculen even dikwijls voorkomen. In dien eindtoestand zullen, zooals werd aangetoond, voor de groote meerderheid der systemen van het ensemble de moleculen ongeveer gelijkmatig over het vat verdeeld zijn en de MAXWELL'sche snelheidsverdeeling bezitten.

Deze uitkomst behoeft echter nog eenige aanvulling.

Daar het vraagstuk der plaatsverdeeling en dat der snelheidsverdeeling geheel afzonderlijk behandeld werden, beteekent de bovenbedoelde uitkomst alleen dit, dat tenslotte de moleculen *voor alle snelheden samen* gelijkmatig over het vat verdeeld zullen zijn en dat ze *voor het vat als geheel beschouwd* de MAXWELL'sche snelheidsverdeeling zullen bezitten. Dit is echter nog niet wat men gewoonlijk onder gelijkmatige verdeeling over het vat en MAXWELL'sche snelheidsverdeeling verstaat; daarmee bedoelt men, dat ook reeds voor een beperkt snelhedenbedrag de moleculen ongeveer gelijkmatig over het vat verspreid zullen zijn en dat ook reeds voor een beperkt deel van het vat de Maxwellsche snelheidverdeeling ongeveer zal bestaan. Wij moeten dus nu nog de vraag stellen, hoe ook dit resultaat verkregen zou kunnen worden.

Vooreerst zij dan opgemerkt, dat men bij een canonisch of microcanonisch ensemble inderdaad de gelijkmatige plaatsverdeeling en Maxwellsche snelheidsverdeeling in den laatst bedoelden vorm verkrijgt. Voor het canonisch ensemble is dit zeer gemakkelijk in te zien. Ook echter bij een microcanonisch ensemble, waar de talrijkheid van zekere plaats- en snelheidsverdeeling evenredig is met het aantal daarbij mogelijke verwissellingen, is dit het geval. Men kan dit aantal verwisselingen brengen in den vorm $Ce^{-\iint f \log f \, do d\omega}$ op dezelfde wijze als het, wanneer alleen op de snelheidsverdeeling gelet wordt, gebracht wordt in den vorm $Ce^{-\int f \log f \, d\omega}$. In het

[1]) Verslagen der Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, Dl. 16, p. 332.

meest voorkomende systeem is dus $-\iint f \log f \, do d\omega$ of $-H$ maximaal. Dit is bij gegeven kinetische energie het geval, als $f = ae^{-b(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}$ waarbij a en b werkelijke constanten zijn, zoodat in ieder klein deel van het vat bij dat systeem de MAXWELL'sche verdeeling bestaat en ook voor één bepaalde snelheidssoort de dichtheid over het vat standvastig is. Dat voor de groote meerderheid der systemen de plaats- en snelheidsverdeeling weinig van de maximaal voorkomende afwijkt kan men op dezelfde wijze aantoonen als dit aangetoond wordt, wanneer men de plaats- en snelheidsverdeeling afzonderlijk beschouwt.

Nu is het echter gemakkelijk in te zien, dat men, als er wel geen microcanonisch ensemble ontstaat maar een ensemble, waarbij voor eindige maar kleine extensie-elementen de gemiddelde dichtheid standvastig wordt, men bij benadering het resultaat zal verkrijgen, dat men bij een microcanonisch ensemble heeft, n.l. gelijkmatige verdeeling over het vat en MAXWELL'sche snelheidsverdeeling, en wel met meer nauwkeurigheid, naarmate de elementen kleiner zijn. Wij zullen dus een kinetische afleiding van de 2de hoofdwet bezitten, als we kunnen aantoonen dat een willekeurig ensemble van systemen met bepaalde kinetische energie in zulk een „grof" microcanonisch ensemble overgaat. Hiermee zijn we dus toch weer teruggevoerd tot de door POINCARÉ „entropie grossière" betitelde grootheid, want als Π, de gemiddelde dichtheid over de elementen δ, constant wordt, neemt $\Sigma \, \Pi \log \Pi \, . \, \delta$ of de entropie grossière af. Het komt mij voor dat men dit op den duur constant worden van Π op de volgende wijze zou kunnen aantoonen.

In de eerste plaats zij nog eens beschouwd het ensemble van planeten of één-dimensionaal bewegende moleculen besproken in § 2 en § 3 van bovengenoemd artikel. Er werd aangetoond, dat dit ensemble zich zoo beweegt, dat ten slotte alle plaatsen evenveel voorkomen. Dit was het geval voor alle snelheden samen en geschiedde juist door dat bij de systemen allerlei snelheden voorkwamen. Als men echter het totale bedrag, waarover de snelheden van de systemen (planeten of moleculen) zich uitstrekken, in kleine maar eindige bedragen verdeelt, zal het ook nog gelden voor die bedragen afzonderlijk, als men den tijd maar groot genoeg neemt. Wanneer deze bedragen zich uitstrekken van ω_1 tot $\omega_1 + \Delta\omega_1$ van $\omega_1 + \Delta\omega$ tot $\omega_1 + 2\Delta\omega$ enz. zullen dus ten slotte de systemen met snelheden gelegen tusschen ω_1 en $\omega_1 + \Delta\omega$ gelijkelijk verdeeld zijn over alle waarden l gelegen tusschen 0 en 2π; evenzoo de systemen met snelheden tusschen $\omega_1 + \Delta\omega$ en $\omega_1 + 2\Delta\omega$ enz. Ieder der horizontale

boven elkaar gelegen strookjes van fig. 1 bevat dus dan een zelfde aantal voorstellende punten.

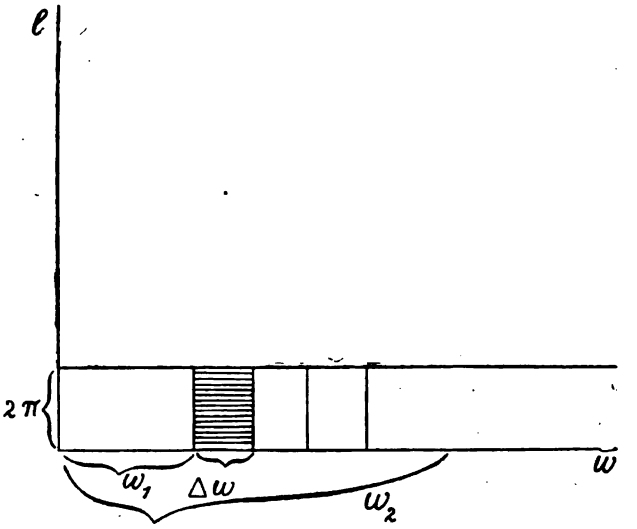


Fig. 1.

Wanneer men in plaats van een ensemble van telkens één planeet of één molecule een ensemble van telkens n moleculen neemt, maar de botsingen verwaarloost, zal men geheel dezelfde redeneering kunnen toepassen. Het geheel der voorstellende punten beweegt zich nu echter in een $6n$-dimensionale ruimte en in plaats van de lengte-as en snelheden-as komen nu de coördinaten-ruimte en de snelheden-ruimte.

plaatscomb.

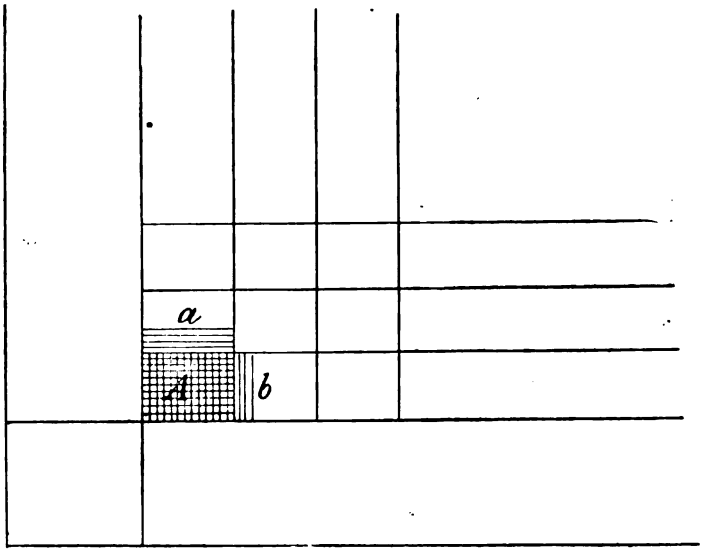


Fig. 2. snelheidscomb.

Ook als men de botsingen niet verwaarloost, zal men in de oogenblikken tusschen de botsingen in een beweging van het ensemble hebben in de aangegeven richting dus naar den toestand met gelijke gemiddelde dichtheid in de smalle strooken, zich in de lengte uitstrekkende over een kleinen maar eindigen afstand begrensd door dezelfde snelheidscombinaties (symbolisch voorgesteld door de horizontale strooken *a* van (fig. 2). Tengevolge van de botsingen echter nadert de gemiddelde dichtheid in smalle verticale strooken tot gelijkheid. Deze strooken behoeven zich ook weer niet over het geheele bedrag van mogelijke plaatscombinaties uit te strekken, maar het naderen tot gelijkheid bestaat ook over eindige kleine deelen van dit bedrag (de strooken *b*). Wat gebeurt nu als beide werkingen tegelijk plaats vinden? Bij de botsing verspringen de voorstellende punten in horizontale richting, waardoor de verdeeling in de strooken *a* gewijzigd wordt en de eerste werking, waardoor de samenstelling der strooken *a* gelijk zou worden, wordt tegengewerkt. Dit blijft ook, daar we de strooken *a* oneindig smal denken, voortdurend het geval; beschouwen we echter een element uit de fig., waarvan de horizontale afmeting door *a* en de verticale door *b* wordt aangegeven, (de rechthoek *A*) dan zal de samenstelling der boven elkaar gelegen elementen *A* ook door de eerste werking tot gelijkheid naderen, terwijl de storende invloed, dien de tweede werking daarop uitoefent, steeds minder zal worden en tot nul naderen. Wij mogen dus, naar mij toeschijnt, aannemen dat de gemiddelde dichtheid in de boven elkaar gelegen elementen *A* op den duur dezelfde wordt; dit zal echter evenzoo beredeneerd kunnen worden voor de in horizontale richting naast elkaar gelegen elementen (waarbij nu de tweede werking als de hoofd- en de eerste als de storende werking wordt beschouwd), zoodat men ten slotte een „grof"-microcanonisch ensemble krijgt. [1])

Is bovenstaande redeneering juist, dan hebben we het resultaat verkregen, dat ieder willekeurig ensemble van molecuulsystemen met zuiver kinetische energie zich beweegt naar een toestand, waar de gelijkmatige plaatsverdeeling en MAXWELL'sche snelheidsverdeeling hoofdzaak zijn. Intusschen moeten we aannemen, dat elk systeem op zich zelf een omkeerbare beweging heeft en na zekeren tijd weer zeer nabij den begintoestand zal komen en dit herhaaldelijk weer zal doen. Of

---

[1]) Er moet opgemerkt worden, dat aan GIBBS onrecht zou worden gedaan door voorbij te zien, dat deze in zijn Statistical Mechanics ook reeds op het constant blijven der entropie fine doelt, in tegenstelling met het afnemen van de entropie grossière, als hij bij het beeld van de gekleurde vloeistof zegt: „If treating the elements of volume as constant.... enz." (pag. 146).

de BOLTZMANN'sche $H = \iint f \log f \, do \, d\omega$ zal afnemen voor de meerderheid der systemen hangt van den begintoestand van het ensemble af.

Het is denkbaar, dat deze zóó is, dat de meerderheid der systemen *meer* nabij den ten slotte maximaal voorkomenden toestand is dan bij een microcanonisch ensemble het geval is; dan zou voor die systemen de H toe- inplaats van afnemen. Duidelijk is evenwel, dat bij een ensemble, dat een systeem voorstelt, waarin kortgeleden een of andere evenwichtsverstoring heeft plaats gehad, dit wel niet het geval zal zijn. Van zulk een systeem zal dus hoogstwaarschijnlijk H afnemen.

§ 2. Thans zij de vraag gesteld, welke plaats het bewijs van BOLTZMANN, dat $H = \iint f \log f \, do \, d\omega$ zou afnemen bij een *ongeordend* systeem, tegenover het bovenstaande en de daaraan voorafgaande redeneering inneemt. Bij zulk een ongeordend systeem schijnt H te *moeten* afnemen, wat toch bij één bepaald systeem, zooals ZERMELO en anderen hebben opgemerkt, moeilijk steeds het geval kan zijn en alleen als gemiddeld bij een ensemble voorkomende zou mogen worden aangenomen.

In de eerste plaats kan hieromtrent opgemerkt worden, dat volstrekt geen zekerheid bestaat, dat een systeem, dat op zeker oogenblik in een ongeordenden toestand verkeert voortdurend in zulk een toestand zal blijven verkeeren.

In de tweede plaats zullen de eigenschappen van een ongeordend systeem, zooals BOLTZMANN die bij het afleiden van de verandering der functie H door de botsing toepast (zie form. 17 en 105) bij één bepaald systeem alleen met eenige nauwkeurigheid kunnen voorkomen, als men de in deze formules voorkomende elementjes $d\omega$, $d\lambda$ enz. vrij groot neemt. Hiertegen zijn echter ook weer bezwaren (zooals, dat aangenomen wordt, dat de snelheidspunten bij botsing van twee moleculen steeds buiten de elementjes $d\omega$ en $d\omega_1$ geraken).

Onafhankelijk van de grootte der elementjes kan de eigenschap der ongeordendheid bij één bepaald systeem niet voorkomen, wel echter gemiddeld voor een geheel ensemble (of op den duur, als men de systemen uit een zeker ensemble willekeurig gegrepen denkt).

Dit ensemble wordt gevormd door het geheel der mogelijke systemen die men krijgt, als men aan de n moleculen van het systeem haar plaatsen en snelheden door het lot toebedeeld denkt, zoodat telkens de kans op zekere plaats- en snelheidscombinatie door een standvastige functie f van de coordinaten en snelheden wordt voorgesteld.

De meerderheid dezer systemen heeft, als n groot is, een plaats- en snelheidsverdeeling, waarvan het beloop in hoofdzaak door de functie f wordt aangegeven. Voor geen bepaald systeem komt precies uit, dat in de nabijheid van elke molecule het aantal moleculen van zekere soort bepaald zal zijn door de grootte van het beschouwde ruimte-element en de daar ter plaatse bestaande f, maar wel komt dit uit gemiddeld voor het geheele ensemble. We kunnen dus zeggen dat dit ensemble het „ongeordend" systeem van BOLTZMANN voorstelt. Voor dit ensemble zou dus gemiddeld $\frac{dH}{dt}$ negatief zijn.

Bij verdere vergelijking van BOLTZMANN's behandelingswijze met de uitkomsten van § 1 doet zich echter een belangrijk verschilpunt voor. Bij een willekeurig ensemble zal in het algemeen voor de meerderheid der systemen H afnemen als gevolg van het streven naar gelijkmatige dichtheid over de extensie-elementen in fig. 2 door A aangeduid. Dit streven kwam voort uit twee werkingen, waarvan de eerste gelijkmatige dichtheid gaf over de horizontale, de tweede over de verticale strooken. Men zou dus kunnen zeggen, dat het afnemen van H bewerkt wordt zoowel door de beweging van de moleculen (de eerste werking) als door de botsingen (de tweede werking). De coördinaten en de snelheden komen ook in H op dezelfde wijze voor.

Toch zegt BOLTZMANN uitdrukkelijk, dat de H alleen door de botsing kan afnemen [1]) en hij toont dit aldus aan:

De verandering van H binnen een vast oppervlak is bepaald door

$$\frac{d}{dt}\sum_{\omega,0} \log f = \iint do\, d\omega \left[\frac{\partial f}{\partial t} - \log f\left(\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z} + X\frac{\partial f}{\partial \xi} + Y\frac{\partial f}{\partial \eta} + Z\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)\right]$$
$$+ C_4(\log f) + C_5(\log f).$$

Laat men het vlak aan de wanden van het vat aansluiten, dan is de eerste term nul, de termen met X, Y en Z vervallen als men aanneemt, dat er geen uitwendige krachten zijn; C_4 en C_5 stellen de verandering door de botsing voor. De verandering door de beweging der moleculen is gelijk aan

$$-\iint do\, d\omega \log. f\left(\xi\frac{\partial f}{dx} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

BOLTZMANN toont nu aan, dat deze integraal gelijk is aan

$$\iint d\omega\, dS\, f N - \iint d\omega\, dS\, N f \log f$$

te integreeren over het oppervlak S, dat de beschouwde gasmassa insluit. Hieruit volgt, dat de toename in H ten gevolge van de beweging

[1]) Zie: Deel I, p. 126, noot.

gelijk is aan de hoeveelheid, die door de moleculen het vlak S wordt binnengedragen. Als men dus het gas aan zich zelf overlaat zal deze hoeveelheid nul zijn, zoodat H niet door de beweging maar alleen door de botsingen verandert [1]). Dit verschil in uitkomst zal ongetwijfeld zijn verklaring moeten vinden in het feit dat BOLTZMANN de „fijne" entropie beschouwt, terwijl boven de „grove" entropie beschouwd is. Als men de elementen do en $d\omega$ van eindige grootte neemt, zooals hier toch moet geschieden, mogen de berekeningen, waardoor de verandering in H tot een oppervlakte integraal wordt herleid, niet ongewijzigd worden overgenomen.

§ 3. Voor een kinetische afleiding van de 2e wet der thermodynamica is het noodig een grootheid kinetisch te definieeren, die in eigenschappen overeenkomt met de thermodynamische entropie. Deze eigenschappen zijn:

1. Bij omkeerbare veranderingen van den eenen evenwichtstoestand in den anderen is $\frac{dQ}{T}$ de differentiaal van een grootheid, die als entropie wordt gedefinieerd; 2. in een geïsoleerd systeem als geheel niet in evenwicht maar te verdeelen in deelen, die wel in evenwicht zijn, neemt de totale entropie toe. Wij hebben boven gezien, dat de door BOLTZMANN ingevoerde grootheid

$$H = \iint f \log f \, do \, d\omega$$

in het algemeen afneemt, ook als het systeem niet uit deelen bestaat, ieder voor zich in evenwicht. Als we dus een grootheid evenredig met $-H$ als entropie beschouwen, zal deze in de groote meerderheid der gevallen zeker aan den tweeden eisch voldoen. Wat den eersten eisch betreft, hieraan zal zooals door LORENTZ is aangetoond [2]) voldaan zijn, als men voor de constante, waarmee H vermenigvuldigd wordt, $-\frac{2}{3}\mu$ neemt, waarbij $\mu = \frac{\text{gem. kin. energie per mol.}}{\text{abs. temperatuur}}$. Voor een gas in den stationairen toestand is

$$f = Ce^{-\frac{3m}{4k}\left(\xi^2+\eta^2+\zeta^2\right)} = n\sqrt{\left(\frac{3m}{4\pi k}\right)^3} e^{-\frac{3m}{4k}\left(\xi^2+\eta^2+\zeta^2\right)}$$

zoodat

$$-\frac{2}{3}\mu H = -\frac{2}{3}\mu N\left(\log C - \frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\mu N \log v + \mu N \log \vartheta - \frac{2}{3}\mu N \log N - \mu N \log \frac{3m}{4\pi\mu} + \mu N$$

---

[1]) Vergelijk LORENTZ, „Abhandlungen über Theoretische Physik", Abhandl. VIII.

[2]) Zie l.c. Abhandlung VIII.

waarvoor LORENTZ schrijft

$$\frac{2}{3}\mu N \log v + \mu N \log \vartheta + C'.$$

Bij bepaalde temperatuur kunnen we dus ook voor H schrijven $N\left(\log\frac{N}{v} + C\right)$ waarbij C nog ϑ bevat maar niet meer N en v.

Naast deze Boltzmannsche entropie zijn verschillende grootheden door GIBBS kinetisch gedefinieerd, die de eigenschappen van de entropie zouden bezitten. De daarvan het meest op den voorgrond tredende is de $-\bar{\eta}$ of $-\int P \log P\, d\tau$, zijnde de neg. gemiddelde *log* van de dichtheid over het canonisch ensemble, dat het systeem in den evenwichtstoestand voorstelt. Zooals door LORENTZ is aangetoond [1]) bezit deze grootheid de eigenschap, dat de differentiaal bij omkeerbare veranderingen van het systeem gelijk is aan $\frac{dQ}{T}$, waarbij T, de modulus van het ensemble, de eigenschappen van de temperatuur bezit. Deze entropie is door GIBBS alleen voor den evenwichtstoestand gedefinieerd. Wanneer we echter een gas niet in evenwicht zijnde voorstellen door een niet canonisch. ensemble en de entropie op gelijke wijze definieeren, zal van deze entropie ook de tweede eigenschap doorgaan; de grootheid $\int P \log P\, d\tau$ zal n.l. als men de elementen $d\tau$ niet *oneindig* klein neemt op den duur afnemen, daar ieder onderdeel van het ensemble met bepaalde energie nadert tot een grofmicrocanonisch. In het bijzonder geval, in de thermodynamica beschouwd, dat de deelen van het systeem in evenwicht zijn, zal dit dus ook het geval zijn [2]).

Bij een volkomen gas deze $-\bar{\eta}$ berekenende, vinden we, daar

$$-\bar{\eta} = \frac{\bar{\varepsilon} - \psi}{T}$$

terwijl

[1]) Zie Abhandlung XI.

[2]) Het bezwaar door LORENTZ gemaakt tegen deze wijze om de entropie te definieeren, dat men n.l. niet zou inzien hoe een niet canonisch ensemble door een niet in evenwicht zijnd lichaam bepaald zou zijn, komt mij voor niet overwegend te zijn. Het is waar, dat de entropie en het ensemble niet op die wijze bepaald zijn als bij een stationair systeem, maar naarmate meer bekend is van de plaats en de snelheden der moleculen of de wijze, waarop deze haar plaats en snelheden gekregen hebben, is ook het ensemble nauwkeuriger bepaald. Als we b.v. weten dat overal een bepaalde druk en temperatuur bestaat, beschouwen we het ensemble als een som van canonische ensembles, enz.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} NT \text{ en } -\frac{\psi}{T} = \frac{3}{2} N \log (2\pi m T) + N \log v,$$

$$-\bar{\eta} = \frac{3}{2} N + \frac{3}{2} N \log (2\pi m T) + N \log v.$$

Bij vergelijking van deze waarde met de entropie van BOLTZMANN houde men in het oog, dat deze T niet geheel overeenkomt met de ϑ van BOLTZMANN; n.l.

$$\vartheta = \frac{\textit{gem. kin. energie per mol.}}{\mu} \text{ en } T = \frac{\textit{gem. kin. energie per systeem}}{\frac{3}{2} N}$$

Hieruit volgt $T = \frac{2}{3} \mu \times$ gemiddelde ϑ (over het ensemble genomen).

Ter vergelijking dient men dus te nemen:

$$-\frac{2}{3} \mu \bar{\eta} = \mu N + \mu N \log \left(\frac{4}{3} \pi \mu m \vartheta \right) + \frac{2}{3} \mu N \log v,$$

waarvoor men ook kan schrijven

$$\frac{2}{3} \mu N \log v + \mu N \log \vartheta + C'';$$

deze C'' komt echter niet overeen met de C' van LORENTZ.

In verband daarmee wil ik ten slotte de aandacht vestigen op een bezwaar tegen het gebruik van deze laatste door GIBBS ingevoerde entropie.

Zuiver thermodynamisch wordt de entropie bepaald door de diff. verg. $\frac{dQ}{T} = d\eta$. Deze η bevat dus een willekeurige additieve constante. Dit is niet het geval bij de kinetisch gedefinieerde. De H van BOLTZMANN is geheel bepaald door de vergelijking $H = \iint f \log f \, do d\omega$ en dus ook de entropie $-\frac{2}{3} \mu H$. Evenzoo bij GIBBS $-\bar{\eta} = -\int P \log P d\tau$, indien, wat we zullen aannemen, de energie zuiver kinetisch is.

Hetzelfde geldt voor de vrije energie ψ, thermodynamisch bevat deze een willekeurige additieve constante, kinetisch niet. Door deze onbepaaldheid kan men nu echter de constante in de thermodynamica op een geschikte wijze kiezen, wat bij de kinetische theorieën niet meer mogelijk is. Deze constante wordt nu zoo gekozen, dat de ψ voor een zekere gasmassa (en dan ook de η) *gelijk is aan de som van de ψ's der deelen* (molair niet moleculair verdeeld). Dit blijkt duidelijk bij LORENTZ [1]). Hier wordt een grammolecuul van een zeker

[1]) l. c. p. 236.

gas beschouwd en uit $\frac{\partial \psi}{\partial v} = -p = -\frac{RT}{v}$ afgeleid $\psi = -RT \log v + C$. Nu wordt C zoo gekozen, dat $\psi = 0$ als $v = 1$, dus $C = 0$ of $\psi = -RT \log v$. Iets verder wordt gezegd: „Haben wir es nicht mit einer, sondern mit m Einheiten zu tun, die zusammen das Volum v füllen, so haben wir nebeneinander m-mal die Einheit in dem Volum $\frac{m}{v}$. Wir müssen also in $\psi = -RT \log v$ v durch $\frac{m}{v}$ ersetzen und dann mit m multiplizieren." Hier is dus blijkbaar bij definitie de ψ van het geheel gelijk aan de som van de ψ's der naast elkaar in het volume v voorkomende deelen gesteld.

Wij kunnen ook zeggen: dit is geschied door aan C telkens voor elke hoeveelheid een andere waarde toe te kennen. Hadden we n.l. naast elkaar in een volume $2v$ twee eenheden, dan zou voor de eerste $\psi_1 = -RT \log v$, voor de tweede $\psi_2 = -RT \log v$, dus $\psi_1 + \psi_2 = -2RT \log v$. Voor de totale hoeveelheid zouden we hebben $\psi = -2RT \log 2v + C$; hadden we nu ook weer $C = 0$ gesteld (zoodat $\psi = 0$ als $2v = 1$) dan zou ψ niet $= \psi_1 + \psi_2$ zijn geweest. De C is echter nu zoo gekozen, dat $\psi = 0$ als $2v = 2$ of $C = 2RT \log 2$ en daardoor dus $\psi = -2RT \log v = \psi_1 + \psi_2$.

In verband hiermee heeft men de eigenschap dat als twee hoeveelheden van verschillende gassen, zich bevindende in gelijke volumes bij dezelfde T, vermengd worden in hetzelfde volume bij dezelfde T, de vrije energie dezelfde blijft, terwijl deze afneemt als men het doet met twee hoeveelheden van hetzelfde gas. Een dergelijke eigenschap bestaat voor de entropie (paradoxe van Gibbs). Hoe nu staat het hiermee bij de kinetisch gedefinieerde entropie of vrije energie? Wij zullen om deze vraag te beantwoorden achtereenvolgens nagaan: 1. is de entropie van een homogene gasmassa in een volume $2v$ zich bevindend het dubbele van die der halve hoeveelheid in een volume v; 2. is de entropie van een homogene gasmassa in een volume v grooter dan de som der entropieën van twee dergelijke massa's, die samen de eerste hoeveelheid vormen ieder in gelijk volume v; 3. is de entropie van een mengsel van 2 gassen gelijk aan de som der entropieën van de beide gassen afzonderlijk? Bij de Boltzmann'sche entropie luidt telkens het antwoord bevestigend.

Beschouwen we $H = N\left(\log \frac{N}{v} + C\right)$, dan is in het 1ste geval $H_1 = N_1\left(\log \frac{N_1}{v} + C\right)$, dus $2H_1 = 2N_1\left(\log \frac{N_1}{v} + C\right)$; verder is voor de geheele massa in het volume $2v$:

$$H = 2N_1\left(log\frac{2N_1}{2v} + C\right) = 2N_1\left(log\frac{N_1}{v} + C\right) = 2H_1.$$

In het 2de geval is

$$H_1 = N_1\left(log\frac{N_1}{v} + C\right),\ H_2 = N_2\left(log\frac{N_1}{v} + C\right),$$

dus $H_1 + H_2 = N_1\, log\, N_1 + N_2\, log\, N_2 - (N_1 + N_2)(log\, v + C)$, terwijl $H = (N_1 + N_2)\, log\,(N_1 + N_2) - (N_1 + N_2)(log\, v + C)$, zoodat $H < H_1 + H_2$ of de entropie van het geheel is grooter dan de som der entropieën van de deelen.

In het 3e geval geldt niet de hier gebruikte formule voor H, maar nu wordt door BOLTZMANN *bij definitie* $H = H_1 + H_2$ gesteld. Bij een mengsel van twee gassen stelt nl. BOLTZMANN

$$H = \iint f\, log\, f\, do\, d\omega + \iint f_1\, log\, f_1\, do\, d\omega.$$

Trouwens ook de vragen 1 en 2 hadden uit deze definitie direct beantwoord kunnen worden. $H = \iint f\, log\, f\, do\, d\omega$ geeft nl. aan dat H van het geheel $= \Sigma H$ der deelen; verder kan men de moleculen steeds in 2 deelen verdeeld denken met dichtheden f_1 en f_2, zoodat $f = f_1 + f_2$, maar nu is

$$(f_1 + f_2)\, log\,(f_1 + f_2) < f_1\, log\, f_1 + f_2\, log\, f_2,$$

zoodat ook $H < H_1 + H_2$ zal zijn. Uit deze laatste behandelingswijze blijkt tevens, dat de drie eigenschappen voor de BOLTZMANN'sche entropie ook doorgaan, als het gas *niet* in den evenwichtstoestand verkeert.

Om dezelfde vragen ten opzichte van de entropie van GIBBS te beantwoorden beschouwen wij den vorm:

$$-\bar{\eta} = \frac{3}{2}N + \frac{3}{2}N\, log\,(2\pi\, mT) + N\, log\, v.$$

Wat de eerste kwestie betreft, zoo is voor N_1 moleculen in het volume v:

$$-\bar{\eta}_1 = \frac{3}{2}N_1 + \frac{3}{2}N_1\, log\,(2\pi\, mT) + N_1\, log\, v,$$

dus

$$-2\bar{\eta}_1 = 3N_1 + 3N_1\, log\,(2\pi\, mT) + 2N_1\, log\, v$$

terwijl voor $2N_1$ mol. in volume $2v$:

$$-\bar{\eta} = 3N_1 + 3N_1\, log\,(2\pi\, mT) + 2N_1\, log\, 2v,$$

zoodat *niet* de entropie van het geheel gelijk is aan de som van de

entropiën der deelen. Wel is altijd de *toename* in entropie (of vrije energie) van het geheel gelijk aan de toename in entropie (of vrije energie) van de deelen [1]).

Wat de tweede en derde kwestie betreft, zoo kunnen we direct het algemeen geval nemen van een mengsel van twee verschillende gassen en vinden dan:

$$e^{-\frac{\psi}{T}} = (2\pi T)^{\frac{3N}{2}} m_1^{3\frac{N_1}{2}} m_2^{3\frac{N_2}{2}} v^N$$

waaruit

$$-\frac{\psi}{T} = \frac{3N}{2} \log (2\pi T) + \frac{3N_1}{2} \log m_1 + \frac{3N_2}{2} \log m_2 + N \log v$$

en

$$-\bar{\eta} = \frac{3N}{2} + \frac{3N}{2} \log (2\pi T) + \frac{3N_1}{2} \log m_1 + \frac{3N_2}{3} \log m_2 + N \log v.$$

Voor de eerste stof alleen vinden we:

$$-\bar{\eta}_1 = \frac{3N_1}{2} + \frac{3N_1}{2} \log (2\pi T) + \frac{3N_1}{2} \log m_1 + N_1 \log v,$$

voor de tweede alleen:

$$-\bar{\eta}_2 = \frac{3N_2}{2} + \frac{3N_2}{2} \log (2\pi T) + \frac{3N_2}{2} \log m_2 + N_2 \log v.$$

Hieruit blijkt $-\bar{\eta} = -\bar{\eta}_1 + -\bar{\eta}_2$ of de entropie van het mengsel is gelijk aan de som der entropieën van de gassen, die het mengsel vormen, wat nu ook geldt als de samenstellende deelen uit hetzelfde gas bestaan. Er is dus geen volkomen analogie met de thermodynamica: voor deze entropie bestaat niet meer het paradoxe van GIBBS.

Dat de $-\bar{\eta}$ van het geheele volume niet gelijk is aan de $\Sigma - \bar{\eta}$ van de deelen vloeit voort uit het feit, dat de phaseextensie $v_1^{N_1} \times v_2^{N_2}$ niet gelijk is aan de extensie $(v_1 + v_2)^{N_1 + N_2}$. In het totale volume zijn meer mogelijkheden van plaatscombinatie, is grooter extensie open dan als het volume in twee afzonderlijke deelen verdeeld is. Wij kunnen ook zeggen, bij BOLTZMANN kan men evenals

---

[1]) De door Dr. L. S. ORNSTEIN in zijn proefschrift: „Toepassing der Statistische Mechanica van GIBBS op molekulair-theoretische vraagstukken" (Leiden 1908) p. 54 afgeleide vergelijking:

$\sum_1^k (\psi_\varkappa - \psi_{0\varkappa}) = \psi - \psi_0$ geeft dan ook alleen aan, dat de *toename* in ψ van de elementen te zamen de totale toename in ψ van het geheel vormt. Voor den „nultoestand", waarvoor $\psi_{0\varkappa}$ en ψ_0 gelden, nl. den toestand waarbij de potentieele energie $=0$, geldt volstrekt niet $\Sigma\, \psi_{0\varkappa} = \psi_0$. Deze „nultoestand" is toch hierboven juist beschouwd.

in de thermodynamica de entropie splitsen naar het volume, bij GIBBS naar de moleculen. Vergelijkt men met elkaar de vormen:

$$H = N\left(log\frac{N}{v} + C\right) \text{ en } \bar{\eta} = N(-log\, v + C).$$

dan blijkt de entropie van GIBBS in overeenstemming met de thermodynamica gebracht te kunnen worden door $\bar{\eta}$ te vermeerderen met $N\, log\, N$ of $N(log\, N + C)$. Dat kan geschieden door de dichtheid e^{η} te vermenigvuldigen met $N^N . e^{-N}$ of $N!$ bij benadering. Men zou dus voor $\bar{\eta}$ moeten nemen de gemiddelde log. van de dichtheid, niet ten opzichte van de *specifieke*, maar ten opzichte van de *generieke* phasen. [1])

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt eene mededeeling aan van den Heer W. VOIGT in Göttingen: *„Einige Bemerkungen über die Leidener Beobachtungen des Zeeman-Effektes bei tiefen Temperaturen."*

(Mede aangeboden door den Heer H. A. LORENTZ).

Unter den merkwürdigen Resultaten, welche die gemeinsam von den Herren KAMERLINGH ONNES und JEAN BEQUEREL [2]) ausgeführten Beobachtungen über den ZEEMAN-Effekt bei sehr tiefen Temperaturen ergeben haben, sind besonders zwei in theoretischer Hinsicht interessant. Ich will dieselben im folgenden zu beleuchten versuchen.

I. Es hat sich ergeben, dass bei Beobachtung längs der optischen Axe einaxiger Krystalle (wo diese Körper sich isotrop verhalten) und bei longitudinaler magnetischer Einwirkung die Komponenten der ZEEMAN'SCHEN Duplets mitunter *verschiedene Intensitäten* besitzen. Die nach der Seite der kurzen Wellenlängen liegende Komponente war meist, doch nicht immer, die stärkere.

Dies Resultat weist darauf hin, dass in *dem Krystalle schon vor*

[1]) Toen ik het bovenstaande geschreven had, bemerkte ik, dat het laatste niet nieuw is. Ook GIBBS zelf heeft reeds in den laatsten zin van zijn boek de opmerking gemaakt, dat men $-\bar{\eta}_{gen}$ en niet $-\bar{\eta}_{spec}$ als aequivalent voor de entropie zal moeten nemen, „except in the thermodynamics of bodies in which the number of molecules of the various kinds is constant." Het zal dus steeds moeten geschieden, waar de entropie van het geheel met die van de deelen vergeleken wordt.

Toch kwam het mij, in aanmerking genomen de weinige woorden die GIBBS aan de zaak wijdt, nog wel verdedigbaar voor mijne opmerkingen niet terug te houden.

[2]) J. BECQUEREL und KAMERLINGH ONNES K. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam 29 Febr. 1908.

der Einwirkung des Magnetfeldes ein Rotationssinn gegenüber dem anderen bevorzugt ist. Das Nächstliegende ist offenbar die Vermutung, dass die betreffenden Krystalle eine natürliche Aktivität besitzen, die bei erniedrigter Temperatur zunimmt. Auch wenn sich Gründe gegen eine solche Annahme durch weitere Beobachtungen ergeben sollten, bietet das Problem der Einwirkung eines Magnetfeldes auf einen natürlich drehenden Krystall so viel Interesse, dass seine Verfolgung lohnend erscheint. Ich bemerke im voraus, dass die zunächst sich bietende Erwartung, es werde sich die Wirkung des Magnetfeldes und diejenige der natürlichen Aktivität einfach *superponiren, nicht zutrifft,* dass vielmehr in der Nähe der Absorptionsstreifen singuläre Effekte einsetzen.

Die nachstehend benutzten Bezeichnungen sind die folgenden:

A, B, C Komponenten der magnetischen Feldstärke.
X Y Z „ „ elektrischen „
$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ „ „ magnetischen Polarisation.
$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ „ „ elektrischen „
$\mathfrak{x}_h$, $\mathfrak{y}_h$, $\mathfrak{z}_h$ „ von elektrischen Teilpolarisationen.
a_h, b_h, c_h, δ_h, ε_h Parameter.
P äussere magnetische Feldstärke, welche $\parallel Z$ angenommen ist.
v Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Dann lauten nach den von mir gegebenen Ansätzen die Gleichungen für einen isotropen aktiven Körper:

$$\mathfrak{A}' = v\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right), \ldots$$

$$\mathfrak{X}' = v\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right), \ldots$$

$$\mathfrak{x}_h + a_h\mathfrak{x}'_h + b_h\mathfrak{x}''_h + c_hP\mathfrak{y}'_h = \varepsilon_hX - \delta_hA', \ldots$$

$$\mathfrak{X} = X + \Sigma\mathfrak{x}_h, \ldots$$

$$\mathfrak{A} = A + \Sigma\delta_h\mathfrak{x}'_h/\varepsilon_h, \ldots$$

Eine einfache Rechnung ergiebt für den sogenannten komplexen Brechungsindex $\mathfrak{n}$ in der Richtung der magnetischen Feldstärke den Wert

$$\mathfrak{n} = \sqrt{(1 + E)(1 + \Theta)} \pm \Delta,$$

wobei

$$E = \Sigma\frac{\varepsilon_h}{p_h \pm c_hPv}, \quad \Theta = v^2\Sigma\frac{\delta^2_h}{\varepsilon_h(p_h \pm c_hPv)},$$

$$\Delta = v\Sigma\frac{\delta_h}{p_h \pm c_hPv};$$

hierin bezeichnet v die Schwingungsfrequenz und ist gesetzt

$$1 + iva_h - v^2b_h = p_h.$$

Die doppelten Vorzeichen entsprechen den beiden parallel den Kraftlinien fortgepflanzten Wellen von circularer Schwingung und entgegengesetztem Rotationssinn.

Der komplexe Brechungsindex $\mathfrak{n}$ hängt mit dem reellen n und mit dem Absorptionsindex $\varkappa$ nach der Formel $\mathfrak{n} = n(1 - i\varkappa)$ zusammen.

Die Konstanten σ_h sind diejenigen, welche die *natürliche*, c_h diejenigen welche die *magnetische* Aktivität messen. Man erkennt, dass, selbst wenn diese beiden Wirkungen im allgemeinen klein sind, sie sich doch in der Nähe eines Absorptionsstreifens, wo p_h von derselben Ordnung wird, wie $c_h P\nu$, nicht einfach superponiren.

Verschwindet die natürliche Aktivität, so verschwindet Θ und Δ; es bleibt dann der Ausdruck

$$\mathfrak{n}^2 = 1 + E,$$

der die Theorie des gewöhnlichen longitudinalen ZEEMAN-Effectes enthält.

Von den bei vorhandener natürlicher Aktivität *hinzutretenden* Gliedern interessirt uns besonders $\pm \Delta$, das Θ übrigens auch an Grösse in der Regel überragen wird. *Dies Glied, das für die + und die — rotirende Welle entgegengesetztes Vorzeichen hat, aber sein Maximum an derselben Stelle annimmt, wie E, drückt,* wie leicht zu erkennen, *genau eine solche Dissymmetrie des* ZEEMAN'*schen Duplets aus, wie die Beobachtungen von* ONNES *und* BECQUEREL *ergeben haben.* Damit dieselbe eine merkliche Grösse habe, ist nur erforderlich, dass das Produkt $\nu\sigma_h$ mit ε_h commensurabel sei. Da ε_h bei den Absorptionsstreifen der in Betracht kommenden Krystalle erfahrungsgemäss ausserordentlich klein ist, so liegt hier an sich keine Schwierigkeit vor.

Das einzige Bedenken, das geltend gemacht werden könnte, nämlich dass die krystallographische Symmetrie der beobachteten Krystalle nicht auf das Vorhandensein einer natürlichen Aktivität hinweist, scheint mir wenig Gewicht zu haben. Es giebt genug Beispiele von Umwandelungen höherer Symmetrie der Krystallsubstanz in niedrigere bei fallender Temperatur, um die Möglichkeit zuzulassen, dass ein bei gewöhnlicher Temperatur inaktiver Krystall bei der Temperatur des flüssigen Wasserstoffes die der natürlichen Aktivität entsprechende niedrigere Symmetrie annimmt. Ueberdies dürfte z. B. bei brasilianischem Xenotim, wo ausgebildete Krystalle sehr selten sind, die bei gewöhnlicher Temperatur herrschende Symmetrie keineswegs ganz unzweifelhaft feststehen.

Doch wie dem auch sei, — in jedem Falle ist gezeigt, dass *eine vorhandene natürliche Aktivität den Komponenten des* ZEEMAN'*schen longitudinalen Duplets eine dissymmetrische Intensität zu erteilen vermag.*

II. Bei einigen Krystallen rhombischer Symmetrie hat sich der

Fall gezeigt, dass in allen drei Hauptspektren gewisse Absorptionsstreifen anscheinend auf dieselbe Wellenlänge fallen. Parallel jeder Symmetrieaxe beobachtet man nun bei Erregung der Magnetfelder für jede der beiden in diesen Richtungen fortgepflanzten Schwingungen die Zerlegung in ein Duplet.

Von diesen Duplets sind in dem hervorgehobenen speziellen Falle gleicher Wellenlängen der Streifen eine Anzahl *äquidistant*, andere verhalten sich *verschieden*. Bezeichnet man die Krystallaxen mit X, Y, Z, die Richtung der magnetischen Feldstärke mit R, die der Forpflanzung des Strahles mit ω, die der Schwingung mit σ, so ergiebt sich für die stattfindenden Gesetzmässigkeiten nach der Beobachtung folgende Tabelle:

$$
\begin{array}{lll}
R//X\ ,\ \omega//X & \begin{cases}\sigma//Y \\ \sigma//Z\end{cases} & \begin{matrix}\alpha_1 \\ \alpha_1\end{matrix} \\
\omega//Y & \begin{cases}\sigma//Z \\ \sigma//X\end{cases} & \begin{matrix}\alpha_1 \\ \alpha'_1\end{matrix} \\
\omega//Z & \begin{cases}\sigma//X \\ \sigma//Y\end{cases} & \begin{matrix}\alpha'_1 \\ \alpha_1\end{matrix} \\
R//Y\ ,\ \omega//Y & \begin{cases}\sigma//Y \\ \sigma//Z\end{cases} & \begin{matrix}\alpha'_2 \\ \alpha_2\end{matrix} \\
\omega//Y & \begin{cases}\sigma//Z \\ \sigma//X\end{cases} & \begin{matrix}\alpha_2 \\ \alpha_2\end{matrix} \\
\omega//Z & \begin{cases}\sigma//X \\ \sigma//Y\end{cases} & \begin{matrix}\alpha_2 \\ \alpha'_2\end{matrix} \\
R//Z\ ,\ \omega//X & \begin{cases}\sigma//Y \\ \sigma//Z\end{cases} & \begin{matrix}\alpha_3 \\ \alpha'_3\end{matrix} \\
\omega//Y & \begin{cases}\sigma//Z \\ \sigma//X\end{cases} & \begin{matrix}\alpha'_3 \\ \alpha_3\end{matrix} \\
\omega//Z & \begin{cases}\sigma//X \\ \sigma//Y\end{cases} & \begin{matrix}\alpha_3 \\ \alpha_3\end{matrix}
\end{array}
$$

Die von mir entwickelte Theorie [1]) der betreffenden Vorgänge macht deren Gesetze von *vier* Arten von Parametern abhängig.

p_h und $\bar{p}_h$ $(h = 1, 2, 3)$ bestimmen sich durch die quasielastischen und die dämpfenden Kräfte, denen das Elektron im Krystalle bei fehlender magnetischer Einwirkung unterliegt; g_h $(h = 1, 2, 3)$ messen die direkte Einwirkung der Magnetfelder in den Richtungen der

[1]) W. Voigt, Gött. Nachr. 28. Juli 1906; Magneto- und Elektrooptik. Leipzig 1908, p. 235 u. f.

drei Axen X, Y, Z; (f_h ($h = 1, 2, 3$) messen gewisse Koppelungen, denen die Elektronen unterliegen, parallel denselben Axen.

Setzt man dann noch kurz

$$N_1 = p_1 \overline{p_1} - f_1^2 v^2, \quad N_{23} = p_2 p_3 - g_1^2 v^2,$$
$$N_2 = p_2 \overline{p_2} - f_2^2 v^2, \quad N_{31} = p_3 p_1 - g_2^2 v^2,$$
$$N_3 = p_3 \overline{p_3} - f_3^2 v^2, \quad N_{12} = p_1 p_2 - g_3^2 v^2,$$

wobei v wieder die Frequenz bezeichnet, so ergeben sich als für die Grössen der Zerlegungen in den oben behandelten Fällen allgemein die folgenden Funktionen als charakteristisch.

$$R//X\ ,\ \omega//X \begin{cases} \sigma//Y & p_2/N_{23} \\ \sigma//Z & p_3/N_{23} \end{cases}$$
$$\omega//Y \begin{cases} \sigma//Z & p_3/N_{23} \\ \sigma//X & (p_1 + \overline{p_1})/N_1 \end{cases}$$
$$\omega//Z \begin{cases} \sigma//X & (p_1 + \overline{p_1})/N_1 \\ \sigma//Y & p_2/N_{23} \end{cases}$$
$$R//Y\ ,\ \omega//X \begin{cases} \sigma//Y & (p_2 + \overline{p_2})/N_2 \\ \sigma//Z & p_3/N_{31} \end{cases}$$
$$\omega//Y \begin{cases} \sigma//Z & p_3/N_{31} \\ \sigma//X & p_1/N_{31} \end{cases}$$
$$\omega//Z \begin{cases} \sigma//X & p_1/N_{31} \\ \sigma//Y & (p_2 + \overline{p_2})/N_2 \end{cases}$$
$$R//Z\ ,\ \omega//X \begin{cases} \sigma//Y & p_2/N_{12} \\ \sigma//Z & (p_3 + \overline{p_3})/N_3 \end{cases}$$
$$\omega//Y \begin{cases} \sigma//Z & (p_3 + \overline{p_3})/N_3 \\ \sigma//X & p_1/N_{12} \end{cases}$$
$$\omega//Z \begin{cases} \sigma//X & p_1/N_{12} \\ \sigma//Y & p_2/N_{12} \end{cases}$$

Haben nun speziell die Absorptionsstreifen in den drei Hauptspektren merklich gleiche *Lage*, so sind die *reellen*, haben sie merklich gleiche *Stärke*, so die *imaginären* Teile der p_1, p_2, p_3 wie auch der $\overline{p_1}$, $\overline{p_2}$, $\overline{p_3}$ unter einander gleich. Behalten dabei aber die g_1, g_2, g_3 und die f_1, f_2, f_3 unter einander verschiedene Werte, so sind auch die N_1, N_2, N_3 und die N_{23}, N_{31}, N_{12} unter einander verschieden. *In diesem Falle stimmt das System der theoretischen Abstände genau mit dem beobachteten überein.* Sind die drei Absorptionen etwas verschieden, so entstehen kleine Abweichungen, die sich der Wahrnehmung entziehen dürften.

Das Interessante der Beobachtungen liegt nun darin, *dass ein Wider-*

spruch mit der Erfahrung eintritt, wenn man $g_1 = g_2 = g_3$, *also auch* $N_{23} = N_{31} = N_{12}$ *annimmt.*

Die Parameter g_h messen, wie oben gesagt, die *direkte* Einwirkung des äusseren Magnetfeldes auf das schwingende Elektron. Diese Einwirkung ergiebt sich also als verschieden, wenn das Feld parallel der ersten, der zweiten, der dritten Krystallaxe wirkt. Ich möchte darin eine Bestätigung meiner auch sonst vertretenen Ansicht finden, dass *das Magnetfeld im Innern des Moleküles,* wo das Elektron schwingt, *wesentlich verschieden sein kann von dem, das im Aussenraum herrscht.* Es liegt offenbar ganz in diesem Vorstellungskreise, das Feld im Innern eines *Krystall*moleküles von verschiedener Stärke zu denken, wenn das äussere Feld bei konstanter Grösse successive parallel zu den drei Krystallaxen wirkt.

In meiner früheren Publication habe ich allerdings $g_1 = g_2 = g_3$ angenommen, weil damals noch keine Nötigung zu dem komplizierteren Ansatze vorlag; es sind aber dort keine Folgerungen gezogen, die auf dieser Annahme beruhen. Die oben besprochenen Beobachtungen zeigen, dass g_1 von g_2 und g_3 im allgemeinen verschieden ist.

Will man die Verschiedenheit des inneren und des äusseren Feldes nicht zugeben, so muss man zu der von den Herren Becquerel und Onnes vertretenen höchst komplizierten Annahme greifen, dass das Elektron parallel den drei Krystallaxen verschiedene (scheinbare, also etwa elektromagnetische) Masse besitzt, und dass die quasielastischen Kräfte in jenen Richtungen diesen Massen proportional sind. Dies würde also eine unübersehbare Schaar verschiedener Elektronenarten, etwa von ellipsoidischer Gestalt verlangen, die bei den Schwingungen sich selbst parallel blieben. Wie das Gesetz der quasielastischen Kräfte zu deuten wäre, geben die Herren Autoren nicht an. Ich halte diesen Schwierigkeiten gegenüber die Vorstellung der von den äusseren abweichenden innermolekularen Felder für viel einfacher.

III. Ich möchte an Vorstehendes noch eine allgemeine Bemerkung knüpfen. Mir scheint, dass mit dem leichtherzigen Einführen von Elektronen, die nach Form, Masse und Vorzeichen verschieden sind, einer der Hauptvorteile, der der Elektronentheorie bisher eigen war: *die Einfachheit der Grundvorstellung,* aufgegeben und dadurch die ganze Hypothese immer wertloser gemacht wird. Liegen Erfahrungen vor, die dazu unweigerlich *zwingen,* nun, so wird man sich mit dieser Entwertung der Hypothese abfinden müssen. Aber bisher kann ich das Vorhandensein solcher Erfahrungen nicht anerkennen.

Das Hauptargument des Herrn Becquerel gegen die Hypothese des innermolekularen Feldes ist die Erfahrung, dass der Zeeman-Effekt

von den Temperatur merklich unabhängig ist. Aber da wir gar nichts Bestimmtes über die Ursache des inneren Feldes wissen, so scheint mir auch eine Behauptung über deren Temperaturempfindlichkeit keinerlei Sicherheit zu bieten.

Gegen die leichtherzige Annahme speziell *positiver* Elektronen spricht mir besonders eine Ueberlegung, die ich gerne auch an dieser Stelle mitteile, weil sie mir gewichtig scheint.

Die Optik lehrt uns, dass in den Körpern Elektronen um Gleichgewichtslagen schwingen. Ferner lässt die Elektronentheorie keine anderen, als elektromagnetische Kräfte wirksam werden; die quasielastische Kraft, welche die Elektronen an die Gleichgewichtslage bindet, muss also gleichfalls elektromagnetischer Natur sein. Es kommt nun hier nur die *elektrostatische* Wirkung in Frage, und von dieser lehrt die Potentialtheorie, dass sie eine Bewegung einer Punktladung um eine stabile Ruhelage *nur innerhalb räumlich verteilter Ladungen von entgegengesetztem Vorzeichen zulässt.* Die bisherige Annahme *negativer Elektronen* führte also konsequent zu der Vorstellung *räumlich verteilter positiver* Ladungen. Hierin liegt kein Widerspruch.

Die Hypothese *positiver* (den negativen ganz parallel gehender) *Elektronen* fordert aber nunmehr die Vorstellung *negativer räumlich ausgedehnter* Ladungen und führt demgemäss, wie mir scheint, beinahe zu einer Verflüchtigung der ganzen Elektronenhypothese. Welche Kraft hat denn noch eine *atomistische* Vorstellung der Elektricität, die nicht konsequent durchgeführt werden kann, sondern mit der Vorstellung *kontinuirlicher* Raumverteilung gekoppelt werden muss?

GÖTTINGEN, Anfang Oktober 1908.

Microbiologie. — De Heer HOOGEWERFF biedt eene mededeeling aan van den Heer N. L. SÖHNGEN: „*Ureumsplitsing bij afwezigheid van eiwitten.*"

(Mede aangeboden door den Heer M. W. BEIJERINCK).

§ 1. *Algemeene beschouwingen. Ureum als energiebron.*

Ureum, afgescheiden als afbouwproduct van eiwitten bij de stofwisseling der hooger georganiseerde dierenwereld, verlaat opgelost in de urine het lichaam.

Als zoodanig kan deze stikstofverbinding door de hoogere plantenwereld niet worden geassimileerd en ze zou daarom voor ons van geen practisch belang zijn, ware het niet, dat schimmels, maar vooral

bepaalde microben in den bodem alom aanwezig, haar tot assimileerbare verbindingen omzetten.

We moeten daarom de urine, meer bepaaldelijk het ureum als een der voor den kultuurbodem waardevolste stikstofbronnen beschouwen.

Millioenen kilogrammen van den onontbeerlijken nitraatstikstof worden jaarlijks langs biologischen weg in den bodem uit urine gevormd en komen de plantenwereld ten goede.

In den vorm van planteneiwitten door mensch en dier opgenomen, verlaat de stikstof in hoofdzaak als ureum weder het lichaam en beschrijft op deze wijze een kringloop.

Een ruwe berekening van de hoeveelheid ureum, welke in ons land door de bevolking en veestapel wordt gevormd, geeft een beeld van de enorme kwantiteit stikstof welke dezen kringloop beschrijft.

De gegevens voor de grootte van den veestapel zijn ontleend aan de *Verslagen en Mededeelingen van de Directie van den Landbouw.*

De hoeveelheid ureum welke dagelijks door de bevolking wordt afgescheiden is ± 125000 K.G.; door den veestapel ± 225000 K.G. te samen dus ± 350000 K.G. of ± 350 ton per dag.

Langs biologischen weg geoxydeerd zou hieruit eene hoeveelheid nitraatstikstof ontstaan welke aanwezig is in ± 900 ton salpeter.

Per jaar zouden uit de ± 125000 ton gevormd ureum, ± 350000 ton salpeter kunnen worden gevormd, welke een waarde vertegenwoordigen van ± 42 millioen gulden en welke over de 862000 Hektare bouwland verdeeld per Hektare ± 400 K.G. salpeter zou leveren.

Dat slechts een klein gedeelte van deze enorme massa den akkerbodem ten goede komt, behoeft geen betoog. Vooral in groote steden gaat om hygiënische redenen nagenoeg alle ureum voor nuttig gebruik verloren: daarentegen zou het zeker zeer de moeite waard zijn, om op het platte land vooral op de boerderijen veel meer zorg te besteden aan het vergaren der urine.

De bovenstaande beschouwing moge er toe bijdragen, dat nog eens de aandacht wordt gevestigd op de enorme waarde welke ureum als meststof vertegenwoordigt.

Bij de onderzoekingen over ureumsplitsende microben kenmerkten zich de voedingsbodems in 't algemeen door de aanwezigheid van eiwitten en peptonen.

Wel hebben VON JAKSCH [1]) en BEYERINCK [2]) proeven genomen met

[1]) Zeitschrift für Phys. chem. 1881.

[2]) Centralbl. f. Bakt. II, Abt. VII, Bd. 1901.

zouten van organische zuren als koolstofbron, maar een systematisch onderzoek in deze richting bleef tot heden achterwege.

De onderzoekingen van VON JAKSCH in 1881 zijn vooral van belang om de studie der voedingscondities van ureumbacteriën. Zij leerden ons dat koolhydraten, zouten van vetzuren en van organische meerbasische zuren geassimileerd kunnen worden.

De zoo hoogst interessante studie van BEYERINCK over de splitsing van ureum door microben handelt in hoofdzaak over de ureumsplitsende organismen welke in kulturen, bij de toepassing van zijne *ophoopingsmethode* in vleeschwater 10 °/₀ ureum op den voorgrond treden. In den loop van het onderzoek zijn eenige proeven verricht met kultuurvloeistoffen, samengesteld uit leidingwater, 5 °/₀ ureum, 0.025 K_2HPO4 en 1 °/₀ ammoniumoxalaat, natriumacetaat, seignette zout, ammoniumcitraat of ammonium malaat. In deze kultuurbodems heeft na infectie met tuingrond een krachtige ureumsplitsing plaats.

De toegevoegde 5 °/₀ ureum worden echter niet geheel gesplitst. De gemakkelijk assimileerbare verbindingen als ammoniummalaat en -citraat geven aanleiding tot meer ureumsplitsing respect. 4 °/₀ en 3 °/₀ als de moeilijker aantastbare als ammoniumoxalaat en natriumacetaat, waarbij slechts 2 °/₀ ureum worden gesplitst.

Op de bestudeering der microben welke in deze kulturen optraden werd toen niet nader ingegaan.

Het doel van dit onderzoek is dan ook hoofdzakelijk om aan te toonen dat tal van ureumbacteriën geenszins op de aanwezigheid van eiwitten zijn aangewezen; maar dat voor deze fermenten de groote hoeveelheden koolhydraten en zouten van organische zuren, welke voor het microbenleven in den akkerbodem beschikbaar zijn, als koolstofbron uiterst geschikt zijn, terwijl dan het ureum als energie- zoowel als stikstofbron dienst kan doen.

Eenige voorloopige proeven leidden tot de overtuiging, dat de meest verschillende koolstofbronnen, in kultuurvloeistoffen welke deze verbindingen en ureum, opgelost in duinwater, 0,05 °/₀ K_2HPO_4 bevatten, uitnemend geschikt zijn voor den groei van zwak-, zoowel als van zeer krachtig-ureumsplitsende microben.

Gekultiveerd in dunne vloeistoflaag in Erlenmeyerkolven bij ± 33°, zijnde de optimumtemperatuur van den groei, komen krachtige soorten, vooral sporevormers op den voorgrond; bij lage temperatuur, 15°—23°, minder sterksplitsende fermenten, vooral micrococcen.

De uitsluiting van andere groepen en de bevoorrechting der ureumbacteriën is in deze kultuurbodems zóó volkomen, dat deze met

ruwe materialen als tuingrond, riool- of grachtmodder geënt, na eenige dagen nog slechts ureumsplitsende organismen bevatten.

Wordt van deze met ruw materiaal geinfecteerde kultuurbodems overgeënt in vloeistoffen van dezelfde samenstelling, dan gaat ook hierbij de ureumfermentatie goed op gang.

Welke ureumsplitsende soorten op den voorgrond treden, hangt af van de samenstelling van de toegevoegde koolstofbron en den graad van alkaliteit van den voedingsbodem, waaruit wordt overgeënt.

In § 2 en § 3 wordt hierop uitvoering teruggekomen.

Ureum als energiebron.

Ureum levert den ureumsplitsers uitsluitend energie; onder geen omstandigheid is het geschikt tevens als koolstofbron te dienen.

Verschillende proefnemingen, welke ik hieromtrent nog heb genomen, bevestigen de juistheid van vroegere waarnemingen. Evenmin kan het dienstdoen als oxydeerbaar materiaal bij de sulfaatreductie, terwijl ook denitrificatie met ureum onmogelijk is.

De rol welke ureum bij den groei der microben speelt, is dus zeer scherp bepaald. Steeds is de aanwezigheid van eenige geschikte koolstofbron noodzakelijk; gedeeltelijk wordt deze koolstofverbinding geoxydeerd en dit deel dient dus ook voor energie, gedeeltelijk wordt zij geassimileerd.

Voor de genoemde oxydatie der koolstofbron wordt atmospherische zuurstof verbruikt; de hoeveelheid hiervan noodig is zeer gering hetgeen men kan aantoonen door te kultiveeren in stopfleschjes, welke geheel met de kultuurvloeistof zijn gevuld.

Uitsluitend de in de kultuurvloeistof opgeloste zuurstof is alsdan voor de microben beschikbaar en niettemin heeft de ureumsplitsing dan bijna evengoed plaats als wanneer de zuurstoftoetreding overvloedig is.

Wordt de kultuurvloeistof daarentegen van te voren door uitkoking zuurstofvrij gemaakt, dan heeft na enting in een geheel gevuld fleschje geen ureumsplitsing plaats.

Uit deze proeven volgt, dat eene goede ureumsplitsing mogelijk is terwijl slechts zeer weinig organische stof wordt geoxydeerd.

Nu vertoonen in 't algemeen sterksplitsende fermenten in de kulturen zeer geringen groei en hieruit volgt, dat ook de hoeveelheid koolstof, welke voor den bouw der bacterie-lichamen noodig is, gering is.

Uit deze feiten zien we, dat eene kleine hoeveelheid eener geschikte organische verbinding, naast ureum, voldoende moet zijn voor eene

volkomen ontwikkeling der organismen en eene normale ureumsplitsing.

Teneinde nu na te gaan, welk deel van de totaal in de kultuur vrijgekomen energie, bij de splitsing van het ureum vrijkomt, werd de minimum hoeveelheid koolstofverbinding bepaald welke toereikend is voor eene normale ureumsplitsing en groei. Hiertoe zijn proeven genomen met de later beschreven *bacillus erythrogenes* en *urobacillus jakschii* in series kultuurvloeistoffen, welke naast ureum, eene dalende hoeveelheid asparagine of ammoniummalaat bevatten.

Inderdaad blijkt eene zeer geringe hoeveelheid dezer stoffen voldoende voor eene normale ureumsplitsing.

Uit de uitkomsten van de onderzoekingen, welke in onderstaande tabel zijn neergelegd, volgt, dat de *bacillus erythrogenes* bij normalen groei met 20 mG. koolstofverbinding 500 mG. ureum splitst, terwijl de *urobacillus jakschii* met 10 mG. koolstofverbinding 1800 mG. ureum splitst.

De groei van beide microben is bij geringere hoeveelheden koolstofverbinding dan de bovengenoemde, belangrijk minder.

De hoeveelheid energie welke in de *erythrogenes* en *jakschii* kulturen door de splitsing van het ureum vrijkomt, bedraagt respectievelijk ± 96 % en 99 % van de totaal daarin vrijgekomen energie.

Tevens volgt echter uit deze getallen, dat de minder krachtig splitsende soorten een grooter hoeveelheid koolstofverbinding voor de splitsing van eene bepaalde hoeveelheid ureum behoeven dan de zeer krachtige splitsers.

De cijfers in onderstaanden tabel geven het aantal c.c. NH_2SO_4 aan, noodig voor het neutraliseeren van 50 c.c. kultuurvloeistof na 5 dagen kultuur bij 30°.

De 50 c.c. kultuurvloeistof geënt met de *bacillus erythrogenes*, bestaan uit leidingwater waarin 0.05 % K_2HPO_4 2 % ureum en de koolstofbron zijn opgelost.

De 50 c.c. kultuurvloeistof geënt met *urobacillus jakschii* heeft, behalve 5 % ureum inplaats van 2 % ureum, dezelfde samenstelling als bovenstaande.

Splitsing door bacillus erythrogenes.

Hoeveelheid koolstofbron in milligrammen	50	40	30	20	10	5
Splitsing als deze is asparagine	18.5	17.5	17	17	13	8
Splitsing als deze is amm. malaat	19.8	17.9	18.5	18.0	14.2	9.5

Splitsing door urobacillus jakschii.

Splitsing als deze is asparagine	61.5	60	59	60	54	42
Splitsing als deze is amm. malaat	60	58	60	59	56.5	39

§ 2. *Calciumzouten van organische zuren als koolstofbron voor ureumsplitsende microben.*

De organische zuren afkomstig van plantendeelen of ontstaan bij vergisting daarvan worden in den akkerbodem in hoofdzaak geneutraliseerd door het veelvuldig daarin voorkomende calciumcarbonaat.

Het algemeen voorkomen van deze zouten in den bodem leidde er dan ook toe, voor de volgende onderzoekingen in de eerste plaats de calciumverbindingen van organische zuren te kiezen als koolstofbron van ureumsplitsende bacteriën.

Wordt in eene kultuurvloeistof, welke deze zouten bevat en ureum, opgelost in leidingwater waaraan 0.05 K_2HPO_4 is toegevoegd, ureum gesplitst, dan zal het gevormde ammoniumcarbonaat niet direct eene belangrijke verhooging der alkaliteit van den voedingbodem bewerkstelligen, maar allereerst zal het als 't ware geneutraliseerd worden door het calciumzout en wel volgens de formule:

$$Ca\,R + (NH_4)_2\,CO_3 = Ca\,CO_3 + (NH_4)_2\,R$$

De calciumverbindingen der organische zuren oefenen dus eene op de alkaliteit remmende werking uit; immers eerst wanneer alle calcium aan het gevormde koolzuur is gebonden, zal de alkaliteit snel voortschrijden; dan komt de kultuurvloeistof overeen met eene, welke een ammoniumzout van een organisch zuur als koolstofbron bevat. Hierover handelt § 3.

Maar juist door het bestaan van deze rustperiode vóór de alkalistijging, leenen kulturen met calciumzouten van organische zuren zich bijzonder goed tot het ophoopen van minder krachtig splitsende organismen, waardoor men alle gelegenheid verkrijgt, deze anders zoo snel verdrongen soorten te leeren kennen.

De oorzaak, dat ook gedurende deze eerste periode de ureumsplitsers zulk een grooten voorsprong op alle in het ruw infectiemateriaal meegevoerde microben verkrijgen zoodat deze dan reeds geheel verdrongen worden, is deze, dat de voor hen specifieke energiebron, het ureum, te hunner beschikking is.

Wil men dus een inzicht krijgen in de talrijke soorten zwakke ureumsplitsers, dan moet men de kulturen uitzaaien vóór alle calcium aan koolzuur is gebonden.

In den regel bereikt men een goed resultaat wanneer na 2 à 3 dagen wordt uitgezaaid op vleeschgelatine of op een kultuurbodem, welke is samengesteld uit duinwater 10 ‰ gelatine 0.05 % K_2HPO_4, 0.05 NH_4Cl en 0.5 % calc. malaat.

Een schoon beeld geven ons deze proeven van het groot aantal ureumsplitsende microben, dat de bodem huisvest; zij volgen elkaar

bij het voorschrijden van het proces en bij toenemende alkaliteit op, tot eindelijk de sterksten, de meest krachtig hydrolyseerende soorten overblijven.

Van de vele zwak ureumsplitsende soorten, welke aanwezig zijn eene uitvoerige beschrijving te geven zou weinig zin hebben.

Bij mijne proefnemingen in October, November en December 1904 in het *Microbiologisch Laboratorium*, onder leiding van Professor BEYERINCK te Delft, kwam in deze kulturen zeer regelmatig eene microbe voor, welke de aandacht op zich deed vestigen door de vorming van een roode en gele kleurstof op vleeschagar of vleeschgelatine. De koloniën zijn helgeel gekleurd, terwijl een roode kleurstof in den voedingsbodem diffundeert.

Speciaal kwam deze bacterie in kulturen met citraat en tartraat in grooten getale voor, zoodat men bij gebruik van deze zouten de genoemde soort kan ophoopen.

Ent men in dezelfde kultuurvloeistof twee à drie keer over bij eene temperatuur van 23° en een titer van ± 35 c.c. N. per 100 c.c. kultuurvloeistof, zoo wordt deze bacterie dikwijls nagenoeg tot reinkultuur opgehoopt.

Beschrijving van bacillus erythrogenes.

Bacillus erythrogenes behoort tot de zeer krachtig oxydeerende fermenten; zoowel suikers als zouten van organische zuren en ook eiwitten worden geassimileerd. In leidingwater, 0.05 % K_2HPO_4 heeft bij aanwezigheid van ureum goede groei plaats, indien een der volgende verbindingen als koolstofbron is toegevoegd: glucose, maltose, rietsuiker, asparagine, calcium- en natriumzouten der vluchtige vetzuren, (uitgezonderd van mierenzuur, welke een geringen groei geven) en der meerbasische zuren als appelzuur, melkzuur, citroenzuur, wijnsteenzuur en barnsteenzuur (uitgezondern oxaalzuur).

Melk bleek een zeer geschikte voedingbodem te zijn. De ontwikkeling hierin gaat gepaard met het optreden van een onaangenaam zoeten reuk.

Zelfs calciumhumaat als koolstofbron toegevoegd geeft nog groei en dus ureumsplitsing.

Amylum wordt echter niet aangetast, zoodat blijkbaar geen diastatisch enzym gevormd wordt.

De gele kleurstof is aan het bacteriën-lichaam gebonden en ontstaat onafhankelijk van de samenstelling van den voedingsbodem; echter is voor hare vorming de invloed van het licht noodzakelijk.

De roode, diffundeerende kleurstof, ontstaat slechts bij eiwitvoeding en lichtafsluiting. In het donker ontstaan, wordt deze kleurstof in 't licht gebracht spoedig ontleed.

Gekultiveerd op vleeschagar bij lichtafsluiting vertoont de witte kolonie zich op een fraai rood diffusieveld; gekultiveerd bij aanwezigheid van licht, ontstaat een helgele kolonie op een kleurloos veld.

Welken invloed de beide kleurstoffen op de levensfuncties der microben uitoefenen, kon niet worden uitgemaakt.

De gelatine wordt door de krachtig splitsende variëteiten gesmolten, door de zwaksplitsende niet.

De lengte der bacterie bedraagt 2—4 μ
Breedte 1—1.5 μ

De bacterie is beweeglijk, komt in vloeistoffen meestal als dubbelstaafje voor; op vasten kultuurbodem vormt ze soms snoeren.

Er heeft geen sporenvorming plaats.

Het optimum van den groei ligt bij ± 30°.

Het optimum van hare urease bij ± 51°.

Ureumsplitsing door de krachtigste variëteit vindt men in onderstaande tabel.

De cijfers geven het aantal c.c. $^1/_{10}$ N. H_2SO_4 aan, welke noodig zijn voor de neutralisatie van 10 c.c. kultuurvloeistof.

Gekultiveerd is bij 33°.

In vleeschwater ureum.

Na dagen	1	2	3	4.
2% ureum	13.5	33.	45	44.
6% ureum	19.	45	68	68.

Vergelijken we de hier beschreven variëteiten met de door Löhnis [1]) geïsoleerde, dan blijken ze in grootte en dubbele kleurstofvorming overeen te stemmen; in 't oog springend is echter het verschil in ureumsplitsend vermogen.

Bij zijne proefnemingen werden door een *bacillus erythrogenes* in bouillon 2% en 5% ureum respectievelijk $^1/_{10}$ % en 1% ureum omgezet terwijl de hier beschrevene in bouillon 2% en 6% ureum resp. $1^1/_2$ % en 2% ureum splitst.

De minder krachtige, hier geïsoleerde stammen splitsten nog in genoemde kultuurvloeistoffen resp. $^1/_2$ % en 1% ureum.

Het is dus duidelijk, dat de soort *Bacillus erythrogenes* variëteiten omvat van zeer verschillend ureumsplitsend vermogen.

---

[1]) Centr. bl. f. Bakt. Abt. XIV Bd 1905.

De krachtige splitsers kenmerken zich tevens door het bezit van tryptische enzymen.

§ 3. *Ammoniumzouten van organische zuren als koolstofbron voor ureumsplitsende microben.*

Ammoniumzouten van organische zuren zijn in kultuurbodems, welke tevens ureum en de anorganische zouten bevatten, de verbindingen bij uitnemendheid voor de ontwikkeling van krachtige ureumsplitsers.

Zoowel het gesplitst ureum, als ook het vrijkomend ammoniumcarbonaat van het geoxydeerde ammoniumzout dragen tot de snelle stijging van de alkaliteit der kultuurvloeistof bij.

Voorloopige proeven toonden aan, dat met een ureumgehalte van ± 5 % in deze kulturen de beste resultaten verkregen worden; de groei is bij deze ureumconcentratie nog zeer goed.

Geheel op analoge wijze als de ammoniumzouten gedragen zich verschillende suikers als koolstofbron voor ureumsplitsers; de soorten welke op den voorgrond treden komen in 't algemeen overeen met de krachtige door MIQUEL geïsoleerde soorten.

Een kultuurvloeistof, bestaande uit
100 duinwater
0.05 K_2HPO_4
1 ammoniummalaat
5 ureum
geïnfecteerd met ± twee gram grond of rioolwater en gekultiveerd bij ± 33° bevat na 48 uur soms zelfs reeds na 36 uur slechts ureumsplitsende fermenten. Een totale verdringing van alle andere organismen heeft in dien korten tijd plaats gehad.

De splitsing van het ureum geschiedt bij aanwezigheid van gemakkelijk assimileerbare koolstofbronnen als malaat en lactaat sneller dan bij minder gemakkelijk assimileerbare verbindingen als tartraat of acetaat.

Het malaat is ook voor deze organismen weder eene buitengewoon gemakkelijk assimileerbare verbinding, zooals dit in 't algemeen het geval is; hierna volgen dan lactaat, citraat, succinaat, tartraat, butyraat en acetaat.

Is echter in een kultuur met een dezer zouten de eindtiter bereikt, dan worden in 't algemeen dezelfde krachtige soorten waargenomen in malaat als in tartraat en acetaat kulturen.

Gaan we nu de soorten na, die elkaar in deze kultuurvloeistoffen opvolgen, dan blijkt bij uitzaaiïng op vleeschgelatine ½ % ureum

of ammoniummalaat gelatine $^1/_2$ % ureum, dat reeds na twee dagen, als de titer ± 60 c.c. N. per 100 c.c, kultuurvloeistof is, het aantal micrococcen en smeltende bacteriën snel vermindert; terwijl de alkaliteit toeneemt, gaan sporevormers benevens een niet sporevormende ureumsplitser hun plaats innemen,

De vele in de kulturen met calciumzouten waargenomen zwaksplitsende organismen gaan snel ten onder.

Na 3 à 4 dagen zijn nog slechts zeer krachtig hydrolyseerende microben overgebleven terwijl micrococcen en smeltende soorten zijn verdwenen.

De groei op neutrale vleeschgelatine der in de sterk akalische vloeistof aanwezige soorten is zeer slecht of gelukt in 't geheel niet.

In 't algemeen kenmerken de koloniën op vleeschgelatine 1% ureum of ammoniummalaatgelatine 1% ureum, zich door hare geringe afmetingen terwijl een veld van calciumphosphaat en calciumcarbobonaat kristallen deze omgeeft.

Na 5 of 6 dagen is de titer tot een maximum ± 125 c.c. N. per 100 c.c, kultuurvloeistof gestegen zoodat ± 4% ureum zijn gesplitst.

De 4 à 5 aanwezige soorten zijn de *urobacillus leubii* (BEIJERINCK) en de krachtigste door MIQUEL beschreven soorten, de *urabacillus maddoxii, freudenreichii* en *duclauxii* benevens een nog niet beschreven niet sporevormende soort, welke *urobacillus jakschii* benoemd zal worden.

Bij overenting in kulturen met ammoniummalaat komen vooral de *urobacillus maddoxii* en *urobacillus duclauxii* benevens de *urobacillus jakschii* op den voorgrond. Somtijds verdringt de *urobacillus jakschii* de beide andere soorten bijna geheel en wordt nagenoeg tot reinkultuur opgehoopt.

Gaat men van gepasteuriseerd materiaal uit, dan zijn het vooral de *urobacillus maddoxii* en *urobacillus duclauxii* welke zich doen gelden.

In deze kultuurvloeistoffen kwam de *urobacillus pasteurii* BEIJERINCK niet voor zoodat deze tot de ureumbacteriën mag worden gerekend welke bepaald eiwitten voor haar groei noodig hebben.

Voor de beschrijving der *urobacillus leubii, freudenreichii, maddoxii* en *duclauxii* kan worden volstaan met de vermelding der hoofdkenmerken.

De *urobacellus jakschii* zal evenwel uitvoeriger beschreven worden.

Urobacillus leubii (BEIJERINK).

Urobacillus leubii, welke in de *Voorflora* van BEIJERINK's ophoo-

pingsproeven algemeen voorkomt, is een beweeglijk staafje, dat langwerpige sporen kan verkrijgen,

Op vleeschgelatine met ammoniumcarbonaat is deze soort moeilijk van *urobacillus pasteurii* te onderscheiden. Van dezen bodem overgeënt op neutrale vleeschgelatine groeit ze tot twee soorten koloniën: nl. tot gele, troebele, dunne, sporevormende en tot glasachtige, doorzichtige sporevrije koloniën.

De groei is echter op vleeschgelatine met ammoniumcarbonaat veel beter dan op neutrale vleeschgelatine.

De sporen kunnen kookhitte verdragen en gedroogd worden.

Gelatine wordt niet gesmolten.

In bouillon 6 °/₀ ureum wordt in 4—5 dagen 2½ °/₀ ureum gesplitst.

Urobacillus freudenreichii Miquel.

Urobacillus freudenreichii is een beweeglijk staafje, 5—6 μ lang, 1 μ breed; op vasten voedingbodem groeit zij tot lange draden.

Elliptische glanzende endosporen worden gevormd, welke eene hitte van 94° gedurende 2 uren kunnen verdragen.

Neutrale gelatine wordt door de onregelmatig gevormde koloniën langzaam gesmolten, terwijl gelatine waaraan ureum is toegevoegd niet wordt gesmolten en de koloniën daarop den karakteristieken kogelvorm aannemen.

2 °/₀ ureum in bouillon worden binnen 4 dagen bij 30°—35° geplitst.

Miquel isoleerde deze soort uit lucht, rivierwater, grond en uit mest van herkauwers

Urobacillus maddoxii Miquel.

Bewegelijk staafje 3—6 μ lang, 1 μ breed, vormt eivormige endosporen, welke eene hitte van 94° gedurende twee uren kunnen verdragen.

Op neutrale vleeschgelatine komt zij dikwijls niet tot ontwikkeling; op ammoniakale gelatine is de groei tamelijk goed.

Binnen 3 dagen worden 2°/₀ ureum in bouillon gesplitst.

De bacterie is uit rioolwater en rivierwater geïsoleerd.

Urobacillus duclauxii Miquel.

Evenals de beide vorige soorten beweeglijk; lengte 2—10 μ, breedte 0,6—0,8 μ.

De bacterie vormt kleine elliptische endosporen welke een hitte van 95° gedurende twee uren verdragen.

In neutralen voedingbodem ontstaat geen groei op ammoniakale of met ureum voorziene vleeschgelatine ontstaan zeer kleine nauwelijks waarneembare koloniën welke door kristallen omringd zijn.

De gelatine versmelt niet maar wordt na 40—50 dagen stroopig.

2 °/₀ ureum in bouillon worden binnen 24 uur omgezet.

Urobacillus jakschii.

Urobacillus jakschii is een zeer beweeglijk staafje in een kultuurvloeistof welke niet te alkalisch is; zijn eenige procenten ureum daarin gesplitst, dan wordt zij onbeweeglijk.

Lengte der bacterie 5—7 μ; breedte 1—1.5 μ. Sporen worden niet gevormd.

Op neutrale vleeschgelatine wordt zelden groei verkregen; wordt echter ammoniumcarbonaat of 1 °/₀ à 2 °/₀ ureum toegevoegd, dan ontstaan kleine coliachtige koloniën, welke zich met een krans calciumphosphaat kristallen omgeven.

De gelatine wordt niet versmolten maar is na een maand stroopig.

2 °/₀ ureum in bouillon worden in 24 uur gesplitst. Van 10 °/₀ ureum in bouillon worden 6—7 °/₀ tot ammoniumcarbonaat omgezet.

In kultuurvloeistoffen, welke de noodige anorganische zouten, benevens ureum bevatten, wordt met de volgende verbindingen na enting goede groei van deze bacterie verkregen: pepton, asparagine, glucose, rietsuiker, maltose, laktose, malaten, citraten, lactaten, tartraten, en zouten van vluchtige vetzuren (uitgezonderd zouten van mierenzuur).

§ 4. *Het iriseeren van kultuurplaten.*

Het ureumsplitsend vermogen van bacteriën kan volgens de methode van Beijerink met behulp van de gistwater-ureum gelatineplaat 2 à 3 °/₀ ureum op zeer elegante wijze worden aangetoond door het op dezen kultuurbodem door die bacteriën veroorzaakte *Irisverschijnsel.*

Verondersteld wordt, dat het bij de splitsing van ureum vrijkomende ammoniumcarbonaat het verschijnsel bewerkstelligd, tengevolge van de precipitatie van calciumcarbonaat en -phosphaat.

Eene verklaring te geven van het ontstaan van het irisverschijnsel op de gistwater-ureumgelatineplaat, levert echter bezwaren, aangezien de kultuurbodem te samengesteld is, om de juiste voorstelling van het proces te verkrijgen.

Bij de proeven met ureumbacteriën op kultuurbodems welke waren samengesteld uit leidingwater, 0.5 % calciumzout van een organisch zuur, 1 % ureum, 0.05 % K_2HPO_4, 10 % gelatine of 1.5 % agar, trad dikwijls het irisverschijnsel op.

De mogelijkheid van het samenstellen van een eenvoudigen kultuurbodem, zoo mogelijk gestold door agar, welke het irisverschijnsel zeer fraai geeft, scheen, de bovengenoemde feiten in aanmerking genomen, niet uitgesloten.

Langs dezen weg zouden dan overeenkomstige verschijnselen op de gistwaterureumgelatineplaat en het iriseeren van meer samengestelde kultuurplaten in 't algemeen kunnen worden verklaard.

Na eenig zoeken gelukte het, op de volgende wijze een kultuurbodem samen te stellen welke geheel aan de gestelde eischen voldoet.

In duinwater agar worden ± 0,5% calciummalaat of -lactaat en 0,05% ammoniumcitraat opgelost. De gesmolten agar wordt afgekoeld tot den nog juist vloeibaren toestand, waarna zoolang eene K_2HPO_4 oplossing wordt bijgedruppeld tot eene zwakke opaliseering is waar te nemen; nu wordt hiermede een kultuurplaat gegoten.

Deze kultuurplaat is, indien met zorg vervaardigd, nagenoeg helder. Het gevormde calciumphosphaat blijft met het ammoniumcitraat opgelost. Een druppel ammoniumcarbonaatoplossing veroorzaakt op dezen bodem het irisverschijnsel, terwijl na eenige oogenblikken rond den druppel een precipitaat ontstaat.

Dit verschijnsel treedt geheel op dezelfde wijze op, indien inplaats van agar, gelatine wordt genomen.

Het iriseerend veld en het precipitaat zijn microscopisch en chemisch identiek aan die welke op de gistwaterureumgelatineplaat ontstaan.

Bevat de kultuurbodem geen phosphaat, zoo geeft ammoniumcarbonaat daarop gebracht een zeer gering veld van $CaCO_3$; een druppeltje ammoniak in 't geheel geen iriseerend veld.

Is echter slechts calciumphosphaat, opgelost in ammoniumcitraat als eenige calciumverbinding aanwezig, dan veroorzaakt ammoniumcarbonaat en ook ammoniak op zoodanige plaat een uiterst fraai iriseerend veld.

Wordt aan dezen kultuurbodem ± 2% ureum toegevoegd, zoo veroorzaken ureumsplitsende microben daarop het „*irisverschijnsel*".

Uit deze proefnemingen blijkt, dat het calciumphosphaatneerslag als de eigenlijke oorzaak van het iriseeren van den kultuurbodem moet worden beschouwd, terwijl het tegelijkertijd gevormde calciumcarbonaat een ondergeschikte rol speelt.

Het iriseeren van kultuurplaten door bepaalde daarop groeiende bacteriën en het *irisverschijnsel* van BEYERINCK moeten we dus be-

schouwen als gevolg van het precipiteeren van calciumphosphaat in in de eerste en calciumcarbonaat in de tweede plaats.

§ 6. *Verkregen resultaten.*

1. Ureumsplitsing kan bij afwezigheid van eiwitten door meerdere microben geschieden, indien eenige geschikte koolstofbron aanwezig is.

2. In kulturen waarin ureumsplitsing plaats heeft, wordt ± 98 °/₀ van de totaalenergie, door de splitsing van het ureum vrijgemaakt.

3. Kulturen met calciumzouten van organische zuren als koolstofbron, zijn buitengewoon geschikt tot het verkrijgen van zwaksplitsende ureumbacteriën. De hierin voorkomende *bacillus erythrogenes* is daarvan uitvoeriger beschreven.

4. Kulturen met ammoniumzouten van organische zuren of suikers als koolstofbron, leiden snel tot de ophooping van krachtig ureumsplitsende sporevormers en de niet sporevormende *urobacillus jakschii*

5. Het iriseeren van kultuurplaten en het „*irisverschijnsel*" op de gistwaterureumgelatineplaat, zijn het gevolg van het precipiteeren van calciumphosphaat terwijl tegelijk gevormd calciumcarbonaat daarbij een ondergeschikte rol vervult.

Aan het einde van dit onderzoek zij het mij vergund, mijn oprechten dank te betuigen aan mijn zoo hooggeachten leermeester Professor Dr. M. W. Beijerinck voor zijne vele goede raadgevingen en den grooten steun welke ik bij deze proefnemingen heb ondervonden.

Wiskunde. — De heer Schoute biedt eene mededeeling aan: „*Over groepen van polyeders met diagonaalvlakken, afgeleid uit polytopen.*"

Inleiding.

1. Onder „diagonaalvlak" van een veelvlak verstaan we een vlak, dat met de begrenzing van dit lichaam louter ribben gemeen heeft [1]).

Onder de regelmatige veelvlakken komen er twee voor, die diagonaalvlakken toelaten, het achtvlak en het twintigvlak. Bij het achtvlak gaat er door elke ribbe een diagonaalvlak, dat het middel-

[1]) In de laatste verhandeling van Dr. Fr. Schuh getiteld: „Over de meetkundige plaats, enz." (Verhandelingen eerste sectie, deel IX, no. 5, 1908) komt een reeks van polyeders voor met de eigenschap, dat er door elke ribbe een diagonaalvlak gaat. Daarbij komen door uitbreiding op meerdimensionale ruimten ook polytopen met diagonaalruimten voor den dag.

punt bevat en den hoek tusschen de beide door de ribbe gaande zijvlakken middendoor deelt. Bij het twintigvlak gaan er door elke ribbe twee diagonaalvlakken; de hoek dier beide vlakken komt met dien der beide door de ribbe gaande zijvlakken in deelvlakken overeen en vormt met dezen een dubbelverhouding met $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ tot een der zes samenhangende waarden.

Het uitsluitend optreden van diagonaalvlakken bij de twee genoemde regelmatige lichamen hangt klaarblijkelijk hiermee samen, dat door de hoekpunten meer dan drie zijvlakken gaan. Neemt men van de door een hoekpunt gaande driehoekige zijvlakken de door dit punt gaande zijden weg, waardoor men alleen de overstaande zijden overhoudt, dan vindt men bij het achtvlak een dit hoekpunt naburig vierkant, bij het twintigvlak een dit hoekpunt naburigen regelmatigen vijfhoek, in een diagonaalvlak gelegen. Bij het twintigvlak gaan er door een ribbe AB twee diagonaalvlakken, omdat AB ligt in twee zijvlakken ABP en ABQ en dus ook in de bij de hoekpunten P en Q behoorende diagonaalvlakken. Bij het achtvlak gaat er door een ribbe AB slechts een diagonaalvlak, wijl de derde hoekpunten P en Q van de door AB gaande zijvlakken ABP en ABQ overstaande hoekpunten zijn en hier bij deze punten hetzelfde diagonaalvlak behoort.

De diagonaalvlakken van het twintigvlak sluiten een regelmatig twaalfvlak in.

2. Onder „diagonaalruimte" van een vierdimensionaal door veelvlakken begrensd polytoop verstaan we een ruimte, die met de begrenzing van dit polytoop louter zijvlakken gemeen heeft.

Onder de regelmatige cellen komen er twee voor, die diagonaalruimten toelaten, de C_{16} en de C_{600}. Bij de C_{16} gaat er door elk zijvlak een diagonaalruimte, die het middelpunt bevat en den hoek tusschen de beide door het zijvlak gaande grensviervlakken middendoor deelt. Bij de C_{600} gaan er door elk zijvlak twee diagonaalruimten; de hoek dier beide ruimten komt met dien der beide door het zijvlak gaande grensruimten in deelruimten overeen en vormt met dezen een dubbelverhouding, zoo als spoedig blijken zal eveneens met $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ tot een der zes samenhangende waarden.

Het uitsluitend optreden van diagonaalruimten bij de twee genoemde regelmatige cellen hangt weder hiermee samen, dat door de hoekpunten meer dan vier grensruimten gaan en — moeten we er hier bijvoegen — deze grensruimten viervlakken zijn [1]). Neemt men van

[1]) Deze toevoeging is hier noodzakelijk. Immers door een hoekpunt van de regelmatige cel C_{24} gaan *zes* begrenzende achtvlakken en toch vertoonen de ruimte-

de door een hoekpunt gaande viervlakkige grensruimten de door dit punt gaande zijvlakken weg, waardoor men alleen de overstaande zijvlakken overhoudt, dan vindt men bij C_{16} een dit hoekpunt naburig regelmatig achtvlak, bij C_{600} een dit hoekpunt naburig regelmatig twintigvlak, in een diagonaalruimte gelegen. Bij C_{600} gaan er door een zijvlak ABC twee diagonaalruimten, omdat ABC ligt in twee grensruimten $ABCP$ en $ABCQ$ en dus ook in de bij de hoekpunten P en Q behoorende diagonaalruimten. Bij C_{16} gaat er door een zijvlak ABC slechts een diagonaalruimte, wijl de vierde hoekpunten P en Q van de door ABC gaande grensviervlakken overstaande hoekpunten zijn en hier bij deze punten dezelfde diagonaalruimte behoort.

De diagonaalruimten van C_{600} sluiten een regelmatige C_{120} in.

3. Onder „diagonaalruimte R_{n-1}" van een n-dimensionaal polytoop verstaan we een ruimte R_{n-1}, die met de begrenzing van dit polytoop louter grensruimten R_{n-2} gemeen heeft.

Van de drie regelmatige polytopen, het simplex $S_{(n+1)}$ met $n+1$ hoekpunten en $n+1$ grensruimten R_{n-1}, het maatpolytoop M_n met 2^n hoekpunten en $2n$ grensruimten R_{n-1} en het kruispolytoop K_n met omgekeerd $2n$ hoekpunten en 2^n grensruimten R_{n-1}, laat slechts het laatste diagonaalruimten R_{n-1} toe. Door elke een grenssimplex $S_{(n-1)}$ dragende ruimte R_{n-2} van dit polytoop K_n gaat een diagonaalruimte R_{n-1}, die het middelpunt bevat en den hoek tusschen de beide door deze ruimte R_{n-2} gaande grensruimten R_{n-1} middendoor deelt.

Het uitsluitend optreden van diagonaalruimten R_{n-1} bij het genoemde der regelmatige n-dimensionale polytopen hangt weer hiermee samen, dat door een hoekpunt 2^{n-1} en dus meer dan n grensruimten R_{n-1} gaan. Neemt men van de door een hoekpunt

---

doorsneden van C_{24} geen diagonaalvlakken. Zij vertoonen echter — zooals Mevr. A. Boole-Stott mij deed opmerken — wat men „pseudo-diagonaalvlakken" zou kunnen noemen. Neemt men — zie fig. 64 van deel II mijner „*Mehrdimensionale Geometrie*" — van de zes in A samenkomende achtvlakken de aan A naburige vierkanten, dan heeft men met de zes zijvlakken van een kubus te doen, waarvan alle hoekpunten en ribben ook hoekpunten en ribben van C_{24} zijn, terwijl de zijvlakken geen zijvlakken van C_{24} uitmaken. Wordt C_{24} door een dezen kubus treffende ruimte gesneden, dan zullen de hoekpunten der doorsnee, die snijpunten zijn met ribben van den kubus dus de eigenschap hebben in een vlak te liggen zonder dat al de zijden van den veelhoek van doorsnee met deze punten tot hoekpunten ribben der doorsnee zijn. In het vierde gedeelte mijner mededeeling „Over vierdimensionale netten en hun ruimtedoorsneden" hoop ik gelegenheid te hebben op dit punt terug te komen.

gaande grenssimplexen $S_{(n)}$ de door dit punt gaande ruimten R_{n-2} weg, waardoor men alleen de 2^{n-2} overstaande ruimten R_{n-2} overhoudt, dan vindt men een dit hoekpunt naburig kruispolytoop K_{n-1}, in een diagonaalruimte R_{n-1} gelegen. Ook hier gaan door elke ruimte R_{n-2} van een grenssimplex $S_{(n-1)}$ wel twee grensruimten R_{n-1}. Wijl echter de nieuwe hoekpunten P en Q van de in die grensruimten gelegen simplexen $S_{(n)}$ overstaande hoekpunten zijn van K_n en deze tot hetzelfde polytoop K_{n-1} voeren, gaat er door elk grenssimplex $S_{(n-1)}$ slechts een diagonaalruimte R_{n-1}.

4. Snijdt men een vierdimensionaal polytoop, waarvan elk zijvlak zich in d diagonaalruimten bevindt, door een ruimte, die geen ribbe van het polytoop bevat, dan verkrijgt men als doorsnee een veelvlak met de eigenschap, dat er door elke ribbe d diagonaalvlakken gaan. Wordt nl. een zijvlak van het polytoop — en dus ook elke der d dit zijvlak bevattende diagonaalruimten — door de snijruimte gesneden, dan levert dit steeds een ribbe der doorsnee en d er door gaande diagonaalvlakken op. Dus zijn de doorsneden van de cellen C_{16} en C_{600} met een willekeurige aangenomen ruimte veelvlakken met de eigenschap, dat er ook door elke ribbe achtereenvolgens een diagonaalvlak en een tweetal diagonaalvlakken gaat. Wijl vier ruimten door een zijvlak, gezamenlijk in R_4 gelegen, door een willekeurige ruimte in vier door een lijn gaande vlakken met dezelfde dubbelverhouding gesneden worden, zullen de niet door een ribbe van C_{600} gaande ruimtedoorsneden dezer cel zich dus bovendien hierdoor kenmerken, dat de paren van zijvlakken en diagonaalvlakken door een ribbe een standvastige dubbelverhouding opleveren. Immers, uit de regelmatigheid volgt, dat — zoo als trouwens boven reeds werd opgemerkt — bij C_{600} deze dubbelverhouding voor alle zijvlakken dezelfde is. Wijl de doorsnee van C_{600} met een ruimte loodrecht op een as OE_0 een regelmatig twintigvlak is, als de snijruimte dicht genoeg bij het hoekpunt E_0 ligt, moet de constante dubbelverhouding, die bij C_{600} optreedt, aan die van het twintigvlak gelijk zijn.

5. Trouwens, het is niet moeielijk rechtstreeks aan te toonen, dat deze dubbelverhouding bij C_{600} werkelijk $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ is.

Is nl. ABC een zijvlak van C_{600} en zijn (fig. 1) O, P, Q achtereenvolgens het middelpunt van C_{600} en de vierde hoekpunten der beide door ABC gaande grensruimten, dan zal het tot vlak van teekening aangenomen vlak OPQ het zwaartepunt G van het zijvlak ABC bevatten en in dit punt volkomen loodrecht op dit zijvlak

staan. Uit $GP = GQ$ en $OP = OQ$ volgt, dat de vierhoek $OPGQ$ een deltoïde is met OG tot symmetrie-as. Verder stellen de loodlijnen GP' en GQ' uit G op OP en OQ neergelaten de doorgangen van het vlak met de beide diagonaalruimten voor, zoodat

$$\frac{PR}{PS} : \frac{QR}{QS} = \left(\frac{PR}{PS}\right)^2 = \left(\frac{tg\alpha - tg\beta}{tg\alpha + tg\beta}\right)^2 = \frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}$$

de gezochte dubbelverhouding $(PQRS)$ voorstelt. Nu vindt men, in de ribbe van C_{600} als eenheid, zoo $\sqrt{5}$ kortheidshalve door e wordt voorgesteld (zie mijn „*Mehrdimensionale Geometrie*", deel II, blz. 200),

$$OP = \frac{1}{2}(e+1),\ OP' = \frac{1}{4}(e+3),\ OG = \frac{1}{6}(e+3)\sqrt{3},\ PG = \frac{1}{3}\sqrt{6}.$$

Hieruit volgt

$$\beta = 60^\circ,\ \sin\alpha = \frac{1}{8}(e+1)\sqrt{6},\ \cos\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{7-3e}$$

en dus

$$(PQRS) = \left(\frac{e-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(3-e) = 0{,}381966\ldots\ ^{1)}$$

6. In het derde gedeelte van mijne beschouwingen „Over vierdimensionale netten en hun ruimte-doorsneden", dat weldra in deze „Verslagen" verschijnen zal, zullen we gelegenheid hebben op de bij de doorsneden der cel C_{16} optredende diagonaalvlakken de aandacht te vestigen; wijl elk hoekpunt — of eigenlijk elk paar overstaande hoekpunten — van C_{16} een naburig achtvlak toelaat, zijn de in die diagonaalvlakken gelegen veelhoeken steeds doorsneden van achtvlakken. De zich bij de doorsneden van C_{600} voordoende diagonaalvlakken zijn waarschijnlijk voor het eerst ontdekt door Mevr. A. Boole—Stott, die modellen van deze doorsneden maakte, en als doorsneden met diagonaalruimten verklaard door H. W. Curjel. [2])

Het doel van deze mededeeling is het geval, waarin de snijruimte een of meer ribben van C_{16} of C_{600} bevat, aan een afzonderlijke beschouwing te onderwerpen; van de hierbij optredende uitkomsten hebben inzonderheid die van C_{600} onze belangstelling gewekt.

A. *De ruimtedoorsneden door een ribbe van C_{16}.*

7. We beschouwen het geval, dat de snijruimte door de ribbe AB van C_{16} gaat, en duiden door A' en B' de aan A en B tegen-

[1]) Langs denzelfden weg kan bij het twintigvlak de dubbelverhouding gevonden worden.

[2]) Een serie dezer modellen, die o. a. de ontbinding van de 120 hoekpunten der C_{600} in de hoekpunten van vijf cellen C_{24} doet zien, bevindt zich in de verzameling van wiskundige modellen der Rijks-Universiteit te Groningen.

overstaande hoekpunten aan. Dan zijn alle hoekpunten op A en A' na naburig aan A en A', alle hoekpunten op B en B' na naburig aan B en B' en de vier overige hoekpunten P_1, P_2, P_3, P_4 (fig. 2) dus naburig aan A en B te gelijker tijd. Anders gezegd: de aan A en B naburige achtvlakken, die in verschillende ruimten liggen, doordringen elkaar in het vierkant $P_1P_2P_3P_4$, waarvan ze de hoekpunten gemeenschappelijk hebben. Door de ribbe AB gaan dus twee diagonaalruimten, waarvan er een bij de overstaande hoekpunten P_1, P_3, een ander bij de overstaande hoekpunten P_2, P_4 behoort; zij snijden het vlak van het vierkant $P_1P_2P_3P_4$, dat in het middelpunt O volkomen loodrecht staat op het vlak door AB en $A'B'$, achtereenvolgens in de diagonalen P_2P_4, P_1P_3. Is nu l de doorgang van de door AB gaande snijruimte met het vlak $P_1P_2P_3P_4$, welke doorgang met AB de snijruimte bepaalt, en snijdt l de diagonalen P_2P_4, P_1P_3 in de binnen het vierkant gelegen punten S_{13}, S_{24}, dan zal de doorsnee deze bijzonderheid vertoonen, dat de vlakken ABS_{13} en ABS_{24} diagonaalvlakken zijn en er door AB dus bij uitzondering *twee* diagonaalvlakken gaan.

In de boven reeds aangehaalde derde mededeeling omtrent vierdimensionale netten zal worden aangewezen, dat de bijzonderheid van twee door een ribbe gaande diagonaalvlakken zich bij de vier groepen van hoofddoorsneden van C_{16} niet voordoet.

B. De ruimtedoorsneden door een ribbe van C_{600}.

8. Door een ribbe AB (fig. 3) van C_{600} gaan vijf grensviervlakken dezer cel; de vijf overstaande ribben van deze viervlakken vormen de zijden van een regelmatigen vijfhoek $P_1P_2 \ldots P_5$, waarvan de hoekpunten te gelijker tijd aan A en B naburig zijn. Anders gezegd: de aan A en B naburige twintigvlakken, die in verschillende ruimten gelegen zijn, doordringen elkaar volgens den aan AB naburigen regelmatigen vijfhoek $P_1P_2 \ldots P_5$, waarvan ze de hoekpunten gemeenschappelijk hebben. Door de ribbe AB gaan dus vijf diagonaalruimten, achtereenvolgens bij de hoekpunten $P_1, P_2, \ldots, P_5$ behoorende; zij snijden het vlak van den vijfhoek, dat in het middelpunt M dezer figuur loodrecht op het vlak ABM staat, volgens de diagonalen P_5P_2, P_1P_3, $\ldots$ P_4P_1 van den vijfhoek, of — als men wil — volgens de zijden van den stervijfhoek $P_1P_3P_5P_2P_4$. Bij C_{16} was het middelpunt O van het vierkant $P_1P_2P_3P_4$ tevens het middelpunt der cel. Hier is het middelpunt M van den vijfhoek niet eens het middelpunt der beide elkaar doordringende twintigvlakken, laat staan het middelpunt van C_{600}; hier zal de lijn, die het midden M' van AB met M verbindt, het middelpunt O van C_{600} bevatten.

Als de doorsnee l van de snijruimte met het vlak van den aan de ribbe AB naburigen vijfhoek P_5P_2 in S_1 (fig.) 3 snijdt, is ABS_1 een diagonaalvlak. Want dit vlak is de doorsnee van de door AB en l bepaalde snijruimte met de door AB en P_5P_2 bepaalde diagonaalruimte van het aan P_1 naburige twintigvlak en S_1 ligt op P_5P_2 zelf, niet op het verlengde. Men ziet nl. gemakkelijk in, dat dit twintigvlak werkelijk gesneden wordt door een vlak door AB en een punt van P_5P_2, als dit punt op P_5P_2 zelf ligt, en er slechts een ribbe van het twintigvlak, de ribbe AB, in dit vlak zal liggen, als het punt op het verlengde van P_5P_2 ligt. Daartoe heeft men slechts te bedenken, dat de lijnen AB en P_5P_2, waarvan de eerste een ribbe, de tweede een koorde van C_{600} is, elkaar loodrecht kruisen. Want daaruit volgt, dat deze lijnen, eveneens ribbe en koorde, op het door de punten A, B, P_5, P_2 bepaalde twintigvlak zich in projectie (fig. 4) op een vlak door twee overstaande ribben pr, $p'r'$ van het twintigvlak kunnen voordoen als de in q loodrecht op het vlak van teekening staande ribbe en de in het vlak van teekening gelegen koorde pp', waarvan de uiteinden p,p' met de uiteinden der ribbe door ribben verbonden zijn. Wat dan onmiddellijk doet zien, dat een vlak door de zich in q projecteerende ribbe het twintigvlak al of niet snijdt, naarmate het ontmoetingspunt van dit vlak met pp' op deze lijn zelf ligt of op het verlengde. Voor den in fig. 3 aangegeven stand der snijruimte gaan er door AB dus vier diagonaalvlakken ABS_1, ABS_2, ABS_3, ABS_4; het snijpunt S_5 van l en P_4P_1 valt op het verlengde van deze zijde en levert dus geen diagonaalvlak op.

Op elke zijde P_5P_2 van den stervijfhoek (fig. 3) zijn behalve de uiteinden P_5, P_2, die tot zijvlakken en dus niet tot diagonaalvlakken voeren, de snijpunten Q_3, Q_4 met de andere zijden en het midden M_1 merkwaardig. Valt S_1 in Q_3 en worden dus de zijden P_5P_2 en P_4P_1 in hetzelfde punt gesneden, dan vallen er twee diagonaalvlakken samen en moet dit vlak, als het snijvlak der twee aan P_1 en P_5 naburige diagonaalruimten ABP_5P_2 en ABP_4P_1 den aan de ribbe P_1P_5 van C_{600} naburigen vijfhoek bevatten; in dit geval is de in het diagonaalvlak gelegen veelhoek — vergelijk in fig. 4 de volgens qr en qr' loodrecht op het vlak van teekening staande vlakken — dus een regelmatige vijfhoek. Valt S_1 in M, dan is het vlak ABM — vergelijk fig. 4 — een vlak van symmetrie voor het twintigvlak en bevat het dus behalve de ribbe AB de aan AB evenwijdige ribbe van het twintigvlak.

9. Mijn tweede verhandeling getiteld „Regelmässige Schnitte u.s.w." (Verhandelingen, eerste sectie, deel IX, n°. 4, 1907) bevat de ge-

gevens, die in staat stellen voor elke door een zeker aantal ribben van C_{600} gaande snijruimte uit de vier groepen van doorsneden aantal en stand der door een dier ribben gaande diagonaalvlakken te bepalen en de in die vlakken liggende twintigvlaksdoorsneden te construeeren. We zullen trachten dit kort uiteen te zetten.

In de platen II, IV, VI, VIII vindt men in het rechtsche gedeelte aangegeven, hoe de aan de hoekpunten van C_{600} naburige twintigvlakken zich op de assen OR_0, OF_0, OK_0, OE_0 projecteeren. Willen we met een oogopslag zien, welke doorsneden loodrecht op die assen ribben van twintigvlakken — en dus ook van C_{600} — bevatten, dan wenden we ons tot de bovenste regels van de platen XVIII, XVI, XIV, XII. We vinden dan het volgende tabelletje:

II^b, XVIII	$a_1(6)$,	$d_1(12)$,	$e_1(12)$,	$f_1(6)$,		
IV^b, XVI	$a_2(3)$,	$c_2(3)$,	$e_2(3)$,	$f_2(6)$,	$h_2(6)$,	$i_2(3)$,
VI^b, XIV	$a_3(1)$,	$b_3(5)$,	$c_3(10)$,	$f_3(5)$,	$g_3(10)$,	$i_3(10)$,
VIII^b, XII	$b_4(30)$,	$c_4(30)$,	$e_4(60)$,			

waarbij de aanwijzers 1, 2, 3, 4, die de groepen onderscheiden, met die van de groepen der twintigvlakken op (II^b), IV^b, VI^b, VIII^b overeenstemmen, terwijl de tusschen haakjes geplaatste getallen aangeven, hoeveel ribben er telkens in de snijruimte liggen. De gevallen a_1, a_2, a_3 echter kunnen buiten beschouwing blijven, omdat zij betrekking hebben op snijruimten, die de C_{600} geheel aan een zelfden kant laten en dus geen doorsneden met diagonaalvlakken kunnen opleveren; voor elk der zestien overige gevallen moet de snijlijn l der snijruimte met het vlak van den aan de gekozen ribbe naburigen vijfhoek geconstrueerd worden. Deze snijlijnen, d_1, e_1, . . . , e_4 genoemd naar de gevallen, waartoe ze behooren, zijn gezamenlijk in fig. 5 aangegeven.

10. Het bepalen der gezochte snijlijn l levert de minste moeite op, als de lijn twee der kenmerkende punten P_i, Q_i, M_i bevat, die achtereenvolgens met een hoekpunt, een snijpunt van twee niet opvolgende zijden en het midden van een zijde van den stervijfhoek overeenkomen. We behandelen, ter verdeeling der moeielijkheden, deze eenvoudige gevallen het eerst.

Geval d_1. Op de plaat II^b vindt men onder d, dat de twee groepen I en VII, elk van vier twintigvlakken, in de snijruimte gelegen zijvlakken leveren, terwijl de groep III zes door twee overstaande ribben gaande twintigvlaksdoorsneden geeft. Dus gaat de gezochte lijn d_1 door een hoekpunt P_i en een midden M_i en kan

men, als men P_i in P_1 legt, voor M_i òf M_3 òf M_4 nemen. Hieruit blijkt, dat de gezochte lijn voor dit geval met een van tien gelijkwaardige lijnen samenvalt; waarbij dan onder „gelijkwaardige lijnen" die lijnen verstaan worden, die door een draaiing van den vijfhoek om het middelpunt M over een veelvoud van 72° of door een spiegeling ten opzichte van een der lijnen P_iM, d.i. in het algemeen door een transformatie, die den vijfhoek als geheel in zich zelf overvoert, in elkaar overgaan.

De lijn d_1 snijdt nog twee zijden, P_5P_2 en P_3P_4, van den stervijfhoek; wijl P_1 geen diagonaalvlak oplevert, gaan er dus door elk der 12 ribben in de snijruimte gelegen drie diagonaalvlakken. Deze nieuwe diagonaalvlakken staan in verband met de groepen IV en VI, die elk 12 twintigvlakken bevatten. Daar de doorsnee bij IV nabij het middelpunt, bij VI vrijwel aan den rand plaats vindt, is het waarschijnlijk, dat IV met het punt op P_5P_2, VI met het punt op P_3P_4 overeenkomt. Later zal worden aangewezen, dat dit werkelijk het geval is.

We merken nog op, dat het aantal 12 der in de snijruimte liggende ribben door elk der groepen I, III, IV, VI, VII van twintigvlakken wordt weergegeven, wijl de overeenkomstige diagonaalvlakken — de zijvlakken van I en VII daaronder begrepen — achtereenvolgens 3, 2, 1, 1, 3 ribben bevatten.

Geval c_3. Op plaat VI^b voert onder c de groep I_3 tot een punt Q_i en de groep II_3 tot een punt M_i; is voor Q_i het punt Q_1 aangenomen, dan kan M_i in M_2 of M_4 worden gelegd.

De gekozen lijn c_3 levert nog slechts een snijpunt, op P_5P_2; dus moet er nog een groep twintigvlakken zijn met een ribbe in de snijruimte. Werkelijk is er slechts een, n.l. VI_3, want IV_3 behoort weer bij Q_1.

Geval e_4. Op plaat VIII^b heeft men onder e met een centrale doorsnee van C_{600} te doen, waaruit volgt, dat de lijn e_4 door het middelpunt M van den vijfhoek gaat. Verder geven de groepen III_4, IV_4, V_4 achtereenvolgens een punt P_i, een punt Q_i, een punt M_i. Dus is e_4 een hoekpuntsmiddellijn van den vijfhoek, bijv. $P_1M_1Q_1$. Hier treden geen andere snijpunten op.

11. We zouden langs dezen weg kunnen voortgaan en — van het gemakkelijke tot het moeielijke opklimmend — achtereenvolgens de overige lijnen door twee merkwaardige punten, de lijnen door een merkwaardig punt en de lijnen evenwijdig aan een der zijden kunnen behandelen. We geven er echter thans de voorkeur aan voor een willekeurig geval uiteen te zetten, hoe met behulp van

Fig 3 der aangehaalde verhandeling, die met geringe wijziging hier als fig. 4 verschijnt, de bij een bepaalde groep van twintigvlakken behoorende deelingsverhouding der overeenkomstige zijde van den stervijfhoek bepaald kan worden.

We beschouwen daartoe de boven onder d_1 reeds genoemde groep IV_1 van plaat II^b en herinneren er aan, dat de zich bij deze groep voordoende twintigvlaksdoorsneden volgens de aangehaalde verhandeling worden ingesneden door vlakken die volgens een lijn evenwijdig aan pp^I (fig. 4) loodrecht op het vlak van teekening staan. Is de in q loodrecht op het vlak van teekening staande ribbe weer de ribbe AB en de in het vlak van teekening liggende koorde pp' de zijde van den stervijfhoek, dan wordt het op die zijde te bepalen punt S, dat den stand van het diagonaalvlak ABS doet kennen, gevonden door uit q de lijn qS evenwijdig aan pp^I te trekken. Nu is pw het kleinste stuk van de in uiterste en middelste reden verdeelde lijn pp' en is dit voor de segmenten $p^{II}r = wq$ ten opzichte van de segmenten $p^Ir = p^{II}s = sq$ het geval. Wordt de verhouding van de zijde eens regelmatigen vijfhoeks tot diens diagonaal door $\frac{z}{d}$ aangegeven, dan levert de uit gelijkvormige driehoeken afgeleide evenredigheid

$$p^Iw : wq = pw : wS,$$

die we tot

$$p^Iq : p^Iw = pS : pw$$

vervormen,

$$\frac{pS}{pp'} = \frac{3d + 2z}{3d + z} \cdot \frac{pw}{pp'} = \frac{3d + 2z}{3d + z} \cdot \frac{d - z}{d} = \frac{(2 + e)(3 - e)}{5 + e} = \frac{1 + e}{e + 5} = \frac{1}{5}\, e.$$

Door deze waarde is de plaats van het punt S op pp' volkomen bepaald; in fig. 5 mag men echter — en moet men zelfs, als d_1 door P_1 en M_3 bepaald is, — niet het links maar het rechts van M_1 gelegen punt met deze deelingsverhouding nemen.

Als een tweede voorbeeld nemen we de groep IX_2 van plaat IV^b, waaraan — volgens de tweede verhandeling — een reeks van vlakken loodrecht op het vlak van teekening van fig. 4 en evenwijdig aan up_2^{III} (p_2^{III} het midden van sv) beantwoordt. We trekken door s en q de aan up_2^{III} evenwijdige lijnen sS'' en qS' en bepalen nu de verhouding van pS' tot pp' als volgt, met behulp van gelijkvormige driehoeken. Deze geven

$$\frac{S'w'}{qw'} = \frac{w'S''}{w'w''} = \frac{pS''}{ps} = \frac{pS''}{w'u} = \frac{pw'}{w''u} = \frac{pw'}{\frac{1}{2}qu}.$$

Dus is

$$\frac{S'w'}{pp'} = \frac{2qw'}{qu} \cdot \frac{pw'}{pp'} = \frac{2z}{d+z} \cdot \frac{z}{d}$$

en eindelijk

$$\frac{pS'}{pp'} = \frac{pw' - S'w'}{pp'} = \frac{z}{d}\left(1 - \frac{2z}{d+z}\right) = \frac{z\,(d-z)}{d\;\;d+z)} = \frac{(e-1)\,(3-e)}{2\,(e+1)} = \tfrac{1}{2}\,(7-3e)\,.$$

Langs dezen weg nu is verkregen het in de volgende tabel neergelegde volledige stelsel der twaalf hier optredende deelingsverhoudingen λ, waarbij voor van $\frac{1}{2}$ verschillende λ steeds de waarde kleiner dan $\frac{1}{2}$ gekozen is. Voor alle in dezelfde horizontale rij geplaatste groepen heeft λ dezelfde, in de voorlaatste kolom opgegeven waarde, waarmee in de 20 centimeter lange zijden van den stervijfhoek van fig. 5 als eenheid het in de laatste kolom opgegeven aantal centimeters overeenstemt. Eindelijk geeft de voorvoorlaatste kolom de doorgangsrichting der loodrecht op het vlak van fig. 4 staande snijvlakken aan, met behulp waarvan de waarden van λ berekend zijn.

Nr.	Groepen					λ	
1	I_1, II_1, VII_1	II_2, $\overline{XI_2}$		III_4	qp	0	0
2	III_1	I_2, VII_2	II_3, V_3	V_4	qO	$\frac{1}{2}$	10
3			I_3, IV_3, $\overline{IX_3}$	II_4, IV_4	qs	$\frac{1}{2}(3-e)$	7.63932
4	IV_1		VIII_3		pp^{I}	$\frac{1}{5}e$	8.94427
5	V_1	IV_2			pp^{II}	$2(e-2)$	9.44272
6	VI_1		III_3		pp^{III}	$e-2$	4.72136
7	VIII_1	V_2			pp^{IV}	$\frac{1}{4}(e-1)$	6.18034
8		VI_2			pp_2^{II}	$\frac{1}{6}(5-e)$	9.14207
9		IX_2			up_2^{III}	$\frac{1}{2}(7-3e)$	2.91796
10		X_2	VI_3		qp_2^{IV}	$\frac{1}{10}(5-e)$	5.52786
11		XI_2			Op^{IV}	$\frac{1}{4}(3e-5)$	8.54102
12			IX_3		Or	$\frac{1}{4}(3-e)$	3.81966

Duidelijkheidshalve zijn de waarden van λ in de zijde (20 centimeter) van den stervijfhoek van fig. 5 als eenheid in fig. 6 afzonderlijk aangegeven. Door deze schaalverdeeling in fig. 5 op elk der zijden P_6P_2, enz. aan te brengen is men dan onmiddellijk in staat elk der gezochte lijnen van doorsnee met juistheid te teekenen.

12. Met behulp van het voorgaande kan de constructie van den in een bepaald diagonaalvlak gelegen veelhoek van doorsnee met het polyeder worden uitgevoerd. We wijzen daartoe in fig. 7, die een herhaling vormt van fig. 4, voor de 12 in de tabel onderscheiden gevallen door de nummers 1, 2, . . . 12 de doorgangen der door de ribbe q (loodrecht op het vlak van teekening) gaande snijvlakken aan en doen nu zien hoe men door het omslaan van den zich in psv projecteerenden regelmatigen vijfhoek en den zich in rv projecteerenden gelijkzijdigen driehoek alle vereischte maten vinden kan om tot de in fig. 8 neergelegde veelhoeken te komen. Door op te merken, dat al deze veelhoeken de lijn k, die q_1q_2 rechthoekig middendoor deelt, tot as van symmetrie hebben, en de in fig. 8 gebruikte maten qab, aa' voor den vijfhoek van N°. 9 en $qcde$, dd', ee' voor den achthoek van N°. 4 ontleend zijn aan fig. 7 zal dit voldoende duidelijk worden. [1])

We voegen hieraan de volgende eenvoudige algemeene opmerking toe. De in een diagonaalvlak liggende veelhoek, waarvan een der zijden een ribbe van C_{600} is, is steeds een vijfhoek, zeshoek of achthoek. Denken we ons het diagonaalvlak weer bepaald door de ribbe, die in q loodrecht op het vlak van teekening van fig. 4 staat, en het snijpunt S met pp', dan is de doorsnee een vijfhoek als S tusschen p en w of tusschen w' en p', een achthoek als S tusschen w en w' ligt, uitgezonderd als S midden tusschen w en w' ligt en de doorsnee een zeshoek is. Anders gezegd, met betrekking tot de zijde P_6P_2 van den stervijfhoek van fig. 5: de doorsnee is een zeshoek, als het punt S valt in M_1, een achthoek als het elders valt tusschen Q_2 en Q_4, een vijfhoek als het valt tusschen P_6 en Q_2 of Q_4 en P_1. Dus verkrijgt men in het geval h_2 twee vijfhoeken, wijl er twee snijpunten buiten den vijfhoek der punten Q vallen, en verder een zeshoek en een achthoek, enz.

13. De hier gevolgde methode heeft een klein bezwaar, dat zich het sterkst doet gevoelen bij de bepaling van den juisten stand der lijn h_2. Het is dit, dat ze ons in het onzekere laat omtrent de wijze van opvolging der verschillende waarden van λ op de lijn van

[1]) De letters a en c bij op k gelegen punten zijn in fig. 8 weggelaten.

doorsnee. Als men uit de studie der groepen van twintigvlakken van plaat IV^b (der tweede verhandeling) heeft afgeleid, dat zich de verschillende deelingsverhoudingen VI_2, VII_2, IX_2, X_2 voordoen, en men voor VII_2 het midden M_2 (fig. 5) heeft aangenomen, moet men door het draaien van een liniaal om M_2 nagaan op welke zijde — en in welke van de twee plaatsen op die zijde — men het deelpunt VI_2 leggen moet om te maken, dat de twee andere snijpunten met IX_2 en X_2 overeenkomen. We wijzen thans ten slotte aan, hoe dit bezwaar geheel weggenomen kan worden.

Bij elke ribbe van C_{000}, die zich op plaat IV^b in h projecteert op de daar gekozen as OF_0, behooren vijf naburige hoekpunten van C_{000}. Ware het nu mogelijk:

1°. een bepaalde zich op OF_0 in h projecteerende ribbe uit te kiezen,

2°. de vijf naburige hoekpunten aan te wijzen en aan te geven in welke volgorde genomen ze de hoekpunten van een regelmatigen stervijfhoek vormen,

3°. te vinden, hoe deze punten zich op dezelfde as OF_0 projecteeren,

dan zou men in staat zijn uit te maken, in welke reden de achtereenvolgende zijden van den stervijfhoek in projectie op OF_0 door h worden verdeeld, wat dan veroorloven zou in fig. 5 op elk dier zijden een geheel bepaald punt in teekening te brengen. Werkelijk zou hierbij dus het bezwaar, boven aangegeven, geheel uit den weg geruimd zijn.

Dit alles nu is werkelijk geheel mogelijk met behulp van de in mijn eerste verhandeling getiteld „Regelmässige Schnitte u. s. w." (Verhandelingen, eerste sectie, deel II, n°. 7, 1894) gepubliceerde tabellen, zoo als met behulp van fig. 9 voor het geval van de lijn h_2 zal worden uitgelegd.

14. In Tabelle I met het bijschrift „Coordinatenstellung des Z^{000}" vinden we, — zoo onder „C, Zweite Querlinie" de z_1 slaat op de gekozen as OF_0 —, dat de hoekpunten

$$-6,\ 7,\ -11,\ -12,\ 17,\ -18,\ 19,\ 20,\ 33,\ -34,\ 35,\ 36$$

$1+e$ tot z_1-waarde hebben en zich dus — vergelijk de plaat IV^b der tweede verhandeling — in h projecteeren. Uit Tabelle II met het bijschrift „Kanten des Z^{000}" volgt dan verder, dat (7,33) een ribbe van C^{000} is, 14, 22, 25, 29, 51 de vijf aan (7,33) naburige punten zijn en deze punten in de volgorde 14, 22, 51, 29, 25 een regelmatigen vijfhoek $P_1P_2P_3P_4P_5$ en dus in de nieuwe volgorde 14, 51, 25, 22, 29 een regelmatigen stervijfhoek $P_1P_3P_5P_2P_4$ vormen. Teruggaande tot Tabelle I en wel tot de kolom z_1 onder „C,

Zweite Querlinie" vinden we dan ten slotte, dat deze hoekpunten 14, 51, 25, 22, 29 achtereenvolgens een z_1 ter waarde van

$$1 - e, 4, 3 + e, -2, 2(2 + e)$$

hebben en ze zich dus — vergelijk weer de plaat IV^b der tweede verhandeling — in k', g, f, i', c projecteeren. Dit nu is in de nieuwe fig. 9 van deze mededeeling weergegeven. Wijl de daar van links naar rechts voortgaande segmenten der horizontale lijnen tot elkaar staan als

$$d, z, d, d, z, d, z, d, d, z,$$

vinden we, als we het zich in h projecteerende punt der zijden van den stervijfhoek steeds door S aanduiden,

$$\frac{P_3S}{P_3P_1} = \frac{z}{3d + 2z} = \frac{1}{2}(7 - 3e), \qquad \frac{P_6S}{P_6P_2} = \frac{d + z}{4d + 3z} = \frac{1}{10}(5 - e),$$

$$\frac{P_4S}{P_4P_2} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{P_1S}{P_1P_4} = \frac{3d + z}{6d + 3z} = \frac{1}{6}(5 - e).$$

Deze uitkomsten sluiten geheel met de vroeger verkregene; ze wijzen echter bovendien de plaats van elk deelpunt met beslistheid aan.[1])

15. Passen we de nieuwe methode toe op het geval eener snijlijn, die als e_2 aan een der zijden van den stervijfhoek evenwijdig loopt, dan zal het zich in e op plaat IV^b projecteerende punt S de zijde P_6P_2 uitwendig in de reden één moeten verdeelen, wat, nu S in projectie op OF_0 niet oneindig ver ligt, vereischt, dat de ribbe P_6P_2 zich op OF_0 als een punt projecteert. Dit geval is weergegeven in fig. 10 voor de ribbe (21, 24), waarbij 3, 49, 50, 57, 58 de vijf naburige punten voorstellen en 50, 3, 49, 57, 58 als de vijfhoek $P_1P_2P_3P_4P_5$, dus 50, 49, 58, 3, 57 als de stervijfhoek $P_1P_3P_5P_2P_4$ verschijnt. Werkelijk projecteert P_5P_2 zich als een punt; verder komen P_3P_1 en P_4P_1 ter eene, P_4P_2 en P_3P_5 ter andere zij in projectie overeen, wat hiermee samenhangt, dat λ voor de lijnen van elk dier paren een zelfde waarde heeft.

---

[1]) Het zou, wijl de tweede methode in een opzicht meer geeft dan de eerste, den schijn kunnen hebben, dat de eerste methode wel achterwege had kunnen blijven. Ze wordt hier echter toch meegedeeld, omdat ze op haar beurt dit boven de tweede voor heeft, dat ze onmiddellijk in de doorsnee van het twintigvlak den vorm van den in het diagonaalvlak gelegen veelhoek doet kennen.

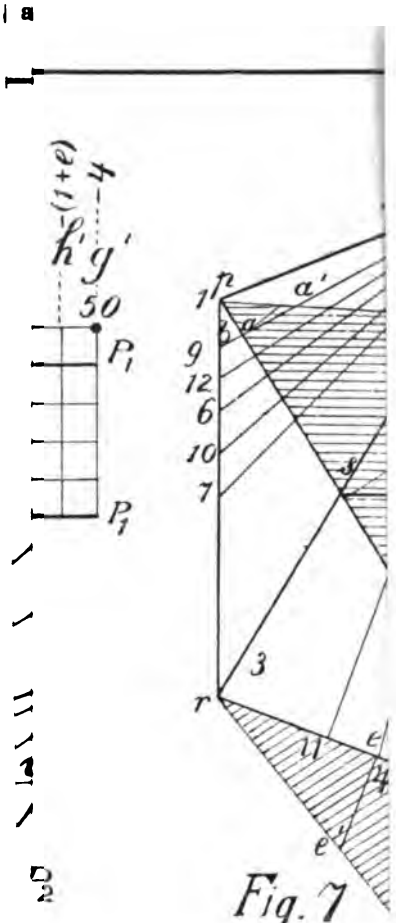


Fig. 7

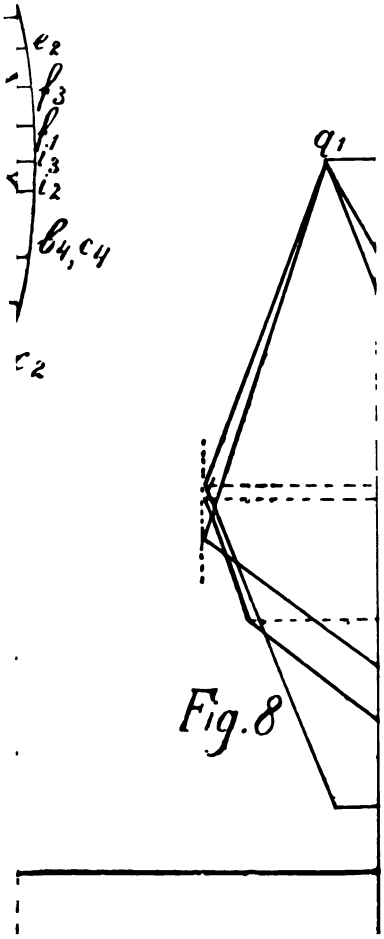


Fig. 8

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan: *„Bijdrage tot de theorie der binaire mengsels."* X.

DE ONTMOETING DER KROMMEN $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ EN $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$.

De punten, waarin de beide krommen $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2}$ elkander snijden, liggen natuurlijk in het labiele gebied. Voor de punten der spinodale lijn, de grens van het labiele gebied, is immers noodig dat $\frac{d^2\psi}{dx^2} > 0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2} > 0$ is en het product $\frac{d^2\psi}{dx^2}\frac{d^2\psi}{dv^2} = \left(\frac{d^2\psi}{dx\,dv}\right)^2$. Het voordeel van de studie der wijze, waarop deze twee krommen elkander snijden, moet dan ook niet alleen, en ook niet voornamelijk, gezocht worden in een aanwijzing voor den loop der spinodale lijn. Wel is het duidelijk en in de voorafgaande Bijdragen herhaaldelijk in het licht gesteld, dat alleen in de gevallen, waarin er snijding is tusschen de beide krommen, of als $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ buiten de kromme $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ ligt, de spinodale lijn sterk afwijkt van $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$; terwijl, als $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ geheel ligt binnen $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$, de loop der spinodale lijn weinig afwijkt van den loop van $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$. Maar bovenal schijnt mij de kennis van den betrekkelijken stand van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ ten opzichte van $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ van belang voor de vraag of er bij een gegeven binair mengsel al of niet drie-phasendruk te wachten is. En alles wat er toe bijdragen kan, om dit vraagpunt, dat een zaak van zoo groot praktisch belang betreft, toe te lichten, moet noodwendig belangrijk geacht worden. Wij zullen ook bij dat onderzoek weder $b = b_1(1-x) + b_2x$ stellen, en dus weder moeten afzien van den invloed van v op de waarde van b. Uit een quantitatief oogpunt zullen onze uitkomsten dus veel te wenschen kunnen overlaten. Maar aan den anderen kant is bij ons vroeger onderzoek, waarbij dezelfde benadering is aangenomen, genoegzaam gebleken, dat de aanwijzing over den gang der verschijnsels, welke wij op deze wijze verkrijgen, in hoofdzaak juist is.

Stellen wij dus

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = MRT\left\{\frac{1}{x(-x)} + \frac{\left(\frac{db}{dx}\right)^2}{(v-b)}\right\} - \frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{v} = 0$$

en

$$\frac{d^2\psi}{dv^2} = \frac{MRT}{(v-b)^2} - \frac{2a}{v^3} = 0 .$$

Elimineeren wij T uit deze twee vergelijkingen, dan verkrijgen wij voor de meetkundige plaats der snijpunten van de beide krommen

$$\frac{(v-b^2)}{x(1-x)} + \left(\frac{db}{dx}\right)^2 = v^2 \frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{2a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

Deze meetkundige plaats, waarin v in den 2den graad, en x in den 4den graad voorkomt, kan verschillende gedaante vertoonen, en om een overzicht te verkrijgen over de verschillende vormen dezer kromme, zullen wij enkele hulpgrootheden invoeren.

Deze hulpgrootheden zullen zich van zelve aanbevelen bij de discussie van een der bijzondere gevallen, en daartoe kiezen wij het geval dat de geheele meetkundige plaats voor alle waarden van x tusschen 0 en 1 onbestaanbaar is. Schrijven wij daartoe de vergelijking (a) in den volgenden vorm:

$$v^2 \left\{1 - x(1-x)\frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{2a}\right\} - 2bv + \left\{b^2 + x(1-x)\left(\frac{db}{dx}\right)^2\right\} = 0 \; . \; . \; (a')$$

Voor het geval van onbestaanbaarheid is

$$b^2 < \left\{b^2 + x(1-x)\left(\frac{db}{dx}\right)^2\right\}\left\{1 - x(1-x)\frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{2a}\right\}$$

of

$$0 < x(1-x)\left\{\left(\frac{db}{dx}\right)^2 - \frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{2a}b^2 - x(1-x)\left(\frac{db}{dx}\right)^2\frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{2a}\right\}$$

of voor x tusschen 0 en 1:

$$0 < \left\{\frac{\left(\frac{db}{dx}\right)^2}{b^2} - \frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{2a} - x(1-x)\frac{\left(\frac{db}{dx}\right)^2}{b^2}\frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{2a}\right\}$$

of voor $\frac{d^2a}{dx^2} = 2(a_1 + a_2 - 2a_{12})$ positief, wat wij bij al onze beschouwingen steeds onderstellen:

$$0 < \frac{a}{a_1 + a_2 - 2a_{12}} - \frac{b^2}{\left(\frac{db}{dx}\right)^2} - x(1-x)$$

Schrijven wij

$$a = a_1 + 2\,(a_{12} - a_1)\,x + (a_1 + a_2 - 2a_{12})\,x^2$$

en

$$b^2 = b_1^2 + 2b_1 \frac{db}{dx}\,x + \left(\frac{db}{dx}\right)^2 x^2,$$

dan kan de laatste vergelijking ook geschreven worden onder den vorm:

$$0 < \left[\frac{a_1}{a_1+a_2-2a_{12}} - \frac{b_1^2}{\left(\frac{db}{dx}\right)^2}\right] + x\left[\frac{2\,(a_{12}-a_1)}{a_1+a_2-2a_{12}} - \frac{2b_1}{\frac{db}{dx}} - 1\right] + x^2 \ldots (\beta)$$

Eischen wij dat de meetkundige plaats onbestaanbaar zij over de geheele breedte, dus voor alle waarden van x tusschen 0 en 1, dan moet 1°

$$\frac{a_1}{a_1+a_2-2a_{12}} > \frac{b_1^2}{(b_2-b_1)^2}\,, \quad 2^\circ \quad \frac{a_2}{a_1+a_2-2a_1^2} > \frac{b_2^2}{(b_2-b_1)^2}$$

en een derde voorwaarde welke nog af te leiden is.

Schrijven wij daartoe $a_1 + a_2 - 2a_{12} = c$ en $b_2 = nb_1$ dan wordt 1° $\frac{a_1}{c} > \frac{1}{(n-1)^2}$, 2° $\frac{a_2}{c} > \frac{n^2}{(n-1)^2}$ en voeren wij de hulpgrootheden ε_1 en ε_2 in, zoodat $\frac{a_1}{c} = \frac{1+\varepsilon_1}{(n-1)^2}$ en $\frac{a_2}{c} = \frac{n^2\,(1+\varepsilon_2)}{(n-1)^2}$ (ε_1 en ε_2 positief) dan vinden wij uit $2a_{12} = a_1 + a_2 - c$ of $\frac{2a_{12}}{2} = \frac{a_1}{c} + \frac{a_2}{c} - 1$

$$2\,\frac{a_{12}}{c} = \frac{1+\varepsilon_1}{(n-1)^2} + \frac{n^2+n^2\,\varepsilon_2}{(n-1)^2} - 1$$

of

$$2\,\frac{a_{12}}{c} = \frac{2n+\varepsilon_1+n^2\,\varepsilon_2}{(n-1)^2}\,.$$

De voorwaarde voor onbestaanbaarheid is dus dat voor alle waarden van x

$$\frac{\varepsilon_1}{(n-1)^2} - x\left\{1 + \frac{\varepsilon_1 - n^2\varepsilon^2}{(n-1)^2}\right\} + x^2 > 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (\beta')$$

of

$$\varepsilon_1 > 0 \quad \text{en} \quad \varepsilon_2 > 0 \quad \text{en} \quad 1 + \frac{\varepsilon_1 - n^2\varepsilon_2}{(n-1)^2} < 2\,\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{n-1}$$

De laatste voorwaarde kan meer symmetrisch geschreven worden onder den vorm:

$$1 - 2\,\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{n-1} + \frac{\varepsilon_1}{(n-1)^2} < \frac{n^2\varepsilon_2}{(n-1)^2}$$

of

$$1 - \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{n-1} < \frac{n\sqrt{\varepsilon_2}}{n-1}$$

of

$$\sqrt{\varepsilon_1} + n\sqrt{\varepsilon_2} > n-1 .$$

De voorwaarde ε_1 en $\varepsilon_2 > 0$ zorgt er dus voor dat de meetkundige plaats niet de geheele breedte van $x = 0$ tot $x = 1$ inneemt. Opdat de meetkundige plaats in het geheel niet besta moet de grootte van ε_1 en ε_2 zoodanig zijn dat

$$\sqrt{\varepsilon_1} + n\sqrt{\varepsilon_2} > n - 1 .$$

Is $\sqrt{\varepsilon_1} + n\sqrt{\varepsilon_2} = n - 1$, dan reduceert de meetkundige plaats zich tot een enkel punt. In dat geval is

$$\frac{\varepsilon_1}{(x-1)^2} - x \left\{ 1 + \frac{\varepsilon_1 - n^2\varepsilon_2}{(n-1)^2} \right\} + x^2 = 0.$$

De vergelijking heeft dan twee samenvallende wortels en wel $x = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{n-1}$ of $1 - x = \frac{n\sqrt{\varepsilon_2}}{n-1}$.

Misschien waren deze uitkomsten op een meer overzichtelijke wijze verkregen, als wij in de vergelijkingen (α) of (α') in plaats van x hadden ingevoerd de grootheid $N = \frac{x}{1-x}$, dus het aantal molekulen van de tweede stof dat per molekuul van de eerste stof in het binair mengsel aanwezig is, welke grootheid noodwendig positief moet zijn. De voorwaarde, dat de twee krommen $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ bij geen enkele temperatuur elkander snijden komt dan onder den volgenden vorm:

$$\frac{\varepsilon_1}{(n-1)^2} - N \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_1 + n^2\varepsilon_2}{(n-1)^2} \right\} + \frac{\varepsilon_2 n^2}{(n-1)^2} N^2 > 0 \ldots \quad (\gamma)$$

Voor $N = 0$ en $N = \infty$ is bij positieve ε_1 en ε_2 aan deze voorwaarde voldaan. Maar opdat voor elke willekeurige waarde van N aan deze vergelijking voldaan worde is het noodig dat

$$1 - \frac{\varepsilon_1 + n^2\varepsilon_2}{(n-1)^2} < \sqrt{\frac{4\varepsilon_1 n^2 \varepsilon_2}{(n-1)^2}}$$

of

$$1 < \frac{\varepsilon_1 + n^2\varepsilon_2 + 2\sqrt{n^2\varepsilon_1\varepsilon_2}}{(n-1)^2}$$

of

$$n-1 < \sqrt{\varepsilon_1} + n\sqrt{\varepsilon_2}$$

Construeert men de betrekking tusschen ε_1 en ε_2 als kromme lijn op ε_1 en ε_2 assen, dan wordt voor het geval dat de meetkundige plaats der snijpunten zich tot een enkel punt samentrekt.

$$\left\{1 - \frac{\varepsilon_1 + n^2\varepsilon_2}{(n-1)^2}\right\}^2 = \frac{4n^2\varepsilon_1\varepsilon_2}{(n-1)^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma')$$

en dus een parabool. Uit den vorm van (γ') ziet men dat deze parabool de ε_1 as en de ε_2 as raakt in de snijpunten, waarin de rechte lijn $\frac{\varepsilon_1 + n^2\varepsilon_2}{(n-1)^2} = 1$ deze assen snijdt. De vergelijking dezer parabool

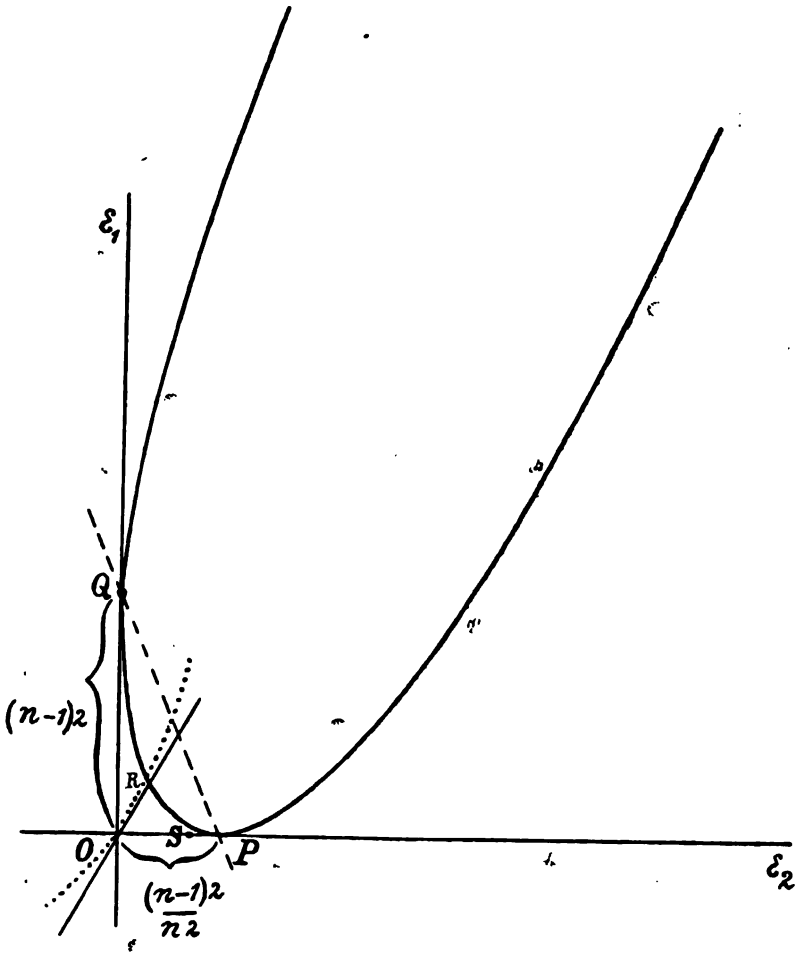


Fig. 36.

kan geschreven worden in den vorm: $\frac{(\varepsilon_1 - n^2\varepsilon_2)^2}{(n-1)^4} - 2\frac{\varepsilon_1 + n^2\varepsilon_2}{(n-1)^1} + 1 = 0$

waaruit blijkt dat de richting van de as of van de middellijnen dezer parabool gegeven wordt door

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = n^2$$

terwijl de richting van de genoemde rechte lijn gegeven wordt door

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = -n^2.$$

Deze twee richtingen zijn dus symmetrisch ten opzichte der genoemde assen. In fig. 36, waarin de ε_2 as horizontaal geteekend is, is de waarde van n, welke steeds grooter dan 1 is, niet zeer groot ondersteld.

De berekening van de plaats van den top der parabool kan o.a. geschieden door gebruik te maken van de eigenschap, dat de raaklijn aan de parabool in den top loodrecht staat op de richting van de middellijn. Dus $\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_2} = n^2 \frac{\varepsilon_1 - n^2\varepsilon_2 + (n-1)^2}{\varepsilon_1 - n^2\varepsilon_2 - (n-1)^2} = -\frac{1}{n^2}$, waaruit volgt dat voor den top $\varepsilon_1 - n^2\varepsilon_2 = -(n-1)^2 \frac{n^4-1}{n^4+1}$. Dit is dus de vergelijking van de as; deze snijdt dus de ε_2 as, in een punt waarin $\varepsilon_1 = 0$ is en $\varepsilon_2 = OS$ gelijk is aan $\frac{(n-1)^2}{n^2} \frac{n^4-1}{n^4+1}$. Bijgevolg is $OS = OP \times \frac{n^4-1}{n^4+1}$ Voor zeer kleine waarde van n is dus ook OS klein, maar voor grootere waarde van n nadert OS tot OP.

Alle punten, binnen deze parabool, geven waarden voor ε_1 en ε_2, voor welke aan vergelijking (β) is voldaan; zoo reduceert zich deze vergelijking voor alle punten der lijn PQ fig. 36 tot:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 n^2 N^2 > 0$$

en voor stellen van waarden van ε_1 en ε_2, welke bij punten, binnen de parabool gelegen, behooren, is er dus nimmer snijding van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$.

Resumeerende komen wij dus tot het volgende besluit. Alle punten in het positieve quadrant van de ε_2, ε_1 assen van fig. 36, welke boven de lijn PQ gelegen zijn, stellen stelsels van waarden ε_1 en ε_2 voor, voor welke (daar N altijd positief moet zijn) geen snijding van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ kan plaats hebben. De punten beneden PQ, maar binnen de parabool gelegen, stellen evenzeer dergelijke stelsels voor. De punten beneden PQ, en juist op de parabool gelegen, stellen stelsels van waarden van ε_1 en ε_2 voor, voor welke de meetkundige plaats der snijpunten van de twee genoemde krommen zich tot één enkel punt reduceert. En eindelijk, de punten beneden PQ en beneden de parabool, stellen stelsels van waarden van ε_1 en ε_2 voor, voor welke de beide krommen een

meetkundige plaats van snijpunten opleveren. Het punt, waarin de meetkundige plaats der snijpunten zich heeft samengetrokken, ligt bij een waarde van $N = \frac{x}{1-x} = \frac{1 - \frac{\varepsilon_1 + n^2\varepsilon_2}{(n-1)^2}}{\frac{n^2\varepsilon_2}{(n-1)^2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{n\sqrt{\varepsilon_2}}$, waartoe ook reeds op bladz. 378 besloten was, dus dicht bij $x = 1$, als $n^2\varepsilon_2$ klein is ten opzichte van ε_1 en dicht bij $x = 0$ als $n^2\varepsilon_2$ groot zou kunnen zijn ten opzichte van ε_1.

Maar nu hebben wij de vraag te overwegen of dergelijke stellen van waarden van ε_1 en ε_2 bij mengsels werkelijk kunnen voorkomen. Daar wij nog geen regel kennen om bij gegeven waarde van a_1 en a_2 de waarde van a_{12} aan te geven, kunnen wij deze vraag niet geheel afdoende beantwoorden. Maar wij zullen nagaan wat hieromtrent af te leiden is uit den veelvuldig geldenden regel

$$a_1 a_2 > a_{12}^2$$

of

$$n^2(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) > \left(n + \frac{\varepsilon_1 + n^2\varepsilon_2}{2}\right)^2$$

of

$$4n^2(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) > [(1 + \varepsilon_1) + n^2(1 + \varepsilon_2) - (n-1)^2]^2$$

of

$$4\frac{n^2}{(n-1)^4}(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) > \left[1 - \frac{(1 + \varepsilon_1) + n^2(1 + \varepsilon_2)}{(n-1)^2}\right]^2 \ldots (\delta)$$

Denken wij voor een oogenblik het teeken $>$ door het teeken $=$ vervangen, dan is de meetkundige plaats (δ) geheel gelijk aan (γ), maar met verschuiving van de beide ordinaten in de negatieve richting over een bedrag gelijk aan -1. Trekken wij dus twee lijnen, een evenwijdig aan de horizontale ε_2 as op een afstand gelijk -1, en een evenwijdig aan de vertikale ε_1 as op een afstand gelijk -1, en construeeren wij ten opzichte dier lijnen een gelijke parabool zoodat er ook van de punten P, Q, S vervangen door P', Q', S' en dus ook van een lijn $P'Q'$ sprake is, dan wordt aan (δ) voldaan door alle punten binnen die parabool gelegen.

Voor de punten der lijn $P'Q'$ is het tweede lid van (δ) gelijk aan 0 of $a_{12} = 0$, en voor de punten beneden $P'Q'$ gelegen zou a_{12} negatief zijn. Dus deze punten zullen wel geen voorkomende stelsels van waarden van ε_1 en ε_2 opleveren. Maar dit voor het oogenblik latende rusten, kunnen wij zeggen dat de reeksen van punten, welke de twee genoemde parabolen gemeen hebben, voldoen aan de beide eischen, dat zij stelsels van waarden van ε_1 en ε_2 opleveren,

welke geen snijding van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ met $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$, toelaten, en waarvoor $a_1 a_2 = a_{12}^2$ is. Evenzeer geldt dit voor de punten, welke boven de eerste parabool zijn gelegen, maar binnen de tweede. De tweede parabool treedt het positieve quadrant der ε_1 en ε_2 coördinaten binnen in den oorsprong, raakt daar aan een lijn $\varepsilon_1 - n\varepsilon_2 = 0$ en snijdt dus de eerste parabool in een punt, dat in fig. 36 door R is voorgesteld. De vergelijking der tweede parabool kan n.l. gebracht worden in de gedaante:

$$(\varepsilon_1 - n^2\varepsilon_2)^2 = 4n(n-1)(\varepsilon_1 - n\varepsilon_2).$$

Maar beschouwen wij, alvorens conclusies te trekken omtrent de eigenschappen der componenten van binaire mengsels, welke geen snijding toelaten van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$, de beteekenis der voorwaarde $a_{12}^2 < a_1 a_2$ nauwkeuriger, dan blijkt dat het bovenstaande in groote mate behoort beperkt te worden. Wij hebben tot hiertoe het besluit kunnen trekken dat $a_{12}^2 = a_1 a_2$ voert tot een betrekking tusschen ε_1 en ε_2, welke grafisch wordt voorgesteld door wat wij de tweede parabool hebben genoemd, en verder opgemerkt dat de voorwaarde $a_{12} < a_1 a_2$ voert tot waarden van ε_1 en ε_2 behoorende bij punten binnen die parabool gelegen. Volgens die opvatting echter zouden ook punten, die op oneindigen afstand op of in de nabijheid van de as der tweede parabool liggen, stellen van waarden voor ε_1 en ε_2 leveren, die geacht zouden kunnen worden behoorlijk te voldoen aan de voorwaarde $\frac{a_{12}^2}{a_1 a_2} < 1$. Voor die punten is wel $a_{12}^2 < a_1 a_2$, maar zoowel a_1 als a_2 en a_{12} zouden voor die punten oneindig groot zijn, en de verhouding van $\frac{a_{12}^2}{a_1 a_2}$ is voor die punten gelijk aan 1. Wij verkrijgen een juistere begrenzing van mogelijke waarden van ε_1 en ε_2 door $a_{12}^2 = l^2 a_1 a_2$ te stellen met de voorwaarde $l^2 < 1$. Stellen wij dus:

$$4l^2n^2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) = (2n + \varepsilon_1 + n^2\varepsilon_2)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\delta')$$

of

$$\varepsilon_1^2 - 2n^2\varepsilon_1\varepsilon_2(2l^2-1) + n^4\varepsilon_2^2 = 4n\{\varepsilon_1(l^2n-1) - n\varepsilon_2(n-l) - n(1-l^2)\}$$

Deze vergelijking stelt voor $l^2 < 1$ een ellips voor; voor $l^2 = 1$ een parabool en voor $l^2 > 1$ een hyperbool. Uit den vorm (δ') zien wij, dat deze meetkundige plaats aan de lijnen $\varepsilon_1 = -1$ en $\varepsilon_2 = -1$ raakt in de punten, waarin deze lijnen door dezelfde lijn $P'Q'$ gesneden wordt, die bij de beschrijving der tweede parabool hierboven genoemd is. Vragen wij nu weder of er stelsels van waarden

van ε_1 en ε_2 mogelijk zijn, die bij componenten behooren, waarvan het binair mengsel geen snijding toelaat van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^1\psi}{dv^2} = 0$, dan merken wij in de eerste plaats op dat dan de ellips (δ') de eerste parabool en de lijn PQ snijden moet.

Nu is het, afhankelijk van de waarde van l^2 in verband met de waarde van n mogelijk dat de ellips geheel tot negatieve waarden van ε_2 beperkt blijft, in welk geval snijding met de eerste parabool uitgesloten is.

Dit heeft plaats als de betrekking tusschen l^2 en n zoodanig is, dat de vergelijking: $4l^2n^2(1+\varepsilon_1) = (2n+\varepsilon_1)^2$ gelijke of onbestaanbare waarde voor ε_1 oplevert, en dus als geldt:

$$l^2n^2 \leqq 2n - 1$$

voor kleine waarde van n bijv. $n = 1{,}5$ zou $l^2 \leqq \frac{8}{9}$ moeten zijn, dat zeker wel bij waarnemingen is gevonden, maar voor grootere waarden van n, bijv, $n = 5$, zou $l^2 \leqq \frac{9}{25}$ moeten zijn, wat wel niet het geval zal zijn. Dus als n groot is bij een niet zeer kleine waarde van l^2 zal de ellips (δ') ook punten bezitten, waarvoor ε_1 en ε_2 positief is, en is de mogelijkheid, dat zij de 1ste parabool snijdt, niet uitgesloten. Wij zouden bij gegeven l^2 de grens kunnen vinden voor de waarde van n, waarbij het nog mogelijk is dat $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ elkander niet snijden door de betrekking te zoeken, welke tusschen l^2 en n bestaan moet, opdat de ellips de eerste parabool aanraakt. Maar dit zou tot wijdloopige berekeningen aanleiding geven, die wij achterwege zullen laten. Maar wel zullen wij enkele eigenschappen der ellips nader onderzoeken.

1°. Bepaling van het middelpunt.

Uit $f'(\varepsilon_1) = 0$ en $f'(\varepsilon_2) = 0$ of $2n + \varepsilon_1 + n^2\varepsilon_2 = 2l^2n^2(1+\varepsilon_2)$ en $2n + \varepsilon_1 + n^2\varepsilon_2 = 2l^2(1+\varepsilon_1)$ volgt $(1+\varepsilon_1)_M = n^2(1+\varepsilon_2)_M$, waaruit volgt dat de lijn $O'M$ (fig. 37) een hoek maakt met de ε_2 as waarvan de tangens gelijk is aan n^2, en dus evenwijdig is aan de as der eerste parabool. Voor de coördinaten van het middelpunt vinden wij:

$$(1+\varepsilon_1)_M = \frac{(n-1)^2}{2(1-l^2)} \text{ en } (1+\varepsilon_2)_M = \frac{(n-1)^2}{2n^2(1-l^2)}.$$

2°. Hoogste en benedenste punt.

Voor deze punten is $f'\varepsilon_2 = 0$ of

$$-(n-1)^2 + (1+\varepsilon_1) + n^2(1+\varepsilon_2) = 2l^2(1+\varepsilon_1)$$

en dus $4l^2n^2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) = 4l^4(1+\varepsilon_1)^2$.

Bijgevolg $1 + \varepsilon_1 = 0$ voor het punt B en $(1+\varepsilon_1) = \frac{n^2}{l^2}(1+\varepsilon_2)$ voor het punt B'; hieruit volgt voor B' de waarde $(1+\varepsilon_1)_{B'} = \frac{(n-1)^2}{1-l^2}$ en $(1+\varepsilon_2)_{B'} = \frac{l^2}{1-l^2}\frac{(n-1)^2}{n^2}$ en voor B is $1+\varepsilon = \frac{(n-1)^2}{n^2}$.

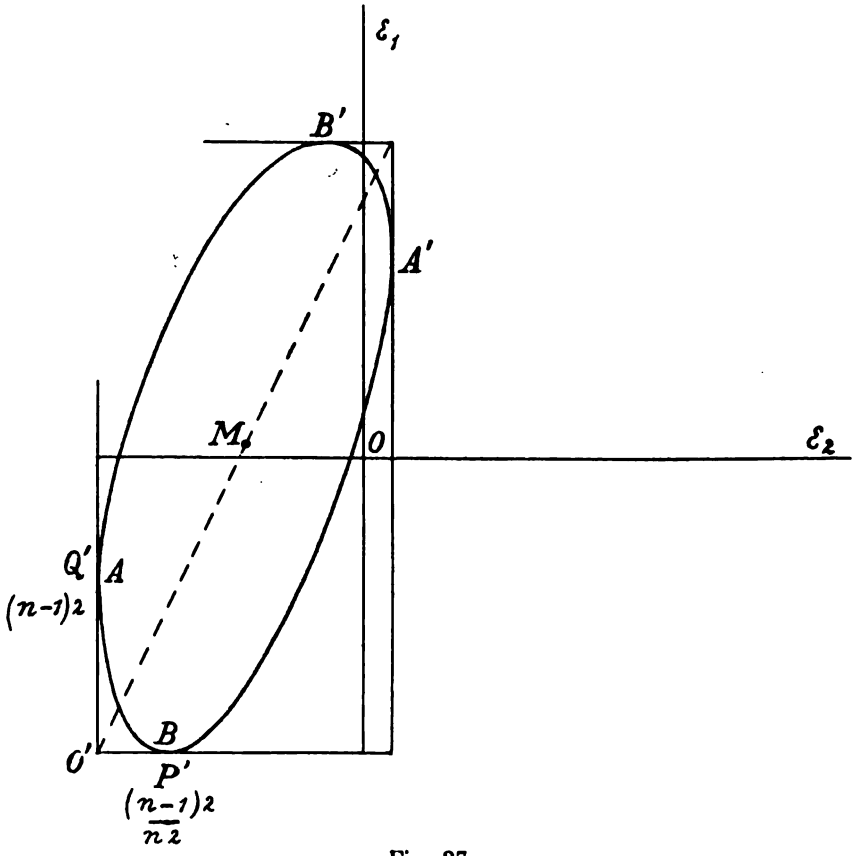


Fig. 37.

3°. De punten A en A'.

Voor deze punten is $f'\varepsilon_1 = 0$ of

$$-(n-1)^2 + (1+\varepsilon_1) + n^2(1+\varepsilon_2) = 2l^2n^2(1+\varepsilon_2)$$

en dus $4l^4n^4(1+\varepsilon_2)^2 = 4l^2n^2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)$.

Bijgevolg is voor A $1+\varepsilon_2 = 0$ en $1+\varepsilon_1 = (n-1)^2$ en voor A' geldt $(1+\varepsilon_1) = l^2n^2(1+\varepsilon_2)$ of $(1+\varepsilon_2)_A = \frac{(n-1)^2}{n^2}\frac{1}{1-l^2}$ en

$$(1+\varepsilon_1)_{A'} = \frac{l^2}{1-l^2}(n-1)^2.$$

4°. De snijpunten met de ε_2 as.

Uit $(2n + n^2\varepsilon_2)^2 = 4n^2l^2(1+\varepsilon_2)$ volgt:

$$\varepsilon_2 = \frac{-2(n-l^2) \pm l\sqrt{(n-1)^2 - (1-l^2)}}{n^2}.$$

Zoolang $1 - l^2 < (n-1)^2$ zijn er dus twee snijpunten met de ε_2 as, beide aan de negatieve zijde van den oorsprong. Voor $l^2 = 1$ ligt een der snijpunten in den oorsprong, en het andere snijpunt bij $\varepsilon_2 = -4\frac{n-1}{n^2}$, welke waarde $= -1$ is voor $n = 2$, en voor alle andere waarden van n niet zoo groot negatief is. Voor $1 - l^2 = (2-1)^2$ vallen de twee snijpunten met de ε_2 as samen, en voor $1 - l^2 > (n-1)^2$ zijn zij onbestaanbaar; dan is de geheele ellips dus beneden de horizontale as gedaald. Voor het geval dat n slechts weinig grooter dan 1 is, is deze omstandigheid te wachten; dan bestaan alleen negatieve waarden van ε_1 en ε_2.

5°. De snijding met de ε_1 as.

Uit $(2n + \varepsilon_1)^2 = 4n^2 l^2 (1 + \varepsilon_1)$ volgt:

$$\varepsilon_1 = 2n(nl^2 - 1) \pm 2nl^2 \sqrt{\{n^2 l^2 - 2n + 1\}}.$$

Voor $l^2 = 1$, wordt $\varepsilon_1 = 0$ en $\varepsilon_1 = 4n(n-1)$. Voor $l^2 < 1$ naderen deze twee waarden tot elkander en bij $l^2 = \frac{2n-1}{n^2}$ vallen zij samen, zooals reeds hierboven is opgemerkt. Bij $l^2 < \frac{2n-1}{n^2}$ of $1 - l^2 > \frac{(n-1)^2}{n^2}$ komen positieve waarden van ε_2 niet meer voor. Voor $l^2 = \frac{3}{4}$ bijvoorbeeld, zal voor $n = 2$ de ellips juist aan de ε_1 as raken, en wel in een punt waarvoor $\varepsilon_1 = 2$ is; maar voor kleinere waarde van n snijdt de ellips de ε_1 as niet; daarentegen bij grootere waarde van n bestaat de snijding wel.

6°. De snijding met de lijn PQ van fig. 36.

Substitueert men in:

$$(2n + \varepsilon_1 + n^2 \varepsilon_2)^2 = 4n^2 l^2 (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)$$

de waarde $\varepsilon_1 + n^2 \varepsilon_2 = (n-1)^2$, dan vindt men ter bepaling van ε_2 de vergelijking:

$$n^2 \varepsilon_2^2 + 2(n-1)\varepsilon_2 + \frac{(n^2+1)^2}{4n^2 l^2} - [1 + (n-1)^2] = 0.$$

Zoolang $l^2 < \frac{(n^2+1)^2}{4n^2[1 + (n-1)^2]}$ is, zijn de beide waarden van ε_2 negatief. Is l^2 grooter, dan ligt een snijpunt bij positieve waarde van ε_2; bij l^2 juist gelijk aan de gegeven waarde gaat de ellips juist door het punt Q, en bestaat dezelfde betrekking tusschen l^2 en n, welke wij ook vinden als wij in de vergelijking van 5° voor ε_1 de waarde $(n-1)^2$ substitueeren.

Zoolang een der waarden van ε_2 positief is, snijdt de ellips niet

alleen de lijn PQ maar ook de eerste parabool. Bij kleinere waarde van l^2 of grootere van n, wordt de lijn PQ niet meer in het positieve quadrant gesneden; er zal nog wel snijding van de ellips met de eerste parabool mogelijk zijn, tot bij verdere afname van l^2 de twee snijpunten samenvallen. Dan raakt de ellips aan de parabool en dan valt de mogelijkheid weg, dat $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2}=0$ elkander niet meer snijden.

7°. Andere vorm voor de vergelijking van de ellips.

De meeste der bovenstaande uitkomsten kunnen verkregen worden door de opmerking dat de vergelijking der ellips ook geschreven kan worden onder den vorm:

$$\left\{(1+\varepsilon_1)+n^2(1+\varepsilon_2)-\frac{1+l^2}{1-l^2}(n-1)^2\right\}^2=4n^2l^2\left\{1+\varepsilon_1-\frac{(n-1)^2}{1-l^2}\right\}$$
$$\left\{1+\varepsilon_2-\frac{(n-1)^2}{n^2}\frac{1}{1-l^2}\right\}$$

Het eerst lid gelijk 0 gesteld is de vergelijking der lijn $A'B'$, en de factoren van het tweede lid gelijk 0 gesteld zijn de vergelijkingen van raaklijnen aan de ellips in de punten B' en A'.

Snijdt de ellips de eerste parabool en dus ook tweemaal de ε_1 as en ligt dus een gedeelte van de ellips binnen de eerste parabool; dan bestaat er een aaneengeschakelde reeks van punten, die stelsels van waarden van ε_1 en ε_2 opleveren, waarbij geen driephasendruk te wachten is. Die reeks van punten begint, waar de ellips de eerste parabool snijdt in het 1ste of benedenste punt, en eindigt of in het tweede snijpunt, of in de ε_1 as. In het laatste geval, wanneer het tweede snijpunt met de ε_1 as hooger ligt dan $(n-1)^2$.

8°. Verhouding van de kritische temperaturen der componenten.

Voor een punt van de ellips is $\frac{a_1}{c}=\frac{1+\varepsilon_1}{(n-1)^2}$ en $\frac{a_2}{c}=\frac{n^2(1+\varepsilon_2)}{(n-1)^2}$ en dus $\frac{T_{k_2}}{T_{k_1}}=\frac{n(1+\varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_1)}$. Trekken wij van uit het punt O' ($\varepsilon_1=-1$ en $\varepsilon_1=-1$) een lijn naar zulk een punt, en stellen wij den hoek, welken die lijn met de ε_2 as maakt, gelijk φ, dan is $\frac{1+\varepsilon_1}{1+\varepsilon_2}=tg\,\varphi$, en dus ook $\frac{T_{k_2}}{T_{k_1}}=n\cot\varphi$ of $tg\varphi=n\frac{T_{k_1}}{T_{k_2}}$. Stellen wij de vraag of alle punten der ellips zullen kunnen voorkomen, dan merken wij vooreerst op dat de voorwaarde $a_{12}>0$ reeds uitsluit de punten, welke beneden de lijn $P\,Q'$ gelegen zijn. Laat de ellips ingesloten zijn in een rechthoek, waarvan de zijden evenwijdig zijn aan de assen, en

trekken wij van uit het punt O' ($\varepsilon_1 = -1$ en $\varepsilon_2 = -1$) de diagonaal door het middelpunt, waarvoor $tg\,\varphi = n^2$. Deze diagonaal snijdt de ellips in een punt, dat behoort bij $\frac{T_{k_2}}{T_{k_1}} = \frac{1}{n}$. Voor alle punten der ellips, welke rechts van dat punt gelegen zijn, is $tg\,\varphi > n^2$, en dus $\frac{T_{k_2}}{T_{k_1}} < \frac{1}{n}$. Zoo zou voor het hoogste punt van de ellips $\frac{T_{k_2}}{T_{k_1}} = \frac{l^2}{n}$ zijn Wij kunnen niet met zekerheid zeggen, dat zulke gevallen niet voorkomen. Stoffen, met grooter molekulen hebben niet noodwendig hoogere T_k, en dat met $n > 1$ de kritische temperatuur kleiner kan zijn hebben wij o.a. bij den loop der isobaren als mogelijk ondersteld.

Rekenen wij dan ook met mengsels van water en andere stoffen dan komt dit herhaaldelijk voor. Zoo is voor water en ether n circa 5 en $(T_k)_{ether} =$ circa $\frac{3}{4}(T_k)_{water}$. Voor water en CO_2 is $n = 2{,}5$ en $\frac{T_{k_2}}{T_{k_1}} = \frac{304}{638}$. Voor water en stikstof is $n = 1{,}6$ en $\frac{T_{k_2}}{T_{k_1}}$ veel kleiner dan $\frac{1}{n}$. Maar het blijft altijd nog een open vraag in hoever bij mengsels waarbij een der componenten *water* is, een stof die zich zoo abnormaal gedraagt, onze theorie ongewijzigd mag toegepast worden. In elk geval behoort het tot de uitzonderingen, dat punten der ellips, welke links zijn gelegen van de diagonaal een praktische beteekenis hebben. Gaan wij over tot de beschouwing van punten rechts van de diagonaal, dan noemen wij in de eerste plaats het punt, waarin de ellips gesneden wordt door een lijn van uit O', en waarvoor $tg\,\varphi = n$ is. Voor dat punt is $\frac{T_{k_2}}{T_{k_1}} = 1$. Voor alle punten, waarvoor $tg\,\varphi$ tusschen n^2 en n ligt is $T_{k_2} < T_{k_1}$. Maar voor punten, waarvoor $tg\,\varphi < n$ is, is $T_{k_2} > T_{k_1}$. Voor mengsels van stoffen, waarbij de stof met het grootere molekuul ook hoogere kritische temperatuur heeft, gelden dus die punten der ellips, waarvoor $tg\,\varphi < n$ is, terwijl wij, als $tg\,\varphi = 1$ is, het geval hebben dat de kritische drukken gelijk zijn. De waarde van $\frac{p_{k_2}}{p_{k_1}}$ toch is gelijk aan $\frac{1+\varepsilon_2}{1+\varepsilon_1}$. De punten, waarvoor $\frac{1+\varepsilon_1}{1+\varepsilon_2} < 1$ is, stellen dus mengsels voor, waarbij de stof met het grootste molekuul, niet alleen hoogere kritische temperatuur maar ook hoogere kritische drukking heeft. Zulke lijnen snijden de ellips in punten, waarin zoowel ε_1 als ε_2 negatief is — en daar voor niet-

snijding van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ het noodig is dat deze grootheden positief zijn en zelfs voorbij de lijn PQ liggen, zou dan de regel volgen, dat bij mengsels van stoffen waarbij de stof met het grootste molecuul de grootste kritische drukking heeft, driephasendruk moet voorkomen. Mocht dit door de ervaring worden tegengesproken, d. w. z. mocht blijken dat bij mengsels van zulke stoffen, afwezigheid van driephasendruk kan voorkomen, dan zouden wij er toe gebracht kunnen worden om de vraag te stellen: Is misschien ook in sommige gevallen mogelijk:

$$a_{12}^2 > a_1 a_2$$

dan is, in de vergelijking (δ') nl.

$$4l^2 n^2 (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) = \{2n + \varepsilon_1 + n^2 \varepsilon_2\}^2$$

de grootheid $l^2 > 1$, en stelt deze vergelijking een hyperbool voor.

Voor $l^2 > 1$ liggen de twee snijpunten met de ε_2 as aan de negatieve zijde van den oorsprong. Voor $l^2 = 1$ is een der snijpunten in het punt O gekomen, en voor $l^2 > 1$ ligt een der snijpunten aan den rechterkant van O, en dus bij een waarde van ε_2, die positief is. De tak van de hyperbool, welke door dit punt gaat, snijdt dan de eerste parabool en de lijn PQ, of de eerste parabool alleen, een lijn $\frac{1+\varepsilon_1}{1+\varepsilon_2} < 1$, kan dan de hyperbool snijden in punten waarvoor ε_1 en ε_2 positief zijn en dan is weder afwezigheid van driephasendruk te wachten.

Maar keeren wij na deze uitwijding terug tot de beschouwing van vergelijking (α'). Wij hebben tot hiertoe nagegaan de voorwaarde, noodig opdat deze vergelijking geen bestaanbare wortels heeft. Gaan wij nu over tot andere mogelijke gevallen. De wortels dezer vergelijking hebben de gedaante:

$$\frac{v}{b} = \frac{1 \pm \sqrt{\left\{1 - \left[1 - x(1-x)\frac{c}{a}\right]\left[1 + x(1-x)\frac{\left(\frac{db}{dx}\right)}{b^2}\right]\right\}}}{1 - x(1-x)\frac{c}{a}}$$

of

$$\frac{v}{b} = \frac{1 \pm \sqrt{x(1-x)\frac{c}{a}\frac{\left(\frac{db}{dx}\right)^2}{b^2}}\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{(n-1)^2} + x\frac{\varepsilon_1 - n^2\varepsilon_2}{(n-1)^2} + x(1-x)}}{1 - x(1-x)\frac{c}{a}}$$

Wij zullen nog altijd den noemer positief onderstellen. Voor $x = 0$ is de uitdrukking onder het wortelteeken gelijk aan $-\frac{\varepsilon_1}{(n-1)^2}$ en voor $x = 1$ gelijk aan $-\frac{n^2\varepsilon_2}{(n-1)^2}$ en voor deze waarden is $\frac{v}{b}$ dus onbestaanbaar bij positieve ε_1 en ε_2. Nu hebben wij vroeger ondersteld $\sqrt{\varepsilon_1} + n\sqrt{\varepsilon_2} > n-1$, die onderstelling bracht mede de onbestaanbaarheid van $\frac{v}{b}$ over de geheele breedte van $x = 0$ tot $x = 1$. Stellen wij nu $\sqrt{\varepsilon_1} + n\sqrt{\varepsilon_2} < n-1$.

Dan heeft de vergelijking $-\frac{\varepsilon_1}{(n-1)^2} + x\,\frac{\varepsilon_1 - n^2\varepsilon_2}{(n-1)^2} - x\,(1-x) = 0$ twee wortels voor x tusschen 0 en 1. Bij die bepaalde waarden van x heeft $\frac{v}{b}$ twee gelijke waarden. Voor x buiten deze waarden is $\frac{v}{b}$ onbestaanbaar; en binnen die grenzen voldoen twee positieve waarden van $\frac{v}{b} > 1$. Dat $\frac{v}{b} > 1$ is of $\frac{v-b}{b}$ positief is, kan men o.a. inzien als men de vergelijking (a) als tweede-machtsvergelijking in $(v-b)$ heeft ontwikkeld. De twee bestaanbare waarden van $\frac{v-b}{b}$ zijn beide positief, als $\frac{\left(\frac{db}{dx}\right)^2}{b^2} > \frac{c}{a}$; en de vergelijking in x eischt voor bestaanbare waarden van $\frac{v}{b}$ dat deze voorwaarde vervuld is. Hieruit volgt, dat als de voorwaarden $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ en $\sqrt{\varepsilon_1} + n\sqrt{\varepsilon^2} < n-1$ vervuld zijn, de meetkundige plaats der snijpunten van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ een gesloten figuur is. De grenswaarden voor $N = \frac{x}{1-x}$ zijn (zie formule (γ)) gegeven door:

$$\frac{\varepsilon^1}{(n-1)^2} - N\left\{1 - \frac{\varepsilon^1 + n^2\varepsilon_2}{(n-1)^2}\right\} + N^2\,\frac{n^2\varepsilon_2}{(n-1)^2} = 0.$$

Bij deze waarden van x, zijn de volumes voor een gegeven waarde x samengevallen en gelijk aan $\frac{b}{1 - x\,(1-x)\,\frac{c}{a}}$. Het bestaan van zulk een gesloten figuur met volumes grooter dan b, beteekent dat bij

uiterst lage temperatuur de twee kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2}=0$ elkander niet snijden. Eerst bij zekere waarde van T bijv. T_1 raken deze twee krommen. Bij de lagere temperaturen ligt de geheele kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ in de ruimte, waar $\frac{d^2\psi}{dv^2}$ negatief is. Bij T_1 heeft de tak der kleine volumes van $\frac{d^2\psi}{dv^2}=0$ den tak van de kleine volumes van $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ ingehaald. Bij $T>T_1$ ligt een gedeelte van $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ in het gebied waar $\frac{d^2\psi}{dv^2}$ positief is. Maar bij verdere stijging der temperatuur komt in de relatieve beweging der beide krommen ten opzichte van elkander verandering, en bij zekere temperatuur gelijk T_2 raken de takken der kleine volumes van beide krommen elkander opnieuw; en bij nog hoogere temperatuur ligt $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ weder geheel binnen $\frac{d^2\psi}{dv^2}=0$. Tusschen twee temperaturen, die wel niet met T_1 en T_2 zullen samenvallen, maar welker waarden toch nauw met deze zullen samenhangen, is er dan driephasendruk te wachten. Maar daaromtrent verwijs ik verder naar vorige Bijdragen.

De twee waarden van x, waar de meetkundige plaats der snijpunten van $\frac{d^2\psi}{dx^2}=0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2}=0$ tusschen begrepen is, liggen in het algemeen niet symmetrisch ten opzichte van $x=0$ en $x=1$. Laat deze waarden voorgesteld worden door x_1 en x_2, dan is

$$x_1+x_2=1+\frac{\varepsilon_1-n^2\varepsilon_2}{(n-1)^2}$$

of noemt men de waarde van x, welke halverwege ligt, x_m

$$2x_m=1+\frac{\varepsilon_1-n^2\varepsilon_2}{(n-1)^2}$$

Is dus $\varepsilon_1>n^2\varepsilon_2$, dan is $x_m>\frac{1}{2}$ en omgekeerd. Deze opmerking kan er toe bijdragen om tot beslissing te brengen de vraag of voor mengsels, waarbij driephasendruk tusschen twee temperaturen T_1 en T_2 bestaat, de grootheid $l^2>1$ of <1 is. Is $l^2<1$, en kunnen dus de punten, waarvan ε_1 en ε_2 de coördinaten zijn, slechts liggen op een ellips, die de ruimte tusschen de ε_1 en ε_2 as en de eerste parabool slechts kan binnentreden in een punt $\varepsilon_1>0$ en $\varepsilon_2=0$, dan is $x_m>\frac{1}{2}$ te wachten. Daarentegen als $l^2>1$ is, en de genoemde

punten op een hyperbool liggen, dan is $\varepsilon_2 > 0$ en $\varepsilon_1 < n^2\varepsilon_2$ te wachten.

Dan ligt de besproken meetkundige plaats aan de zijde van den component met de kleinste molekuulgrootte — iets wat bij mengsels van ethaan en alcoholen voorkomt. Voor het geval $\varepsilon_1 = 0$ en $n^2\varepsilon_2 > 0$, is $x_1 = 0$ en $x_2 = 1 - \frac{n^2\varepsilon_2}{(n-1)^2}$. Maar voor $x_1 = 0$ is $v - b = 0$, waaruit tegelijkertijd $T_1 = 0$, dan is er driephasendruk bij alle temperaturen beneden T_2. Evenzoo zou bij $\varepsilon_2 = 0$ en $\varepsilon_1 > 0$ de waarde van T_1 gelijk aan nul zijn.

Bij dit alles mag echter niet over het hoofd gezien worden, dat het al of niet aanwezig zijn van driephasendruk wel nauw samenhangt met het al of niet aanwezig zijn van de meetkundige plaats der snijpunten van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$, maar dat in de bijzonderheden er verschil te wachten is. Zoo zijn de temperaturen voor de grenzen, waar tusschen driephasendruk waargenomen kan worden niet dezelfde, die wij door T_1 en T_2 hebben aangeduid. Al niet, wegens het theoretisch bestaan van *verborgen* driephasendruk; maar ook, omdat het al of niet aanwezig zijn van een verborgen plooipunt niet hetzelfde beteekent als het al of niet snijden van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$. Daarenboven wordt hier het bestaan van den vloeistoftoestand ook mogelijk ondersteld bij alle temperaturen, hoe laag ook. Het optreden van den vasten toestand zal natuurlijk een beletsel kunnen zijn voor de waarneming van wat wij de temperatuur T_1 hebben genoemd. Zoo is bij mengsels van water en phenol een bovenste temperatuurgrens gevonden voor driephasendruk; maar onzeker zijn wij omtrent de vraag of er ook een benedenste temperatuur bestaat, hooger dan het absolute nulpunt.

(Wordt vervolgd).

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt een mededeeling aan van Prof. Dr. J. D. VAN DER WAALS Jr.: „*Over de wet der moleculaire attractie bij electrische dubbelpunten.*" „Naschrift."

(Mede aangeboden door den Heer P. ZEEMAN).

Prof. M. REINGANUM maakte mij opmerkzaam op de omstandigheid dat hij weliswaar wel eens de meening heeft uitgesproken, dat uit de onderstelling, dat moleculen als electrische dubbelpunten zouden zijn te beschouwen, zou volgen, dat de moleculaire krachtswerking

afnam evenredig met $\frac{1}{r^4}$, maar dat zijn afleiding van de gedaante der toestandsvergelijking door deze onderstelling niet wordt geïnfluenceerd. Immers voor ieder paar moleculen is de potentieele energie:

$$-\frac{m}{3r^3}\sqrt{3\cos^2\vartheta+1}\,.\cos\varphi$$

en dus het viriaal of $\frac{1}{2}rR$, als R de kracht volgens de verbindingslijn voorstelt:

$$\frac{m}{2r^4}\sqrt{3\cos^2\vartheta+1}\,.\cos\varphi,$$

zoodat de verhouding $\frac{\text{viriaal}}{\text{potentieele energie}}=\frac{3}{2}$ wordt.

Daar deze verhouding voor alle molecuulparen gelijk is, is dit tevens de verhouding tusschen het totale viriaal van de attractiekrachten van alle moleculen en de totale potentieele energie. En deze verhouding gebruikt REINGANUM bij zijn afleiding van de toestandsvergelijking.

Ofschoon dus de gemiddelde attractie veel sneller afneemt, komt het voor deze verhouding op hetzelfde neer, alsof de attractie evenredig met $1/r^4$ afnam. Wanneer men de verhouding zou willen berekenen door de door mij[1]) voor E gevonden waarde naar r te differentieeren en daarna met $^1/_2\,r$ te vermenigvuldigen dan zou men een andere waarde vinden. Het is inderdaad dan ook niet geoorloofd de *gemiddelde* kracht te berekenen door de *gemiddelde* potentieele energie naar r te differentieeren, zooals ik l.c. ten onrechte schreef. Om de gemiddelde kracht te vinden moet men eerst de kracht tusschen twee dubbelpunten berekenen door differentiatie van de potentiale energie naar r; en vervolgens met

$$e^{\frac{m^2\sqrt{3\cos^2\vartheta+1}\,.\cos\varphi}{3r^3t}}\;{}^1/_4\sin\varphi\,d\varphi\,\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

vermenigvuldigen en naar φ en ϑ integreeren. Omkeeren van de volgorde van deze bewerkingen: eerst integreeren en dan differentieeren, zooals men zou doen, als men de formule voor E naar r differentieerde, is niet geoorloofd. Dat dit zoo is, is gemakkelijk in te zien op grond van mathematische, maar ook gemakkelijk op grond van physische overwegingen. Immers wij zagen dat de dubbelpunten in hooger mate aan elkaar's orienteerende koppels hebben gehoor gegeven, naarmate zij elkander dichter zijn genaderd. Laat men dus een groep dubbelpunten uit een afstand r_2 tot een afstand

[1]) Zittingsverslag der Kon. Akad. v. Wetenschappen XVII p. 139.

r_1 van een ander dubbelpunt naderen, en wil men, dat de assen der dubbelpunten op dien afstand r_1 zoodanig gericht zijn, als men volgens de waarschijnlijkheidswetten mag verwachten, dan moet men de dubbelpunten tevens in den zin van de orienteerende koppels laten draaien. Het verlies aan potentieele energie is dus niet gelijk aan den arbeid der attractiekrachten, maar bevat ook den arbeid der koppels, zoodat men de attractiekrachten niet uit de potentieele energie kan afleiden door differentiatie naar r.

Daar men bij ieder paar moleculen de attractie vindt door differentiatie van $-\frac{1}{3r^3}\sqrt{3\cos^2\vartheta+1}\,.\cos\varphi$ naar r, dus door vermenigvuldiging met $-\frac{3}{r}$, vinden wij ook de gemiddelde kracht door de gemiddelde waarde der potentieele energie met $-\frac{3}{r}$ te vermenigvuldigen, zoodat wij er voor vinden:

$$K = t\sqrt{3}\,\frac{m^4}{9t^2r^7}\left\{\frac{p_1}{3!}+\frac{2m^2}{3^2t^2r^6}\frac{p_2}{5!}+\frac{3m^4}{3^4t^4r^{12}}\frac{p_3}{7!}+\ldots\right\}$$

waarin de p's de beteekenis hebben van pag. 133 en 134 l. c.

De afhankelijkheid van r blijft dus dezelfde als ik l. c. had aangegeven; alleen de coëfficiënten worden andere als men door differentiatie van E naar r zou vinden.

Anatomie. — De Heer WINKLER doet een mededeeling ook namens den Heer D. M. VAN LONDEN: „*Over de functie van de ventrale kerngroep in den thalamus opticus van den mensch.*"

Het volgende merkwaardige geval werd door ons in de neurologische kliniek van het Binnengasthuis waargenomen.

Een 77 jarige, ongehuwde, vrouw die te voren aan geenerlei ernstige ziekte had geleden en in de laatste jaren ietwat hardhoorend was, was drie weken voor haar opneming éénmaal flink duizelig geweest.

Op 8 Jan. 1908 werd zij bewusteloos op haar kamertje gevonden, van daar naar het Binnengasthuis vervoerd, waar zij in geringe mate verward, aankwam. Zij bleef dit gedurende drie dagen, klaagde daarna noch over pijnen, noch over paraesthesiën. Zij was nooit incontinent. Er bestond arteriosclerose en het hart was vergroot. De urine bevatte $^1/_4$ $^0/_{00}$ eiwit en hyaline cylinders. Na drie maanden maakte een longontsteking een einde aan haar leven.

Bij deze vrouw leverde het onderzoek der zintuigen het volgende op:

De *reuk* en de *smaak* zijn normaal.

Het *zien* is tengevolge van beginnend seniel cataract niet scherp, beiderzijds op $^{6}/_{24}$ gereduceerd. De fundus oculi is zeer goed zichtbaar en vertoont geen afwijkingen. Er bestaat geen noemenswaarde gezichtsveld-beperking.

Het *gehoor* is in den eersten tijd na haar opneming zeer slecht. Zij is nagenoeg doof, de fluisterstem wordt noch rechts, noch links waargenomen. Na 3 weken heeft zich deze stoornis in zooverre verbeterd, dat beiderzijds de fluisterstem op 3 M. afstand waargenomen wordt. In die mate bleef zij hardhoorend tot aan haar dood.

Beiderzijds is het trommelvlies in lichten graad sclerotisch veranderd.

De *sensibiliteit* van het lichaam is links in alle opzichten normaal, *rechts daarentegen sterk verminderd*, en wel:

de tactiele sensibiliteit is aan de rechter hand en voet geheel opgeheven, zeer sterk gestoord aan onderarm en onderbeen, minder aan schouder en heup, nog minder op de rechter buik- en rughelft, terwijl aan de rechter gelaatshelft daarin nauwelijks eenige stoornis te vinden is. Het *onderscheid tusschen den kop en de punt eener speld* wordt, behalve in het gelaat, rechts slecht waargenomen. Evenals de tastzin wordt ook deze stoornis door de mediale buik- en ruglijnen van de linker zijde afgegrensd en is het sterkst aan de rechter hand en voet.

Het *pijngevoel* der huid is eveneens rechts verminderd. Het doorsteken der huid wordt aan de extremiteiten niet waargenomen, minder goed aan den romp en nauwelijks verzwakt in het gelaat.

Daarentegen wordt *knijpen* of *drukken* der diepe deelen rechts veel pijnlijker dan links waargenomen. Het gaat met heftige afweerbewegingen gepaard.

Het waarnemen van *intensieve koude* en van *intensieve warmte* is aan de rechter extremiteiten in sterke mate gestoord, in mindere mate ook aan de rechter helft van den romp, het minst in het gelaat.

Passieve bewegingen meêgedeeld aan vingers, hand, toonen of voet der rechter zijde, worden in het geheel niet waargenomen, hoe snel en omvangrijk die beweging ook was. Bewegingen verricht met het rechter ellebooggewricht of kniegewricht worden slecht, met het echter heup- en schoudergewricht nagenoeg normaal waargenomen. Over *den stand* van den rechtervoet en hand *in de ruimte* blijkt de patiënte volkomen gedesoriënteerd te zijn, in mindere mate beoordeelt zij ook den stand van knie en elleboog onjuist. Vrij goed was het oordeel over den stand van bovenarm en bovenbeen. Er bestaat volkomen *astereognosie* der rechter hand. Geen enkel in de rechter

hand gegeven voorwerp wordt herkend. Zij weet niet of zij iets of niets in de hand heeft. Gemeenlijk laat zij het vallen.

Al deze rechtszijdige sensibiliteitsstoornissen zijn gedurende de 3 maanden, dat de patiënte in observatie is geweest, stationair gebleven.

De *motiliteit* der rechterzijde is daarentegen slechts weinig gestoord. In de week na het insult klaagt zij over zwakte der rechter ledematen.

Een verlamming is echter nooit gezien. De klacht is voorbijgegaan en er is slechts geconstateerd geworden dat de rechter schouder lager dan de linker hing. Zoowel snelle als fijne bewegingen konden verricht worden met de rechter-extremiteiten; geld tellen of de vingerneusproef worden rechts maar weinig slechter dan links uitgevoerd. *Er bestaat slechts een geringe rechtszijdige cerebrale ataxie, en er bestaat geen spoor van athetoide, choreatische of andere onwillekeurige bewegingen aan de rechterzijde.* De dynamometer in de hand kon beiderzijds 50 aanwijzen.

De huidreflexen, buik-, cremaster- en voetzolenreflex zijn beiderzijds gelijk en normaal. De diepe reflexen, Achillespees- en kniereflex zijn niet verhoogd, geen voet- of knieklonus. Er is geen duidelijk tonusverschil, geen atrophie in de spieren der twee lichaamshelften.

Spraak- of articulatiestoornissen zijn niet aanwezig geweest.

De patiënte was analfabeet, zoodat niet over stoornis in lezen of schrijven kon geoordeeld worden. Haar toestand bleef tot haar dood op 24 Maart 1908 stationair.

De ons uit het laboratorium van prof. Kuhn, welwillend ter bewerking afgestane hersenen werden gedurende eenige dagen in formaline gehard. Daarna worden frontale doorsneden van 1 c.M. dikte door beide hemispheren aangelegd. De *eenige* met het bloote oog zichtbare verandering is een haard in het middenste en caudale gedeelte van den linker thalamus opticus.

Voor mikroskopisch onderzoek wordt daarom een frontale serie door de linker hemispheer gesneden, van welke de meest proximale doorsnede, de caudale einden der frontale windingen, de slaappool en de commissura anterior treft. De meest caudale doorsnede, gaat achter het caudale einde der fissura Sylvii, door den caudalen rand van den gyrus supramarginalis, den praecuneus en het splenium corporis callosi.

De nucleus caudatus, de nucleus lenticularis, de capsula interna en het frontale einde van den thalamus opticus worden onveranderd gevonden. Evenzoo de nucleus anterior in zijn geheelen omvang. Ongeveer in het midden van den thalamus (zie fig. I) wordt het frontale begin van een verweekingshaard aangetroffen, als een klein onregelmatig begrensd vierkant in den nucleus lateralis. De haard

bestaat uit tegen elkander gelegen leucocyten, in zijn wand worden de capillairvaten uitgezet, propvol met bloedcellen, aangetroffen.

Op de volgende doorsneden (zie fig. II) breidt zich de haard snel uit. Onregelmatig van vorm neemt hij een plaats in, midden in de ventrale kern, vernielt grootendeels den nucleus ventralis *b*, omkranst evenals deze kern het centre médian van LUYS, dringt in de ventrale kern *a* door, tot nabij de regio subthalamica. De „Gitterschicht", de lamina medullaris externa en de regio subthalamica worden niet geraakt, en dus blijven zoowel de laterale mergmassa van de roode kern als de lemmiscus-lagen ongedeerd.

Bovendien bevindt zich te dezer hoogte, een kleiner, hier nog afzonderlijk gelegen, inderdaad echter met den grooten haard samenhangend, haardje, in de hoofdafdeeling van den nucleus medialis.

Even meer naar achteren toe (zie fig. III) bereikt de haard zijn grootsten omvang. Hij ligt thans in de ventrale kernen *a*, *b* en *c*, die bijna geheel vernield zijn, zendt een smallen uitlooper in den nucleus medialis, dringt als een wig toegespitst naar de regio subthalamica, waar hij dicht tot aan de stralingen der lemmiscusvezels nadert, en hen onderbreekt.

Nog meer caudaalwarts (zie fig. IV) is de plaatsing van den haard een zoodanige, dat de ventrale *a*-kern weder vrijkomt, de *b*-kern en de *c*-kern alsmede de achterste kern in den haard opgaan. Ook maakt het corpus geniculatum mediale (waarvan echter de instraling uit het bracchium conjunctivum corporis quadrigemini postici ongedeerd blijft) deel uit van den haard. Met een langen en smallen caudalen uitlooper zet zich de haard langs de ventrale zijde in het pulvinar thalami optici (zie fig. V) voort, om daar te eindigen.

Het corpus geniculatum laterale wordt nergens door den haard getroffen. Evenmin de z.g. „Gitterschicht" van ARNOLD.

Van dezen haard gaan secundaire degeneraties uit in bepaalde velden, die deels door de aanwezigheid van korrelcellen, deels door de afwezigheid van merghoudende vezels en door lichtere velden in praeparaten volgens WEIGERT-PAL gekenmerkt zijn.

In den thalamus, waarvan het frontale einde geen degeneratieve veranderingen vertoont (zie fig. I) heeft het achterste gedeelte van de mediale hoofdkern, bepaaldelijk in het caudaal van den haard gelegen deel, stellig vezels verloren. Hetzelfde geldt van de „Gitterschicht", ofschoon nergens direct door den haard getroffen, mist men in het bereik van den haard, een groot aantal der door die kern heen van den thalamus naar het retro-lenticulaire deel der capsula interna loopende vezels.

In de retro-lenticulaire afdeeling van de capsula interna wordt

daar, tegen de „Gitterschicht" aan, een licht veld gevonden (zie fig. IV*a*) tengevolge van vezeldegeneratie[1]).

Eerst lateraal van de „Gitterschicht" gelegen (zie fig. IV*a*, kan men dit veld caudaal (fig. IV*a*, fig. V a_1 a_2, fig. VI a_1 a_2 a_3) en frontaal (fig. III a_1 a_2 en fig. II a_2) vervolgen. In de caudale doorsneden grenst het ventraal tegen het merg dat het c. geniculatum externum omgeeft (*W.* in fig. III), breidt zich van daar zoowel in het stratum sagittale externum als in het stratum sagittale internum uit. (zie fig. III en fig IV). In frontale coupes neemt dit veld in de capsula interna, mediaal van het caudale einde van het putamen nuclei lenticularis plaats (fig. IIa_2).

In drie richtingen laat zich dit degeneratieve veld vervolgen:
1e in de mergstralen der drie temporale windingen (zie fig. I—VII a_1) het minst in den gyrus temporalis I.
2e in het splenium corporis callosi (zie fig. VI en VII a_3).
3e in de mergstralen van den gyrus supramarginalis en nog voor een belangrijk gedeelte in den gyrus centralis posterior, (zie fig. I—VII a_2). In glycerine-praeparaten onderzocht, is het merg dezer gyri bezaaid met korrelcellen.

Vatten wij het bovenvermelde te samen, dan vinden wij bepaalde waarnemingsstoornissen bij een vrouw, na een insult, ten gevolge van een streng binnen den linker thalamus gelocaliseerden haard.

1e Voorbijgaande dubbelzijdige doofheid, waaruit dubbelzijdig hardhorendheid, als een stationair verschijnsel, nablijft.

2e Blijvende rechtszijdige sensibiliteitsstoornis in alle gevoelsqualiteiten der huid en der diepe deelen, nagenoeg volkomen in de distale uiteinden de extremiteiten, minder sterk aan romp en aan de wortels der extremiteiten, zeer gering in het aangezicht. Dit alles bestaat zonder choreatische bewegingen dier zijde en slechts door een zeer geringe rechtsche cerebrale ataxie begeleid.

Deze stoornissen hangen zonder twijfel van dien haard af.

De hoorstoornis hangt waarschijnlijk samen met de vernieling van het corp. geniculatum mediale. Deze en de secundaire atrophie naar de slaapstraling (zie a_1 der figuren) is, in overeenstemming met onderzoekingen, welke door zeer verschillende onderzoekers langs zeer verschillende methoden zijn verricht (von Monakow, Flechsig), voldoende om een stoornis in het gehoor begrijpelijk te maken.

Merkwaardig blijft alleen dat de lijderes aanvankelijk dubbelzijdig stokdoof was, hoewel de laesie dubbelzijdig was. Merkwaardig is ook, dat deze hoorstoornis snel in belangrijke mate verbetert.

---

[1]) In de teekeninngen zijn de velden te licht weêrgegeven.

De degeneratie-vlek treft niet in de eerste plaats de mergkegel van de naar de fissura Sylvii toegekeerde slaapwinding, maar ligt bij voorkeur in de beide andere slaapwindingen en wordt gevormd door gedegenereerde vezels, die zoowel uit het stratum sagittale externum als uit het stratum sagittale internum daarheen gaan, iets wat vooral in de meer frontale doorsneden duidelijk is. Voorts kan een gedegenereerde bundel naar het splenium corporis callosi gevolgd worden.

Wellicht kunnen deze feiten bijdragen tot een eventueele verklaring, der dubbelzijdige onvolledige doofheid. Wij laten dit echter rusten om de aandacht te vestigen op de hoofdzaak van het belangrijke geval.

De ventrale kerngroepen in den thalamus opticus, bepaaldelijk hun meer caudale gedeelten — en bij uitsluiting der andere kernen, zij alleen — *vindt men verwoest bij iemand, die tijdens het leven alle sensibiliteit aan de gekruiste extremiteiten-uiteinden verloren had, zonder choreatische bewegingen, zonder intensieve corticale ataxie aan die zijde,* terwijl de sensibiliteit in het gelaat nagenoeg behouden, aan den romp en aan den wortel der extremiteiten verminderd was.

Zulke omschreven haarden zijn zeer zeldzaam, maar zijn dan ook belangrijke bijdragen voor de studie van den intracerebralen loop der wegen voor het algemeen gevoel.

Die wegen zijn veel minder goed bekend, dan de intra-cerebrale loop der gezichts- of gehoorsbanen.

Sedert Türck in 1850 door zijn experimenteel werk den stoot gaf tot de studie der intracerebrale gevoelsbanen, is er daarover een reusachtige literatuur, die in de dissertatie van Long [1]) (onder leiding van Déjérine) vrij nauwkuerig is weêrgegeven. Het resultaat van al dat werk is, dat men heden ten dage vrij algemeen aanneemt, dat de thalamus opticus, onder meer functies, ook een rol speelt voor het gevoel der gekruiste lichaamshelft.

Uit de school van Déjérine vinden wij deze meening zeer scherp uitgesproken in het voortreffelijk boek van Roussy [2]), die de gekruiste sensibiliteitsstoornis meêtelt bij zijn „syndrome thalamique."

Maar zelfs in dat boek vinden wij niet een bij uitsluiting op den th. opticus gelocaliseerden haard [3]). De hier gevonden strenge localisatie rechtvaardigt de stelling:

---

[1]) Edouard Long. Les voies centrales de la sensibilité générale. (Étude Anatomo-clinique). Thèse de Paris. 1899.

[2]) Gustave Roussy. La couche optique et le syndrome thalamique. Paris, Steinheil. 1907.

[3]) Roussy l. c. Vergelijk cas Jossaume p. 229.

De caudale gedeelten der ventrale kerngroepen in den thalamus opticus spelen een soortgelijke rol bij de centrale projectie der sensibiliteit van huid en diepe deelen der gekruiste extremiteiten-uiteinden (niet van het gelaat, minder volkomen van romp en extremiteitenoorsprong) als die welke vervuld wordt, door het corpus geniculatum mediale bij de centrale projectie der indrukken uit de cochlea en door het corpus geniculatum laterale bij die der indrukken uit de retina.

Door VON MONAKOW[1]) is een geval beschreven; dat groote verwantschap met het hier meêgedeelde bezit. Ongelukkiger wijze beschikte hij niet over voldoende klinische gegevens; met name niet of er hemianaestesie was geweest tijdens het leven. Des te nauwkeuriger zijn door hem, de na het verlies der achterste ventrale kernen voorkomende secundaire atrophieën beschreven, die ongeveer dezelfde zijn als in het bovenvermelde geval. Het schijnt ons, dat de gyrus centralis posterior hier een grooter aantal vezels uit het atrophische veld ontvangt dan in dit bekende geval, waarmeê het overigens in vele opzichten overeenstemt.

Van gewicht is voorts, dat het gelaat van de gevoelsstoornis nagenoeg verschoond is gebleven. Wellicht hangt dit samen met het feit, dat de mediale hoofdkern en het centre médian eveneens nagenoeg niet aan den haard deelnemen. Want bij dieren heeft men de secundaire trigeminusbanen hoofdzakelijk daarheen vervolgd, (WALLENBERG)[2]), en men geeft deze kern te samen met de ventrale, de beteekenis van gebonden te zijn aan den N. trigeminus (ARRIËNS KAPPERS [3]); dieren met een sterk ontwikkelden trigeminus (mol) bezitten voorts een groote mediale kern, zoodat de mogelijkheid niet is af te wijzen, dat de mediale kern meer dan de ventrale heeft uitstaan met de sensibiliteit voor het gelaat.

Ons hier beschreven geval echter is een bijna eenig experiment door de natuur genomen en leert, *dat geïsoleerde destructie der ventrale thalamus-kernen gepaard kan gaan met opheffing van alle gevoelswaarneming in de gekruiste extremiteiten-uiteinden.*

VERKLARING DER PLATEN.

Fig. I—VII frontale doorsneden door de linker hemisphaer. Fig. I frontaal van de roode kern, treft het corp. subthalamicum; begin van den haard. Fig. II door de roode kern, begin van de retrolenticulaire afdeeling der capsula interna. Fig. III door de grootste uitbreiding van den haard, begin van het c. quadr. anterius. Fig. IV

---

1) C. VON MONAKOW. Zur Anatomie und Physiologie des unteren Scheitelläppchens. Arch. f. Pych. 1899. XXXI S. 1—74. Fall D'auj.

2) ADOLF WALLENBERG. Secundaire Bahnen aus dem frontalen sensiblen Trigeminuskerne des Kaninchens. Anat. Anz. XXVI. 1905. S. 145—155.

3) C. A. ARRIENS KAPPERS. Weitere Mitteilungen über die Phylogenese des Corp. striatum und des Thalamus. Anat. Anz. 1908. Bd. XXXIII. No. 13 und 14, S. 321.

door het begin van het pulvinar. Fig. V. Einde van den haard. Pulvinar thalami.

In alle doorsneden beteekent: *a.* de degeneratie vlek in de retrolenticulaire afdeeling der capsula interna, lateraal van de Gitterschicht gelegen, a_1 a_1 de uitstraling van de degeneratievlek naar de slaapstraling, a_2 a_2 de uitstraling naar den gyrus supramarginalis en naar den gyrus centralis posterior, a_3 a_3 die naar het corpus callosum.

Fig VI. Begin van het splenium corp. callosi. De degeneratievlekken.

Fig. VII. Door het splenium corp. callosi en het tapetum.

In alle figuren beteekenen de letters het volgende:

cap. n. c. = caput nuclei caudati, caud. n. c. = cauda nuclei caudati, c. c. = corpus callosum, c. f. = columna fornicis, f. f. = fimbria fornicis, f. c. = fissura centralis, f. i. p. = fissura interparietalis, f. p. c, = fissura postcentralis; f. S. = fissura Sylvii, r. a. f. S. = ramus ascendens fissurae Sylvii, G. C. a. = gyrus centralis anterior, G. C. p, = Gyrus centralis posterior, G. s. M. = Gyrus supramarginalis, G. L. = gyrus lingualis, G. F. = gyrus fornicatus, G. H. = gyrus hippocampi, G. P_1 = gyrus pariètalis superior, G. Para C. = gyrus paracentralis, G. Pr = gyrus praecunei, G. O. T. = gyrus occipito-temporalis, GT_1, GT_2, GT_3 = gyri temporales, l. m. e. = lamina medullaris externa thalami, l. m. i. = lamina medullaris interna, p. p. = pes pedunculi, pulv. = pulvinar thalami, n. ant. = nucleus anterior thalami, n. med. = nucleus medialis thalami, n. lat. = nucleus lateralis thalami, n. ventr. (a. b. c.) = nucleus ventralis thalami (a b. c.), Gitt. = Gitterschicht n. c. = nucleus caudatus, n. l. = nucleus lenticularis, N. R. = nucleus ruber, m. d. N. R. = medulla dorsalis nuclei rubri, s. n. = substantia nigra, c. L. = corpus subthalamicum, c. m. L. = centre médian (Luys), spl. c. c. = splenium corporis callosi, s.s. ext. = stratum sagittale externum, s. s. int. = stratum sagittale internum (straling van Gratiolet), tap. = tapetum, W. = stratum medullare corporis geniculati lateralis (Wernicke's driehoekig veld), c. g. l. = corpus geniculatum laterale, c. g. i. = corpus geniculatum mediale.

Wiskunde. — De Heer Jan de Vries biedt eene mededeeling aan van den Heer M. Stuyvaert te Gent: „*Sur certaines courbes gauches du sixième ordre*".

(Mede aangeboden door den Heer H. de Vries.)

M. le prof. Jan de Vries a eu l'obligeance de nous communiquer un intéressant travail qu'il a fait paraître dans les Comptes-rendus de la Koninklijke Akademie van Wetenschappen d'Amsterdam, sous le titre "*On twisted curves of genus two*" (26 Mai 1908).

La plus grande partie de cette Note concerne les courbes gauches de genre deux et d'ordre cinq ou six. Nous nous permettons de présenter ici un aperçu rapide des résultats que l'on peut obtenir en appliquant à ces courbes les propriétés élémentaires des matrices, sujet sur lequel nous avons fait paraître récemment un volume intitulé *Cinq Etudes de Géométrie analytique* (Gand, van Goethem 1908). Nous ne nous occuperons ici que des courbes du sixième ordre, et

nous nous contenterons de remarquer que la quintique se traite par des procédés analogues mais plus simples.

Nous devons revenir d'abord sur une sextique circulaire dont nous avons esquissé la théorie dans les Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris (27 Juillet 1908, pp. 322—324); nous rappelons succinctement, en les complétant, ses propriétés immédiates, et nous montrons ensuite comment on en déduit la théorie de la sextique de genre deux la plus générale.

Soit dit en passant, la méthode que nous utilisons a une portée plus générale. On aperçoit en effet la possibilité théorique de l'employer pour toute courbe algébrique gauche. Car HALPHEN définit une telle courbe le lieu d'un point dont les coordonnées sont fonctions algébriques d'un même paramètre t; chacune de ces coordonnées est donc liée à t par une équation algébrique entière; il suffit d'écrire les conditions pour que ces trois équations soient satisfaites pour une même valeur de t; et il est possible, de plusieurs manières, d'exprimer ces conditions par l'évanouissement d'une matrice: la représentation de CAYLEY par cône et monoïde constitue au fond une solution du problème; nous en avons indiqué une autre dans nos *Cinq Etudes* (p. 60) et l'on peut en trouver d'autres encore; mais, le plus souvent, la courbe à représenter se trouve accompagnée de courbes d'ordre inférieur.

1. Revenons à l'objet proprement dit de notre travail.

Soient, en coordonnées cartésiennes rectangulaires,

$$S_i = a_i\,(x^2 + y^2 + z^2) + s_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

les équations de six sphères indépendantes (les fonctions s_i sont linéaires en x, y, z). Les équations

$$\frac{S_1}{S_4} = \frac{S_2}{S_5} = \frac{S_3}{S_6} \quad \text{ou} \quad \left\| \begin{matrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ S_4 & S_5 & S_6 \end{matrix} \right\| = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

représentent, outre le cercle imaginaire de l'infini, une courbe gauche γ_6 du sixième ordre, de genre deux, contenant six points du cercle imaginaire de l'infini.

Nous écrirons parfois les équations (1), en abrégé $|S_1\ S_4| = 0$ et nous supposons expressément que la matrice $|a_1\ a_4|$ n'est pas nulle, sans quoi $x^2 + y^2 + z^2$ pourrait, par soustraction, disparaître des dénominateurs des fractions (1) et la courbe représentée serait une quintique dont la théorie est analogue à celle de γ_6, mais plus simple.

La courbe γ_6 se trouve sur ∞^2 surfaces cyclides $|a_1\ S_1\ S_4| = 0$, deux desquelles se coupent encore suivant un cercle quadrisécant de γ^6. Les équations d'un tel cercle peuvent s'écrire

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\,\lambda_1\,S_1 &\equiv \lambda_1\,S_1 + \lambda_2\,S_2 + \lambda_3\,S_3 = 0,\\ \Sigma\,\lambda_1\,S_4 &\equiv \lambda_1\,S_4 + \lambda_2\,S_5 + \lambda_3\,S_6 = 0\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

et l'on en déduit très simplement une théorie assez détaillée de la congruence de ces cercles quadrisécants de γ_6. Ainsi on observe que cette congruence est de premier ordre et de troisième classe; que ceux de ces cercles qui passent par un point fixe de γ_6 engendrent une surface cyclide ayant ce point pour point double; que ceux de ces cercles dont le plan passe par un point fixe engendrent une surface du septième ordre; on trouve la surface engendrée par ceux de ces cercles qui s'appuient sur une droite ou une courbe, etc., etc. Le résultat le plus important est que les plans de ces cercles enveloppent une surface cubique réglée R_3.

Toute sphère contenant un cercle quadrisécant de γ_6 a une équation de la forme

$$\Sigma\,\lambda_1\,(S_1 - k\,S_4) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; , \quad (3)$$

et contient les deux points pour lesquels on a $S_1 = kS_4$, $S_2 = kS_5$, $S_3 = kS_6$. Lorsque k varie ces deux points décrivent l'involution fondamentale considérée par M. J. DE VRIES; nous appellerons simplement *couples*, les couples de points de cette involution. Les cordes de *couples* sont les génératrices rectilignes de la surface R_3.

Parmi les surfaces $|a_1\,S_1\,S_4|$ circonscrites à γ_6, il faut distinguer les deux suivantes

$$|a_1\,S_1\,S_4| = 0, \qquad |a_4\,S_1\,S_4| = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Elles sont *cubiques circulaires* et déterminent un faisceau dont la base se complète par le cercle de l'infini et par la ligne

$$||\,a_1 \quad a_4 \quad S_1 \quad S_4\,|| = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

or, par soustraction de colonnes, cette matrice se réduit à $||a_1\,a_4\,s_1\,s_4||$ et représente une droite q, quadrisécante de γ_6, droite double de la surface R_3 et rencontrant toutes les cordes de *couples*.

2. Ecrivons l'équation des sphères S_i sous la forme plus complète

$$S_i \equiv a_i(x^2 + y^2 + z^2) + b_i x + c_i y + d_i z + f_i = 0,$$

posons la matrice

$$M \equiv ||\; a_i \;\; b_i \;\; c_i \;\; d_i \;\; f_i \;\; || \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

et appelons M_i le déterminant extrait de cette matrice par la suppression de la ligne de rang i et affecté du signe $+$ ou $-$ suivant que i est impair ou pair; nous aurons évidemment

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma\,M_i a_i = \Sigma\,M_i b_i = \Sigma\,M_i c = \Sigma\,M_i d_i = \Sigma\,M_i f_i = 0,\\ &\Sigma\,M_i S_i \equiv 0. \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)\end{aligned}\right| \quad . \; . \quad (6)$$

circonscrites.

Par suite, les deux équations suivantes sont complétement équivalentes

$$\left.\begin{array}{l}(S_1-kS_4)(M_4+lM_1)+(S_2-kS_5)(M_5+lM_2)+(S_3-kS_6)(M_6+lM_3)=0\\(S_1-lS_4)(M_4+kM_1)+(S_2-lS_5)(M_5+kM_2)+(S_3-lS_6)(M_6+kM_3)=0.\end{array}\right\}. \quad (7)$$

Elles représentent visiblement, l'une et l'autre, la sphère menée par les deux *couples* définis par les paramètres k et l. Chacune de ces équations peut s'écrire sous la forme abrégée, en posant ΣM_4S_1 pour $M_4S_1 + M_5S_2 + M_6S_3$, etc.,

$$\Sigma M_4S_1 + (k+l)\Sigma M_1S_1 - kl\Sigma M_1S_4 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Pour k et l variables, on a une double infinité de sphères ou plutôt un réseau de sphères, car elles passent toutes par deux points fixes D_1 et D_2 de γ_6, points pour lesquels les trois expressions suivantes s'annulent à la fois:

$$\Sigma M_4S_1, \qquad \Sigma M_1S_1 \text{ ou } -\Sigma M_4S_4, \qquad \Sigma M_1S_4.$$

Ces points D_1 et D_2 sont sur toute sphère contenant deux *couples*, donc aussi dans le plan de deux *couples* dont les cordes se coupent (sur la quadrisécante q); donc D_1D_2 est la droite simple de la surface R_8 par où passent tous les plans bitangents de cette surface.

On trouve que la droite D_1D_2 a pour équations

$$\left\|\begin{array}{lll}\Sigma S_1M_4 & \Sigma S_1M_1 & \Sigma S_4M_1\\ \Sigma a_1M_4 & \Sigma a_1M_1 & \Sigma a_4M_1\end{array}\right\| = 0, \quad . \quad . \quad (9)$$

et que, pour qu'elle se confonde avec la droite q, ou pour que la la surface R_8 soit une surface cubique réglée spéciale de Cayley, il faut la condition

$$\Delta = \left|\begin{array}{ll}\Sigma a_1M_1 & \Sigma a_1M_4\\ \Sigma a_4M_1 & \Sigma a_4M_4\end{array}\right| = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Le déterminant Δ est le produit par colonnes des deux matrices $\| a_1\, a_4 \|$ et $\| M_1\, M_4 \|$; son évanouissement correspond à un cas particulier, dans lequel la courbe γ_6 acquiert certaines propriétés exceptionnelles remarquables que nous ne pouvons consigner ici, faute d'espace.

3. Puisque la courbe γ_6 appartient à la base d'un faisceau de surfaces cubiques circulaires et à la surface R_8 qui n'est pas un élément de ce faisceau, elle se trouve sur toutes les surfaces cubiques d'un certain réseau. Deux quelconques de ces surfaces se coupent suivant la courbe γ_6, plus la quadrisécante q, plus une conique c_2. Cette conique coupe γ_6 en six points, et réciproquement toute conique coupant six fois γ_6 appartient à un faisceau de surfaces cubiques circonscrites.

Ce qui précède va nous permettre d'écrire les équations de γ_6 sous une forme nouvelle. Deux surfaces cubiques circulaires contenant la courbe ont des équations de la forme

$$|a_1 S_1 S_4| = |a_1 s_1 s_4| + (x^2 + y^2 + z^2)\, |a_1 s_1 a_4| = 0,$$
$$|a_4 S_1 S_4| = |a_4 s_1 s_4| + (x^2 + y^2 + z^2)\, |a_4 a_1 s_4| = 0.$$

L'intersection de ces surfaces, d'où l'on aura défalqué le cercle de l'infini vérifiera les relations

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & |a_1 s_1 s_4| & |a_4 s_1 s_4| \\ 1 & |a_1 a_4 s_1| & |a_1 a_4 s_4| \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

qui représentent donc la courbe γ_6 accompagnée de sa quadrisécante q : le déterminant des deux dernières colonnes s'annule pour la surface réglée R_3.

Nous trouvons donc que la courbe γ_6 accompagnée de sa quadrisécante q constitue un cas particulier d'une courbe du septième ordre de genre 5 annulant une matrice à trois colonnes et deux lignes, l'une de formes quadratiques, l'autre de formes linéaires, courbe de 7ème ordre que nous avons étudiée dans nos *Cinq Etudes* (p. 44) en donnant la bibliographie.

En faisant précéder la matrice (11) d'une ligne de constantes, on a le réseau des surfaces cubiques circonscrites à γ_6. Deux de ces surfaces se coupent encore suivant une conique sexasécante de γ_6, conique dont voici les équations

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 (x^2 + y^2 + z^2) + \mu_2 |a_1 s_1 s_4| + \mu_3 |a_4 s_1 s_4| &= 0, \\ \mu_1 \qquad\qquad + \mu_2 |a_1 a_4 s_1| + \mu_3 |a_1 a_4 s_4| &= 0; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (12)$$

la seconde de ces équations représente le plan de la conique : on voit que ce plan est parallèle à la droite q et que tout plan parallèle à q contient une conique sexasécante de γ_6.

Les équations (12) représentent la congruence des coniques sexasécantes de γ_6 ; c'est un cas particulier d'une congruence considérée par M. Montesano (*Atti Accad. Torino*, 1892) ; on voit qu'elle est de premier ordre et de première classe ; que, pour celles de ces coniques qui dégénèrent en deux droites trisécantes de γ_6, leurs plans enveloppent un cylindre de quatrième classe ; etc.

Si nous faisons suivre la matrice (11) d'une colonne dont le premier élément est une forme linéaire arbitraire a_x et le second une constante arbitraire β, nous obtenons une matrice qui s'annule pour huit points dont six sur γ_6 et deux sur la quadrisécante ; ce sont les intersections de γ_6 et de q avec la sphère

$$(x^2 + y^2 + z^2)\beta - a_x = 0.$$

En faisant varier, dans cette équation, β et les coefficients de a_x,

on a toutes les sphères possibles. D'autre part, on vérifie immédiatement que les huit points en question et une conique sexasécante quelconque de γ_6 sont toujours sur une même quadrique.

Ceci revient à dire que toute conique sexasécante de γ_6 joue un rôle analogue à celui du cercle imaginaire de l'infini lequel est aussi une conique sexasécante de γ_6.

4. La remarque faite en dernier lieu en suggère une autre plus importante.

Moyennant une transformation linéaire qui remplace le cercle de l'infini par une autre conique, la courbe γ_6 devient la sextique gauche de genre deux la plus générale. En effet, HALPHEN (*Ecole polytechnique*, 52ème cah., 1882) a démontré qu'une telle sextique est l'intersection partielle de deux surfaces cubiques qui ont encore en commun une droite et une conique, et il est sous-entendu que cette droite et cette conique ne se rencontrent pas. Dès lors, prenons le plan de la conique pour face x_1 du tétraèdre de référence, et la droite pour arête x_2x_3 de ce tétraèdre. L'équation d'une des surfaces cubiques est de la forme

$$x_1 a_x^2 = b_x^2 c_x. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

le second membre étant indépendant de x_1 ; $b_x^2 = 0$ est le cône de sommet $x_2x_3x_4$ perspectif à la conique du plan x_1 ; la droite x_2x_3 qui appartient à la surface doit annuler la forme linéaire c_x et par suite aussi la forme quadratique a_x^2.

Pour les mêmes raisons, une autre surface cubique circonscrite au système de lignes considéré a pour équation

$$x_1 a_x'^2 = b_x^2 c'_x, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

où $a_x'^2$ et c'_x passent encore par la droite x_2x_3.

Défalcation faite de la conique $x_1 = 0, b_x^2 = 0$, l'intersection de ces deux surfaces annule la matrice

$$\begin{vmatrix} x_1 & c_x & c'_x \\ b_x^2 & a_x^2 & a_x'^2 \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Ainsi toute sextique de genre deux forme, avec sa quadrisécante, un système dégénéré d'une courbe d'ordre 7 et de genre 5 ; ce système annule une matrice de trois colonnes et deux lignes, l'une de formes linéaires, l'autre de formes quadratiques, où les éléments de deux colonnes s'annulent pour une même droite.

Maintenant, il est facile de voir que toute matrice pareille se ramène à une autre de six quadriques ayant une conique commune. En effet, les quadriques a_x^2 et $a_x'^2$ passant par la droite $c_x c'_x$ peuvent

être remplacées par $c_x p_x + c'_x q_x$ et $c_x p'_x + c'_x q'_x$; alors deux déterminants extraits de la matrice (15) peuvent s'écrire

$$x_1(c_x p_x + c'_x q_x) - c_x b_x^2 = 0,\ x_1(c_x p'_x + c'_x q'_x) - c'_x b_x^2 = 0,$$

d'où, pour les points qui n'annulent pas à la fois c_x et c'_x,

$$\left\| \begin{matrix} c_x & x_1 q_x & b_x^2 - x_1 q'_x \\ c'_x & b_x^2 - x_1 p_x & x_1 p'_x \end{matrix} \right\| = 0;$$

en multipliant les termes de la première colonne par x_1 et appliquant d'une manière quelconque, l'addition des lignes et des colonnes, on a toujours une matrice de six formes quadratiques s'annulant pour la conique $x_1 = b_x^2 = 0$.

Les théorèmes projectifs relatifs à la sextique circulaire γ_6 se traduisent donc en propriétés de la sextique de genre deux la plus générale. Il est superflu d'écrire les énoncés; nous n'en citons qu'un à titre d'exemple: dans toute sextique de genre deux, les plans des coniques sexasécantes passent par un point fixe de la quadrisécante.

5. Si l'intersection des deux surfaces cubiques considérées à l'article précédent, (13) et (14), se complète par une droite et une conique ayant un point commun, cette circonstance ne constitue pas d'ordinaire un cas particulier du cas précédent, au sens de HALPHEN; mais cette droite et cette conique constituent un cas particulier d'une cubique gauche, et la sextique est alors de genre trois. En effet, dans ce cas, les équations (13) et (14) peuvent être telles que la droite $x_2 x_3$ annule a_x^2, a'^2_x et b_x^2 sans annuler c_x ni c'_x, et la matrice

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & c_x & c'_x \\ b_x^2 & a_x^2 & a_x'^2 \end{matrix} \right\|$$

a alors les éléments de sa seconde ligne évanouissants pour une même droite.

On peut étudier, par ce procédé, la sextique de genre trois; retrouver, par exemple, la correspondance unidéterminative entre ses points et ses trisécantes, correspondance découverte par M. F. SCHUR (*Math. Ann.* t. 18); ramener la représentation de la courbe à une matrice de douze formes linéaires que nous avons étudiée dans nos *Cinq Etudes* et dans les *Bulletins de l'Académie royale de Belgique* (Mai 1907), etc.

Gand, le 26 Octobre 1908.

Dierkunde. — De Heer HUBRECHT biedt voor de Werken der Akademie eene verhandeling aan van den Heer J. F. VAN BEMMELEN: *„Ueber den Unterschied zwischen Hasen- und Kaninchenschädel"*.

Deze wordt in handen gesteld van de Heeren WEBER en BOLK om advies.

Voor de Boekerij wordt aangeboden door den Heer W. VAN BEMMELEN, namens den Heer J. M. VAN BEMMELEN: *„Nähere Betrachtungen über die von* G. TSCHERMAK *angenommenen Kieselsäuren."*

De vergadering wordt gesloten.

(12 November 1908).

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 28 November 1908.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 409.
Verslag van de Heeren WEBER en BOLK over eene verhandeling van den Heer J. F. VAN BEMMELEN: „Ueber den Unterschied zwischen Hasen- und Kaninchenschädel", p. 410.
J. P. VAN DER STOK: „Frequenties der gemiddelde dagelijksche bewolking te Batavia". p. 411.
P. H. SCHOUTE: „Over vierdimensionale netten en hunne ruimtedoorsneden" (3de mededeeling), p. 425. (Met 3 platen).
J. D. VAN DER WAALS: „Bijdrage tot de theorie der binaire mengsels". XI, p. 439.
A. KEESING: „Plooipuntstemperaturen van het stelsel water-phenol". (Aangeboden door de Heeren J. D VAN DER WAALS en P. ZEEMAN), p. 458.
S. H. KOORDERS: „Enkele systematische en plantengeographische opmerkingen over de Javaansche Casuarinaceae vooral van 's Rijks Herb. te Leiden en Utrecht" (Bijdrage tot de kennis der Flora van Java, N°. III), p. 462.
W. BURCK: „Over de biologische beteekenis der nectarafscheiding in de bloem", p. 473.
Vaststelling der Decembervergadering, p 488.
Errata, p. 489.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Bericht van de Heeren BURCK, MOLL en MAC GILLAVRY dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Brief van den Heer Dr. W. VAN DAM te Hoorn, waarbij hij zijne ter uitgave in de Werken der Akademie aangebodene verhandeling „Bijdrage tot de kennis der Lebstremming" terug verzoekt.

Zoologie. De Heer WEBER brengt ook namens den Heer BOLK het volgende Rapport uit over de verhandeling van Prof. J. F. VAN BEMMELEN: *„Ueber den Unterschied zwischen Hasen- und Kaninchenschädel"*.

Onder bovenstaanden titel tracht de Heer VAN BEMMELEN in de eerste plaats op grondige wijze en langs vergelijkend anatomischen weg het verschil in bouw van den schedel der beide nauwverwante soorten vasttestellen en te herleiden uit het verschil in levenswijze. De vraag naar de onderlinge verhouding der beide soorten en tot hun vermoedelijke stamvaderlijke vormen, die zich vervolgens voordoet, is eene drieledige en laat zich kort aldus stellen: „òf de haas is een gemodificeerd konijn, òf omgekeerd het konijn een gemodificeerde haas, òf eindelijk de beide soorten hebben zich ontwikkeld uit een gemeenschappelijken grondvorm, de organisatie waarvan het midden hield tusschen haas en konijn".

In tegenstelling met de uitkomsten van andere onderzoekers luidt het antwoord van den schrijver hierop: „dat het konijn een gemodificeerde haas is", evenwel met voorbehoud van een aantal voorwaarden en overwegingen, die hier geen plaats kunnen vinden.

De Heer VAN BEMMELEN is tot dit antwoord gekomen langs den weg eener vergelijkende craniologie van alle recente Leporiden, steunende op eigen onderzoek of op opgaven in de literatuur, waar hem het zeldzame materiaal ontbrak. Hij heeft daarbij steeds den vorm en den bouw der beenderen van den schedel of van onderdeelen van den schedel in verband gebracht met den invloed der levenswijze op die beenderen of deelen, met inachtneming van genealogische gezichtspunten. Daarbij werden dan ook andere belangrijke punten uit de organisatie der respectievelijke dieren niet uit het oog verloren.

Het geschrift van den Heer VAN BEMMELEN geeft dus veel meer, dan de titel doet vermoeden. De ondergeteekenden aarzelen dan ook niet aan te bevelen, dat de verhandeling van den Heer VAN BEMMELEN in de Verhandelingen der Akademie eene plaats vinde.

Zij veroorloven zich tevens in overweging te geven, dat het Bestuur der Afdeeling met den auteur in overleg trede ten aanzien der figuren. Voor het meerendeel zijn deze thans nog in een meer schetsmatigen vorm en nog niet geschikt voor reproduktie voor tekstfiguren. De auteur zal ze zonder bezwaar in den daarvoor gewenschten toestand kunnen brengen.

MAX WEBER.
BOLK.

Geophysica. — De Heer J. P. van der Stok biedt eene mededeeling aan: *Over frequenties der gemiddelde dagelijksche bewolking te Batavia.*

1. Sedert 1880 zijn door het Observatorium te Batavia uurwaarnemingen gepubliceerd van den graad der bewolking, op grond waarvan een duidelijk beeld van het voorkomen van dezen voor de

TABEL I. Frequenties der gemiddelde dagelijksche bewolking, waargenomen te Batavia 1880—1905.

Bewolking	Jan.	Febr.	Maart	April	Mei	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Som
0	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1
0.5	—	—	—	—	3	10	4	4	2	2	—	—	25
1	1	—	1	2	10	11	18	19	9	9	1	—	81
1.5	2	2	2	6	10	26	39	33	21	14	4	—	164
2	5	4	1	7	36	39	52	59	37	31	9	4	284
2.5	2	7	13	25	34	52	52	75	49	36	13	4	362
3	7	7	15	35	53	52	69	84	69	44	21	5	461
3.5	5	10	30	49	70	54	**78**	**85**	88	52	30	13	564
4	9	10	33	45	70	66	71	76	**89**	58	33	24	584
4.5	29	24	40	59	**80**	**68**	62	74	78	**84**	37	31	666
5	30	23	39	64	80	55	80	58	57	63	48	33	630
5.5	39	25	70	76	60	58	56	42	62	60	62	53	663
6	51	34	73	79	58	49	46	52	38	58	62	74	674
6.5	68	69	68	**88**	62	44	45	32	47	60	**79**	53	715
7	61	77	**93**	67	43	43	29	42	38	56	64	64	677
7.5	78	86	84	50	50	45	24	33	33	56	76	93	708
8	100	81	77	51	39	42	23	12	19	31	78	**102**	655
8.5	**101**	90	66	36	24	33	28	13	16	40	62	94	603
9	90	**94**	51	29	10	16	18	7	21	32	52	67	487
9.5	93	66	39	10	8	14	6	3	6	14	38	62	359
10	35	25	11	2	1	3	6	2	1	6	11	30	133
Som.	806	734	806	780	806	780	806	806	780	806	780	806	9496

kennis van een klimaat belangrijken factor in den vorm eener frequentietabel (Tabel I) kan worden gegeven.

Men ziet hieruit terstond dat, terwijl noordelijke klimaten gekenmerkt zijn door een groot aantal gevallen zoowel van volkomen bedekte lucht als van (vooral in April en September) volkomen helder uitspansel, deze uiterste waarden te Batavia tot de zeldzaamheden behooren.

Slechts éénmaal in de 26 jaren of op ± 9500 gevallen is een volkomen wolkelooze lucht gedurende een etmaal waargenomen en de gevallen van volkomen bedekte lucht bedragen, over het geheele jaar

TABEL II. Frequenties der gemiddelde dagelijksche bewolking te Batavia, 1880—1905

Bewolking	I Oost Moesson	II Kentering	III West-Moesson	I Oost Moesson	II Kentering	III West-Moesson	Nieuwe schaalwaarden
0	1	—	—	—	—	—	—1.0
0.5	23	2	—	6	1	—	—0.9
1	67	13	1	17	4	—	—0.8
1.5	134	26	4	34	8	2	—0.7
2	223	48	13	56	15	6	—0.6
2.5	262	87	13	66	27	6	—0.5
3	327	115	19	82	36	8	—0.4
3.5	**375**	161	28	**94**	51	12	—0.3
4	372	169	43	93	53	18	—0.2
4.5	362	220	84	91	69	36	—0.1
5	330	214	86	83	68	37	0.0
5.5	278	268	117	70	84	50	0.1
6	243	272	159	61	86	68	0.2
6.5	230	**295**	190	58	**93**	81	0.3
7	195	280	202	49	88	86	0.4
7.5	185	266	257	47	84	110	0.5
8	135	237	283	34	75	120	0.6
8.5	114	204	**285**	29	64	**121**	0.7
9	72	164	251	18	52	107	0 8
9.5	37	101	221	9	32	94	0.9
10	13	30	91	3	10	38	1.0
Totaal	3978	3172	2346	1000	1000	1000	

genomen, nog niet 1.5 °/₀ en zelfs in den vollen westmoesson weinig meer dan 4 °/₀.

Verder leert de Tabel I dat, niettegenstaande het groot getal waarnemingen, nog vrij groote onregelmatigheden in de maandreeksen te bespeuren zijn, en uit de jaarsommen blijkt duidelijk dat, waar men heeft te doen met frequentie-reeksen van verschillend karakter, de bijeenvoeging van deze ongelijksoortige grootheden niet geoorloofd is en tot de zonderlingste afwijkingen kan voeren, die geenszins door het grooter aantal worden opgewogen.

Ten einde deze onregelmatigheden te ontgaan zijn daarom drie groepen gevormd zooals in Tabel II is aangegeven; ook hierin komen, zooals bij teekening blijkt, nog toevallige afwijkingen voor, maar grootendeels zijn zij hieruit verdwenen en deze reeksen kunnen als goed materiaal voor de toepassing en toetsing van frequentie-formules worden beschouwd.

Ten einde de gegevens der Tabel II voor eene voorstelling in analytischen vorm geschikt te maken zijn nog twee veranderingen aan te brengen. In de eerste plaats moet de schaalwaarde worden gewijzigd, zoodanig dat de uiterste grenzen niet door 0 en 10, maar door ± 1 worden voorgesteld en dus de oorsprong der coördinaten in het midden tusschen de uiterste waarden wordt gelegd; dit geschiedt eenvoudig door de verschillende graden van bewolking te benoemen naar de schaal gegeven in de laatste kolom der Tabel II. In de tweede plaats moeten de frequenties voor de uiterste grenzen ± 1 van de rekening worden buitengesloten daar zij als kenmerkend voor afzonderlijke meteorologische toestanden moeten worden beschouwd, en ook omdat zij geenszins, als elke andere waarde, als gemiddelden tusschen de grenzen ± 1.05 en ± 0.95 begrepen kunnen worden opgevat.

Bij de berekening van de constanten der toegepaste frequentieformules zijn daarom die uiterste waarden ter zijde gesteld en de overige frequenties op nieuw op een totaal van 1000 berekend.

2. In de eerste plaats komt hiervoor in aanmerking de frequentieformule, bekend als Type I der formules van Pearson:

$$u = \mathfrak{A}\left(1 + \frac{x}{p}\right)^a \left(1 - \frac{x}{q}\right)^b$$

die, voor de gestelde voorwaarden en keuze van oorsprong, den eenvoudigen vorm:

$$u = \mathfrak{A}\,(1 + x)^a\,(1 - x)^b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

aanneemt; zij kan dus worden beschouwd als eene generaliseering

van de voorwaarde, dat de functie voor de uiterste grenzen verdwijnt. De constanten dezer formule kunnen worden berekend uit de volgende betrekkingen:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2^{a+b+1}} \frac{\Gamma(a+b+2)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

en

$$\frac{(\mu+1)^{(n)}}{(\mu+1)^{(n-1)}} = \frac{2\,(a+n)}{a+b+n+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

waarin onder $(\mu+1)^{(n)}$ wordt verstaan

$$\mu_n + n\,\mu_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2\,!}\,\mu_{n-2} + \text{enz.}$$

terwijl μ_n de gemiddelde van de n^{de} orde voorstelt. Daar, behalve de factor $\mathfrak{A}$, waardoor het oppervlak der kromme gelijk aan de eenheid wordt bepaald, in de formule (1) slechts twee de kromme kenmerkende constanten voorkomen, is het voldoende de gemiddelden der eerste en tweede orde, μ_1 en μ_2, te berekenen.

Stelt men

$$p = 1 - \mu_1, \quad q = \frac{1-\mu_2}{1+\mu_1},$$

dan

$$a+1 = \frac{(2-p)q}{2\,(p-q)}, \quad b+1 = \frac{p\,q}{2\,(p-q)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Deze formule in gesloten vorm biedt het voordeel aan dat, als de constanten a en b bekend zijn, de ligging van de maximum-waarde der functie gemakkelijk is aan te geven; men vindt daarvoor:

$$x_m = \frac{a-b}{a+b},$$

In de tweede plaats komt in aanmerking de uitdrukking in reeksvorm door den schrijver gegeven in eene vroegere publicatie, die als eene gegeneraliseerde en voor de gestelde voorwaarde pasklaar gemaakte bolfunctie kan worden opgevat: zij luidt:

$$u = \Sigma\, A'_n\, R_{n+2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$R_{n+2} = (x^2-1)\,R'_n = (x^2-1)\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2.(2n+1)}\,x^{n-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1\,(n-2)\,(n-3)}{2.4.(2n+1)\,(2n-1)}\,x^{n-4} - \text{enz.}\right]$$

$$A'_n = \beta\left[\mu_n - \frac{n(n-1)}{2.(2n+1)}\mu_{n-2} + \frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2\,.\,4\,.\,(2n+1)\,(2n-1)}\mu_{n-4} - \text{enz.}\right]. \quad (6)$$

---

[1]) Deze Verslagen XVI (825—843).

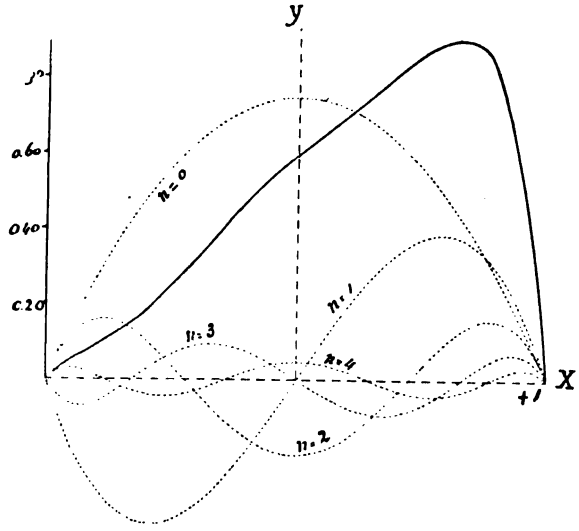
$$\beta = -\frac{(2n+3)\ (2n+1)!\ (2n+1)!}{2^{2n+1}\ (n+2)!\ n!\ n!\ n!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$\mu_n = \int_{-1}^{+1} u x^n dx.$$

Bij gebruik van deze formule in reeksvorm is het mogelijk meer dan twee constanten in te voeren, 't geen vooral hier een voordeel is omdat, bij dezen vorm der frequenties, de gemiddelden van hoogere orde steeds kleiner worden, zoodat de convergentie verzekerd is. De maximumwaarde der functie kan echter niet, als bij gesloten vorm, gemakkelijk worden berekend; deze moet door benadering worden gezocht. Numerieke waarden der functie R_{n+2} voor de waarden $n = 0$ tot $n = 4$ zijn gegeven in Tabel X; alleen voor den eersten term, die voor alle krommen dezelfde blijft, is $A_0 R_2$ berekend in plaats van R_2. De hierbij gevoegde teekening geeft eene voorstelling van de wijze waarop de kromme (volle lijn) uit de vijf componenten (gestreepte lijn) is opgebouwd voor

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1,$$

in welk geval eenvoudig de som van de 5 kolommen der Tabel X kan worden genomen.



3. De volgende constanten der besproken formules zijn berekend uit de gegevens der Tabel II, 2de gedeelte, met weglating der frequenties voor de bewolking $+1.0$ en herleiding tot de som van 1000 der resteerende getallen. Om hieronder te vermelden redenen

zijn de hier gegeven A_n constanten niet geheel en al overeenkomstig de uitdrukking (6), maar omgekeerd van teeken en gedeeld door $n + 3$, zoodat

$$(n + 3) A_n = - A'_n$$

I. Oost-Moesson.

$\mu_1 = -0.0554$	$A_1 = -0.0519$	$\mathfrak{A} = 0.8416$
$\mu_2 = +0.1690$	$A_2 = -0.1017$	$a = 1.3654$
$\mu_3 = -0.0095$	$A_3 = +0.1631$	$b = 1.6428$
$\mu_4 = +0.0631$	$A_4 = -0.0650$	

II. Kentering.

$\mu_1 = 0.2136$	$A_1 = +0.2003$	$\mathfrak{A} = 0.7486$
$\mu_2 = 0.1999$	$A_2 = -0.0003$	$a = 2.1470$
$\mu_3 = 0.0921$	$A_3 = +0.0069$	$b = 1.0393$
$\mu_4 = 0.0859$	$A_4 = +0.0081$	

III. West-Moesson.

$\mu_1 = 0.4545$	$A_1 = +0.4261$	$\mathfrak{A} = 0.4326$
$\mu_2 = 0.3191$	$A_2 = +0.3901$	$a = 3.4001$
$\mu_3 = 0.2173$	$A_3 = +0.2584$	$b = 0.6502$
$\mu_4 = 0.1683$	$A_4 = +0.1299$	

In de constanten van beide formules treden dus de verschillen in de frequentie-krommen duidelijk sprekend op den voorgrond.

4. Ten einde te onderzoeken in hoeverre de aldus berekende frequentie-formules tot overeenstemming leiden met de gegevens heeft men die formules te integreeren tusschen de grenzen x en -1.

Voor de formule in reeksvorm levert dit geen bezwaar op: uit de voor R_{n+2} geldende differentiaalvergelijking:

$$(x^2 - 1) \frac{d^2 R_{n+2}}{dx^2} = (n + 2)(n + 1) R_{n+2}$$

vindt men gemakkelijk dat

$$I'_n = \int_{-1}^{x} R_{n+2}\, dx = \frac{(x^2-1)^2}{n+3} \cdot \frac{1}{n} \frac{dR'_n}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

waaruit, met behulp van den bekenden vorm der functie R'_n, de voor ons geval noodige waarden zijn af te leiden; de uitdrukking (8) geldt voor alle waarden van n behalve $n = 0$ waarvoor:

$$I'_0 = \frac{x^3 - 3x - 2}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Ten einde met gelijksoortige grootheden te kunnen rekenen, en omdat bij berekening volgens (6) de A-coëfficienten betrekkelijk groot

en de waarden afgeleid uit (8) klein worden, scheen het wenschelijk in de uitdrukkingen (8) en (9) $(n+3)$ in den noemer weg te laten en daarentegen de uitdrukking voor A_n door $(n+3)$ te deelen, terwijl tevens het teeken van β en dus ook van (8) en (9) kan worden omgekeerd.

Onder dien verstande nemen de te berekenen integralen den vorm aan:

$$\left.\begin{aligned} I_0 &= x(1-x^2)+2(1+x) \\ I_1 &= -(1-x)^2 \\ I_2 &= I_1 x \\ I_3 &= I_1\left(x^2-\frac{1}{7}\right) \\ I_4 &= I_1 x\left(x^2-\frac{1}{3}\right) = I_2\left(x^2-\frac{1}{3}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (10)$$

In Tabel IX vindt men deze uitdrukkingen, berekend voor waarden van x opklimmende met 0.05; in de eerste kolom, die voor alle krommen dezelfde blijft, is terstond in plaats van I_0 gegeven het product $A_0 I_0$.

Minder gemakkelijk is de integratie, binnen deze grenzen, der frequentie-formule (1), die door te stellen:

$$x = 2z - 1$$

na ontwikkeling leidt tot den vorm:

$$\int_{-1}^{x} u\,dx = 2^{a+b+1}\,\mathfrak{A}\left[\frac{z^{a+1}}{a+1} - b\frac{z^{a+2}}{a+2} + \frac{b(b-1)}{2!}\frac{z^{a+3}}{a+3} - \text{enz.}\right]$$

Het is duidelijk dat, voor groote waarden van z, de convergentie dezer reeks zwak is, zoodat een aanzienlijk aantal termen moet worden gebezigd om, als in ons geval noodig is, tot de derde decimaal nauwkeurig te rekenen.

Andere vormen van ontwikkeling zijn natuurlijk mogelijk, maar het is mij niet gelukt voordeeliger uitdrukkingen te vinden.

5. Daar het, met het oog op deze bezwaren, wenschelijk was de vrij uitvoerige berekeningen voor de toetsing der formules te beperken, zijn in Tabel III de frequenties voor grootere intervallen der bewolking gevormd en tevens, in het tweede gedeelte der tabel, de verhoudingsgetallen op nieuw berekend met weglating der frequenties 8, 10 en 38 van den bewolkingsgraad 10. Het zijn dus de frequenties der drie laatste kolommen waaraan de resultaten der berekening moeten worden getoetst.

TABEL III.

	I	II	III	I	II	III
—1.00 tot —0.75	23	5	0	23	5	0
—0.75 „ —0.55	90	23	8	90	23	8
—0.55 „ —0.35	148	63	14	149	64	15
—0.35 „ —0.15	187	104	30	188	105	31
—0.15 „ 0.05	174	137	73	175	138	76
0.05 „ 0.25	131	170	118	131	172	123
0.25 „ 0.45	107	181	167	107	183	174
0.45 „ 0 65	81	159	230	81	161	239
0.65 „ 0.85	47	116	228	47	117	237
0.85 „ 1.00	12	42	132	9	32	97

In de tabellen IV vindt men het resultaat der berekening op grond der formule in recksvorm.

TABEL IV. I. Oost-Moesson.

	A_1I_1	A_2I_2	A_3I_3	A_4I_4	A_0I_0 + som
—1 00 tot —0 75	0.0099	—0.0146	—0.0131	—0.0021	0.0231
—0.75 „ —0.55	0.0153	—0.0126	0.0004	0.0026	0.0917
—0.55 „ —0.35	0.0147	—0.0002	0.0151	0 0032	0.1520
—0.35 „ —0.15	0.0096	0.0128	0.0164	—0.0008	0.1781
—0.15 „ +0.05	0.0021	0.0196	0.0040	—0.0010	0.1708
+0 05 „ +0.25	—0.0060	0.0173	—0.0113	—0.0028	0.1433
+0.25 „ +0.45	—0.0126	0.0068	—0.0177	0.0015	0.1091
+0.45 „ +0.65	—0.0157	—0.0071	—0.0090	0.0037	0.0760
+0.65 „ +0 85	—0.0133	—0.0154	0.0079	0.0004	0.0447
+0.85 „ +1.00	—0.0040	—0.0067	0.0073	—0.0017	0 0109

TABEL IV. II. Kentering.

	A_1I_1	A_2I_2	A_3I_3	A_4I_4	A_0I_0 + som
—1.00 tot —0.75	—0.0383	0.0000	—0 0006	0.0003	0.0044
—0.75 „ —0.55	—0.0591	0.0000	0.0000	—0.0003	0.0267
—0.55 „ —0.35	—0.0568	0.0000	0.0006	—0.0004	0.0625
—0.35 „ —0.15	—0.0372	0.0000	0.0007	0.0001	0.1037
—0.15 „ +0.05	—0.0079	0.0001	0.0002	0.0005	0.1420
+0.05 „ +0.25	0.0233	0.0001	—0.0005	0.0003	0.1693
+0.25 „ +0.45	0.0487	0.0000	—0.0007	—0.0002	0.1789
+0.45 „ +0.65	0.0606	0.0000	—0.0001	—0.0005	0.1638
+0.65 „ +0 85	0.0514	0.0000	0.0003	0.0000	0.1168
+0.85 „ +1.00	0.0154	0.0000	0.0003	0.0002	0.0319

TABEL IV. III. West-Moesson.

	A_1I_1	A_2I_2	A_3I_3	A_4I_4	A_0I_0 + som
—1.00 tot —0.75	—0.0816	0 0561	—0.0208	0.0043	0.0010
—0.75 „ —0.55	—0.1257	0.0484	0.0007	—0.0053	0.0042
—0.55 „ - 0.35	—0.1208	0.0007	0.0241	—0.0063	0.0168
—0.35 „ —0.15	—0.0790	—0.0493	0.0257	0.0016	0.0391
—0.15 „ +0.05	—0.0168	—0.0754	0.0064	0.0079	0.0712
+0.05 „ +0.25	0.0495	—0.0664	—0.0179	0.0056	0.1169
+0.25 „ +0.45	0.1035	—0.0260	—0.0281	—0 0029	0.1776
+0.45 „ +0.65	0.1289	0 0271	—0.0143	—0.0074	0.2384
+0.65 „ +0.85	0.1093	0.0591	0 0126	—0.0008	0.2453
+0.85 „ +1.00	0.0328	0.0256	0.0115	0.0033	0.0892

Hieruit blijkt in welke mate de verschillende coëfficiënten bijdragen tot den opbouw der krommen.

Tabel V geeft de verschillen van de resultaten der waarneming W (Tabel III 2de gedeelte) en der berekening B (Tabel IV laatste kolom), afgerond tot eenheden van de derde decimaal.

TABEL V. $y = W - B$, formule in reeksvorm.

	I. Oost-Moesson	II. Kentering	III. West-Moesson.
—1.00 tot —0.75	0	1	—1
—0.75 „ —0 55	-2	—4	4
—0.55 „ —0.35	—3	1	—2
—0.35 „ —0.15	10	1	—8
—0.15 „ 0.05	4	—4	5
0.05 „ 0.25	—12	3	6
0.25 „ 0 45	—2	4	—4
0.45 „ 0.65	5	—3	1
0 65 „ 0.85	2	0	—8
0.85 „ 1.00	—2	0	8
$\sqrt{\frac{\Delta^2}{n}}$	5 57	2 63	5.39

Op grond der componenten van de analyse in Tabel IV gegeven kan nu terstond een oordeel worden gevormd omtrent de waarschijnlijkheid, dat ook de formule (1) van PEARSON met de resultaten der waarneming in overeenstemming zal zijn.

Uit Tabel IV toch blijkt, dat de kentering-kromme de eenvoudigste is en feitelijk met behulp van slechts één constante A_1 kan worden voorgesteld; het laat zich dus verwachten dat PEARSON's formule, waarin twee de kromme kenmerkende constanten voorkomen, een even goede overeenstemming zal geven als de formule in reeksvorm. Eveneens zal ook de berekende plaats van het maximum met de waarneming overeenstemmen.

In de samenstelling der krommen voor Oost- en West-Moesson echter spelen vooral de A_3 coëfficiënten een aanmerkelijke rol en de formule (1) zal dus alleen dan tot bevredigende resultaten leiden indien de gemiddelde der derde orde, μ_3, berekend uit de coëfficiënten a en b volgens (3), overeenstemmen met de werkelijk gevonden waarden; ook de invloed van μ_4 zal zich, schoon in mindere mate, doen gelden.

Het resultaat dezer berekening is als volgt:

	waargen.	berekend uit (3)	waargen.	berekend uit (3)
Oost-Moesson	$\mu_3 = -0.0095$	—0.0225	$\mu_4 = 0.0631$	0.0641
Kentering	„ = 0.0921	0.0902	„ = 0.0859	0.0856
West-Moesson	„ = 0.2173	0.3219	„ = 0.1683	0.1917

Hieruit kan worden afgeleid, dat voor de kentering de formule van PEARSON in zeer goede overeenstemming zal zijn met de gegevens; voor den West-Moesson is eene bevredigende uitkomst te verwachten, voor den Oost-Moesson een minder goede.

TABEL VI. $\Delta = W - B$, formule Pearson.

	I Oost-Moesson	II Kentering	III West-Moesson
—1.00 tot —0.75	—13	— 1	0
—0.75 „ —0.55	— 1	— 4	4
—0.55 „ —0.35	12	3	0
—0.35 „ —0.15	25	3	7
—0.15 „ 0.05	6	— 2	0
0.05 „ 0.25	—25	2	— 2
0.25 „ 0.45	—18	2	— 7
0.45 „ 0.65	— 1	— 5	12
0.65 „ 0.85	10	1	4
0.85 „ 1.00	5	1	— 4
$\sqrt{\frac{\Delta^2}{n}}$	14.32	2.72	5.42

De verschillen, in Tabel VI gegeven, bevestigen deze verwachting evenzeer als de berekening van de plaats der maximum-waarden.

Plaats der maximum-waarden.

	Waargen. Tabel II.	Berekend form. PEARSON	Berekend formule reeksvorm.
Oost-Moesson	—0.25	—0.09	—0.20
Kentering	0.30	0.35	0.35
West-Moesson	0.65	0.90	0.65

Slechts in bijzondere gevallen zal derhalve, bij gebruik eener frequentie-formule met twee constanten, eene bevredigende uitkomst worden verkregen. Bovendien zal het feit, dat in form. (7) beide constanten optreden in exponentieelen vorm, eene berekening van tabellen als IX en X, met wier hulp alle berekeningen zonder moeite geschieden, zoo goed als onmogelijk maken, daar p en q alle mogelijke waarden aannemen en de combinaties dier grootheden in oneindig grooten getale kunnen voorkomen.

Ten slotte worden in de Tabellen VII en VIII de constanten der beide formules gegeven, berekend voor de maandelijksche gegevens der Tabel I met weglating der uiterste waarden; de vierde term is hierbij, wegens het gering aantal frequenties en de daaruit voortvloeiende belangrijke onregelmatigheden, buiten rekening gelaten.

TABEL VII.
Constanten der formule in reeksvorm.

	A_1	A_2	A_3
Januari	0.4293	0.4118	0.3514
Februari	0.4247	0.3957	0.2653
Maart	0.2962	0.0847	—0.0207
April	0.1481	—001385	—0.0792
Mei	0.0114	—0.1572	0.0609
Juni	—0.0003	—0.1939	0.0988
Juli	—0.0672	—0.0758	0.1769
Augustus	—0.1330	—0.1093	0.2607
September	—0.0548	—0.1509	0.2963
October	0.0724	—0.0735	0.0885
November	0.2747	0.0961	0.0425
December	0.3795	0.2530	0.1355

TABEL VIII.
Constanten der formule Pearson, Type I.

	$\mathfrak{A}$	a	b
Januari	0.420	3.242	0.577
Februari	0.436	3.278	0.611
Maart	0.656	3.041	1.101
April	0.880	2.671	1.670
Mei	0.922	1.824	1.756
Juni	0.924	2.049	2.050
Juli	0.798	1.225	1.568
Augustus	0.831	1.439	2.246
September	0.894	1.645	1.974
October	0.813	1.573	1.204
November	0.664	2.475	0.900
December	0.534	3.484	0.900

TABEL IX. Waarden van I_n.

x	$A_0 I_0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
—1.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
—0.95	0.0018	—0.0095	0.0090	—0.0072	0.0051
—0.90	0.0073	—0.0361	0.0325	—0.0241	0.0155
—0.85	0.0160	—0.0770	0.0655	—0.0446	0.0255
—0.80	0.0280	—0.1296	0.1037	—0.0644	0.0318
—0.75	0.0430	—0.1914	0.1436	—0.0803	0.0329
—0.70	0.0608	—0.2601	0.1821	—0.0903	0.0285
—0.65	0.0812	—0.3335	0.2168	—0.0933	0.0193
—0.60	0.1040	—0.4096	0.2458	—0.0889	0.0066
—0.55	0.1291	—0.4865	0.2676	—0.0777	—0.0082
—0.50	0.1563	—0.5625	0.2813	—0.0602	—0.0234
—0.45	0.1853	—0.6360	0.2862	—0.0379	—0.0374
—0.40	0.2160	—0.7056	0.2822	—0.0121	—0.0489
—0.35	0.2482	—0.7700	0.2695	0.0147	—0.0568
—0.30	0.2818	—0.8281	0.2484	0.0438	—0.0604
—0.25	0.3164	—0.8789	0.2197	0.0707	—0.0595
—0.20	0.3520	—0.9216	0.1843	0.0948	—0.0541
—0.15	0.3884	—0.9555	0.1433	0.1150	—0.0445
—0.10	0.4253	—0.9801	0.0980	0.1303	—0.0317
—0.05	0.4625	—0.9950	0.0498	0.1397	—0.0165
0.00	0.5000	—1.0000	0.0000	0.1429	0.0000
0.05	0.5375	—0.9950	—0.0498	0.1397	0.0165
0.10	0.5748	—0.9801	—0.0980	0.1303	0.0317
0.15	0.6117	—0.9555	—0.1433	0.1150	0.0445
0.20	0.6480	—0.9216	—0.1843	0.0948	0.0541
0.25	0.6836	—0.8789	—0.2197	0.0707	0.0595
0.30	0.7183	—0.8281	—0.2485	0.0438	0.0604
0.35	0.7518	—0.7700	—0.2695	0.0147	0.0568
0.40	0.7840	—0.7056	—0.2822	—0.0121	0.0489
0.45	0.8147	—0.6360	—0.2862	—0.0379	0.0374
0.50	0.8438	—0.5625	—0.2813	—0.0602	0.0234
0.55	0.8709	—0.4865	—0.2676	—0.0777	0.0082
0.60	0.8960	—0.4096	—0.2458	—0.0889	—0.0066
0.65	0.9189	—0.3335	—0.2168	—0.0933	—0.0193
0.70	0.9393	—0.2601	—0.1821	—0.0903	—0.0285
0.75	0.9570	—0.1914	—0.1436	—0.0803	—0.0329
0.80	0.9720	—0.1296	—0.1037	—0.0644	—0.0318
0.85	0.9840	—0.0770	—0.0655	—0.0446	—0.0255
0.90	0.9928	—0.0361	—0.0325	—0.0241	—0.0155
0.95	0.9982	—0.0095	—0.0090	—0.0072	—0.0051
1.00	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TABEL X. Waarden der functie R_{n+2}.

x	A_2R_2	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
1.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
—0.95	0.0731	—0.0926	0.0685	—0.0439	0.0254
—0.90	0.1425	—0.1710	0.1159	—0.0652	0.0311
—0.85	0.2081	—0.2359	0.1450	—0.0693	0.0244
—0.80	0.2700	—0.2880	0.1584	—0.0609	0.0110
—0.75	0.3281	—0.3281	0.1586	—0.0439	—0.0048
—0.70	0.3825	—0.3570	0.1479	—0.0219	—0.0199
—0.65	0.4331	—0.3754	0.1285	0.0023	—0.0321
—0.60	0.4800	—0.3840	0.1024	0.0263	—0.0402
—0.55	0.5231	—0.3836	0.0715	0.0484	—0.0436
—0.50	0.5625	—0.3750	0.0375	0.0670	—0.0424
—0.45	0.5981	—0.3589	0.0020	0.0811	—0.0370
—0.40	0.6300	—0.3360	—0.0336	0.0902	—0.0281
—0.35	0.6581	—0.3071	—0.0680	0.0940	—0.0167
—0.30	0.6825	—0.2730	—0.1001	0.0924	—0.0039
—0.25	0.7031	—0.2344	—0.1289	0.0858	0.0092
—0.20	0.7200	—0.1920	—0.1536	0.0746	0.0217
—0.15	0.7331	—0.1466	—0.1735	0.0595	0.0324
—0.10	0.7425	—0.0990	—0.1881	0.0414	0.0406
—0.05	0.7481	—0.0499	—0.1970	0.0213	0.0458
0.00	0.7500	0.0000	—0.2000	0.0000	0.0476
0.05	0.7481	0.0499	—0.1970	—0.0213	0.0458
0.10	0.7425	0.0990	—0.1881	—0.0414	0.0406
0.15	0.7331	0.1467	—0.1735	—0.0595	0.0324
0.20	0.7200	0.1920	—0.1536	—0.0746	0.0217
0.25	0.7031	0.2344	—0.1289	—0.0858	0.0092
0.30	0.6825	0.2730	—0.1001	—0.0924	—0.0039
0.35	0.6581	0.3071	—0.0680	—0.0940	—0.0167
0.40	0.6300	0.3360	—0.0336	—0.0902	—0.0281
0.45	0.5981	0.3589	0.0020	—0.0811	—0.0370
0.50	0.5625	0.3750	0.0375	—0.0670	—0.0424
0.55	0.5231	0.3836	0.0715	—0.0484	—0.0436
0.60	0.4800	0.3840	0.1024	—0.0263	—0.0402
0.65	0.4331	0.3754	0.1285	—0.0023	—0.0321
0.70	0.3825	0.3570	0.1479	0.0219	—0.0199
0.75	0.3281	0.3281	0.1586	0.0439	—0.0048
0.80	0.2700	0.2880	0.1584	0.0609	0.0110
0.85	0.2081	0.2359	0.1450	0.0693	0.0244
0.90	0.1425	0.1710	0.1159	0.0652	0.0311
0.95	0.0731	0.0926	0.0685	0.0439	0.0254
1.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt eene mededeeling aan: „*Over vierdimensionale netten en hun ruimtedoorsneden*". (Derde gedeelte).

Het net C_{16}.

1. In het eerste gedeelte van dit onderzoek is ons gebleken, dat het net (C_{16}) van cellen $C_{16}^{(2\sqrt{2})}$ opgebouwd is uit drie even sterk ontwikkelde groepen van gelijkstandige cellen $C_{16}^{(2\sqrt{2})}$, *één* groep van *rechtopstaande* cellen $C_{16}^{(2\sqrt{2})}$, polair ingeschreven in achtcellen $C_8^{(4)}$, en *twee* groepen van *hellende* cellen $C_{16}^{'(2\sqrt{2})}$ en $C_{16}^{''(2\sqrt{2})}$, lichamelijk ingeschreven in achtcellen $C_8^{(2)}$, de *positieve* groep en de *negatieve*. Beperken we ons, wat dit net aangaat, weer tot de doorsneden met ruimten loodrecht op een der vier verschillende assen van een der zestiencellen, dan volgt — in verband met de gelijkwaardigheid van de drie celgroepen van het net — uit de in de eerste mededeeling ontwikkelde tabel der assenbetrekkingen, dat men zich tot drie reeksen van evenwijdige snijruimten bepalen kan, nl. tot die loodrecht op een der assen OR_8, OF_8, OK_8 van een der omschreven achtcellen. In deze drie met de regels vijf, vier, drie der aangehaalde tabel overeenkomende gevallen toch vindt men voor de rechtopstaande zestiencellen reeksen van ruimten loodrecht op OE_{16}, OK_{16}, OF_{16}, terwijl het eerste der drie gevallen voor de hellende zestiencellen ruimten loodrecht op OR_{16} oplevert. In het geheel hebben we dus drie verschillende zich met het evenwijdig verplaatsen der snijruimte vervormende ruimtevullingen te doen kennen. Willen we dit doen, dan kunnen we echter niet volstaan met de beschouwing der vier reeksen van snijruimten achtereenvolgens loodrecht op een as OE_{16}, OK_{16}, OF_{16}, OR_{16}; want de bij het laatste der drie bovengenoemde gevallen optredende ruimten loodrecht op OK_8 staan niet loodrecht op een der vier assen van de *hellende* zestiencellen, maar op de lijn, die het middelpunt van een dier cellen verbindt met het punt, dat ten opzichte van het coördinatenstelsel der vier assen OE_{16} dier hellende cel de coördinaten (3, 1, 1, 1) heeft. We hebben dus in het geheel met vijf reeksen van evenwijdige snijruimten te doen, die gevoegelijk door de symbolen (1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (3, 1, 1, 1) aangeduid kunnen worden, wijl ze telkens loodrecht staan op de middellijn der cel gaande door het punt, waarvan deze symbolen met betrekking tot de assen OE_{16} der cel de coördinatenviertallen aangeven.

2. Even als we dit in de tweede mededeeling voor de zes reeksen van evenwijdige doorsneden der achtcel gedaan hebben, geven we ook hier de uitkomsten, waartoe de bepaling der doorsnee met één $C_{16}^{(2\sqrt{2})}$ voert, op twee wijzen aan. Zoo geeft een eerste plaat weer de projecties der grenselementen van de zestiencel op de middellijn loodrecht op de snijruimten aan, wat ons in staat stelt de doorsneden tabellarisch af te lezen, terwijl een tweede plaat ons weer de doorsneden zelf in evenwijdige perspectief levert, besloten in de doorsneden met de polair of lichamelijk omgeschreven achtcel $C_8^{(4)}$ of $C_8^{(2)}$. Ten overvloede zal nu een derde plaat twee groepen van figuren bevatten, waarvan de eerste het inzicht in de wijze van afleiding der op plaat I gegeven projecties verhoogen kan en de tweede in verband staat met de bij het snijden van het net (C_{16}) optredende ruimtevullingen. Om het overzicht over deze ruimtevullingen gemakkelijker te maken, wijken we hier af van den in de tweede mededeeling gevolgden weg en behandelen we deze min of meer regelmatige driedimensionale netten gezamenlijk in plaats van dit telkens bij elk der drie reeksen van ruimten afzonderlijk te doen.

We bespreken nu eerst de vier figuren der eerste groep van plaat III, die de afleiding der projecties van plaat I beheerschen. In fig. 1 is nog eens aangegeven, hoe de alleen door haar hoekpunten aangeduide hellende cel $C_{16}^{(2\sqrt{2})}$ beschreven is in de $C_8^{(2)}$. Noemt men de vier hoekpunten van een der zestien grenslichamen A, B, C, D, de overstaande hoekpunten A', B', C', D', dan zijn

		$A'B'CD$		
	$A'BCD$	$A'BC'D$	$AB'C'D'$	
	$AB'CD$	$A'BCD'$	$A'BC'D'$	
$ABCD$	$ABC'D$	$AB'C'D$	$A'B'CD'$	$A'B'C'D'$
	$ABCD'$	$AB'CD'$	$A'B'C'D$	
		$ABC'D'$		

de zestien grensviervlakken; van deze vijf groepen van 1, 4, 6, 4, 1 viervlakken zijn die van de eerste, derde en vijfde groep in de acht grenskuben der achtcel beschreven, terwijl de vier hoekpunten van elk der viervlakken van de tweede en vierde groep zich met betrekking tot elk paar overstaande grenskuben der achtcel steeds splitsen in één hoekpunt en drie hoekpunten.

Met betrekking tot het reeds in de eerste mededeeling gebruikte

coördinatenstelsel $O(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ van de vier diagonalen AA', BB', CC', DD' kenmerken zich de vijf reeksen van evenwijdige doorsneden door de boven reeds aangevoerde symbolen (1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (3, 1, 1, 1), waaruit afgeleid kan worden, dat het achttal hoekpunten der zestiencel zich in die vijf gevallen in de groepen (1, 6, 1), (2, 4, 2), (3, 2, 3), (4, 4), (1, 3, 3, 1) op de as van projectie projecteert. Van deze vijf gevallen zijn het eerste en het vierde uit zich zelf duidelijk, zoodat de gedeelten der eerste plaat, die de opschriften (1, 0, 0, 0) OE_{16} en (1, 1, 1, 1) OR_{16} dragen, onmiddellijk begrepen kunnen worden. Tot opheldering der drie andere gevallen dienen de drie volgende figuren; deze figuren hebben dit gemeenschappelijk, dat de acht hoekpunten van de zestiencel verkregen zijn door uit te gaan van den kubus, dien men vindt door de achtcel van fig. 1 te snijden door de middelruimte loodrecht op AA'', daarna de hoekpunten van dezen kubus te verdeelen in de hoekpunten der twee lichamelijk ingeschreven viervlakken en eindelijk op de dragende ruimte van den kubus loodlijnen op te richten — d. i. in de perspectivische vlakke afbeelding lijnen evenwijdig aan AA'' te trekken — ter halve lengte van AA'' en wel in de hoekpunten van het eene viervlak naar de eene, in die van het andere viervlak naar de tegenovergestelde zijde. Deze afbeelding van den kubus met de twee puntenviertallen $ABCD$, $A'B'C'D'$ nu is ter verkrijging van de drie nieuwe figuren, die we aanstonds afzonderlijk gaan bespreken, in drie standen herhaald, verkregen door een verplaatsing over telkens gelijke afstanden evenwijdig aan zich zelf van links naar rechts en van boven naar beneden.

In fig. 2 zijn de acht hoekpunten der zestiencel geprojecteerd op de lijn $F_8F'_8$, die de middens van twee overstaande ribben van den kubus verbindt en dus in de achtcel een as OF_8 vormt; op deze as projecteeren zich de punten A, B in F_8, de punten C, D, C', D' in O, de punten A', B' in F'_8. Wijl F_8 het midden van AB is, vinden we hier terug, dat de as OF_8 van de achtcel tevens een as OK_{16} van de lichamelijk ingeschreven zestiencel is, en lezen we nu uit de projectie (2, 4, 2) der hoekpunten onmiddellijk het verder onder het hoofd (1, 1, 0, 0) OK_{16} op plaat I opgegevene af.

In fig. 3 heeft men de middelpunten F_{16}, F'_{16} van de overstaande zijvlakken ABC, $A'B'C'$ bepaald en de deze punten verbindende as OF_{16} tot as van projectie aangenomen. Daarbij projecteeren zich dan de drie punten A, B, C in F_{16}, de twee punten D, D' in O, de drie punten A', B', C' in F'_{16}. Uit deze projectie (3, 2, 3) volgt dan weer het onder het hoofd (1, 1, 1, 0) OF_{16} op plaat I opgegevene.

In fig. 4 is de diagonaal $D''D'''$ van den kubus, die voor de

achtcel een as OK_8 vormt, de as van projectie. De projectie der acht hoekpunten van de zestiencel op deze lijn $D''D'''$ wordt het gemakkelijkst gevonden door deze punten eerst te projecteeren op de ruimte van den kubus met $D''D'''$ tot diagonaal en dit daarna de acht verkregen projecties op de lijn $D''D'''$ te doen. Immers, de projecties der acht hoekpunten van de zestiencel op de ruimte van den kubus zijn de hoekpunten van den kubus en deze projecteeren zich op $D''D'''$, als P en P' deze lijn in drie gelijke deelen verdeelen, volgens het schema (1, 3, 3, 1) in de punten D'', P, P', D'''. Uit de zoo verkregen projectie (1, 3, 3, 1) der hoekpunten leidt men dan onmiddellijk weer het onder (3, 1, 1, 1) OK_8 op plaat I opgegevene af.

In elk der vijf behandelde gevallen is onder het opschrift „type" de wijze herhaald, waarop zich de vier paren overstaande hoekpunten der achtcel op de aangenomen as projecteeren.

3. We gaan thans over tot de beschrijving der op de tweede plaat in evenwijdige perspectief voorgestelde doorsneden, van de rechtopstaande $C_{16}^{(2\sqrt{2})}$ en de haar omgeschreven $C_8^{(4)}$ ter eene en van de hellende $C'^{(2\sqrt{2})}_{16}$ en $C'''^{(2\sqrt{2})}_{16}$ en de haar omgeschreven $C_8^{(2)}$ ter andere zij. Terwijl de doorsneden der C_{16} onmiddellijk worden afgeleid uit de tabellen der eerste plaat, zijn die der omgeschreven cellen $C_8^{(4)}$ en $C_8^{(2)}$ aan de tweede plaat der vorige mededeeling ontleend.

Door drie dikke vertikale strepen is *deze* tweede plaat verdeeld in drie gedeelten, achtereenvolgens betrekking hebbende op doorsneden loodrecht op OR_8, loodrecht op OF_8, loodrecht op OK_8. Elk dezer drie deelen is verder door een dunne vertikale streep in twee kolommen verdeeld; van deze bevat de linksche steeds drie doorsneden met rechtopstaande, de rechtsche vijf of meer doorsneden met hellende zestiencellen. We beschouwen thans elk der op deze wijs ontstane zes kolommen afzonderlijk.

Doorsneden loodrecht op OR_8.

a. *Rechtopstaande cellen.* Dit geval is het eenvoudigste van alle. Verschuift de op de as OE_{16} van $C_{16}^{(2\sqrt{2})}$ loodrecht staande snijruimte zich zoodanig evenwijdig aan zich zelf, dat het snijpunt met die as zich van het eene der twee op de as gelegen hoekpunten naar het andere verplaatst, dan blijft de doorsnee met de omgeschreven $C_8^{(4)}$ een kubus met de ribbe vier en vergroot zich de doorsnee met de

ingeschreven $C_{16}^{(2\sqrt{2})}$, die steeds een regelmatig achtvlak is, van een punt — het middelpunt van den kubus — tot het ingeschreven achtvlak met een ribbe $2\sqrt{2}$ om vervolgens weer tot een punt af te nemen. Van de drie figuren geeft de middelste den tusschenstand aan, waarbij de ribbe van het octaeder $\sqrt{2}$ is.

b. *Hellende cellen.* Doorloopt het snijpunt van de loodrecht op de as OR_{16} van $C_{16}^{(2\sqrt{2})}$ staande snijruimte met deze as de geheele as, dan blijft de doorsnee met de lichamelijk omgeschreven $C_8^{(2)}$ een kubus met de ribbe twee en vervormt zich de doorsnee met de ingeschreven $C_{16}^{(2\sqrt{2})}$, die in het algemeen een aan hoekpunten en ribben afgeknot viervlak is, van een rechts tot een links ingeschreven tetraeder op de wijze als dit in de vijf figuren is aangegeven. In de middelste van deze heeft men met het gelijkhoekpuntige halfregelmatige lichaam te doen, dat de combinatie is van kubus en achtvlak in evenwicht, terwijl de door de tweede en vierde figuur voorgestelde lichamen doen zien, hoe deze combinatie uit het rechtsche viervlak ontstaat om vervolgens in het linksche over te gaan [1]).

Doorsneden loodrecht op OF_8.

a. *Rechtopstaande cellen.* Hier treedt een verschil op, wat de breuk aangaat, die de plaats der snijruimte bepaalt, naarmate men de lijn door O loodrecht op de snijruimte als een as OK_{16} van de ingeschreven $C_{16}^{(2\sqrt{2})}$ dan wel als een as OF_8 van de omgeschreven $C_8^{(4)}$ beschouwt. Daarom zijn bij elk der drie hier optredende figuren twee breuken aangegeven, en wel onder rechts de op OK_{16}, boven links de op OF_8 betrekking hebbende. Doorloopt het snijpunt der snijruimte met de as OF_8 van $C_8^{(4)}$ deze as geheel, dan klimt de hoogte van het rechthoekig parallelopipedum van doorsnee met $C_8^{(4)}$, dat een vierkant met de zijde vier tot basis heeft, van nul tot $4\sqrt{2}$ om daarna weer tot nul af te nemen. Doch eerst als deze hoogte van nul tot $2\sqrt{2}$ is aangegroeid, begint de polair ingeschreven $C_{16}^{(2\sqrt{2})}$ gesneden te worden. Zoo vindt men in de drie gevallen, waarin die

[1]) Duidelijkheidshalve zijn de grenselementen van de doorsnee der cel C_{16}, die in de grensvlakken van de doorsnee der omhullende doos C_8 gelegen zijn, op den voorgrond gebracht en wel door de hoekpunten in *al* de zijvlakken dier omhullende doorsnee als zwarte stippen voor te stellen en de in *zichtbare* zijvlakken der omhullende doorsnee gelegen zijvlakken van de doorsnee der cel C_{16} te schaduwen.

hoogte achtereenvolgens $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$ bedraagt en de breuken links boven $\frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}$ bedragen, voor de breuken rechts onder 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ en voor de doorsneden met $C_{16}^{(2\sqrt{2})}$ een ribbe, een door twee vierzijdige pyramiden afgedekten kubus, een vierzijdige dubbelpyramide.

b. *Hellende cellen.* In de vijf gevallen, die aan de breuken 0, $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$ beantwoorden, is de doorsnee der omgeschreven $C_8^{(2)}$ een rechthoekig parallelopipedum met een vierkant met de zijde twee tot grondvlak, waarvan de hoogte achtereenvolgens 0, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\frac{3}{2}\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ bedraagt. De doorsneden met de ingeschreven $C_{16}^{(2\sqrt{2})}$ zijn in de eerste, derde, vijfde der vijf figuren gelijk aan die van de voorgaande kolom, in de tweede en vierde overgangsvormen tusschen deze; in het algemeen wordt de doorsnee gekenmerkt als rechthoekig parallelopipedum met een vierkant tot grond- en bovenvlak, dat aan deze zijvlakken is afgedekt door een vierzijdige pyramide, waarvan de zijvlakken een bepaalde helling hebben.

Doorsneden loodrecht op OK_8.

a. *Rechtopstaande cellen.* Ook hier treedt weer verschil in de breuken op, naarmate men de middellijn loodrecht op de snijruimte beschouwt als een OF_{16} of een OK_8. Doorloopt het snijpunt van de snijruimte met de as OK_8 van $C_8^{(4)}$ deze as geheel, dan vervormt zich het grondvlak van het prisma van doorsnee, waarvan de hoogte vier blijft, op dezelfde wijze als de doorsnee van een kubus met de ribbe vier door een vlak loodrecht op een diagonaal en treedt eerst, als deze basis een driehoek met de zijde $4\sqrt{2}$ geworden is, een zijvlak van de ingeschreven $C_{16}^{(2\sqrt{2})}$ in de snijruimte. Zoo stemmen met de breuken $\frac{4}{12}, \frac{5}{12}, \frac{6}{12}$ links boven de breuken, 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ rechts onder overeen en vinden we in de eerste figuur in een driezijdig prisma een driehoek, in de derde figuur in het regelmatige zeszijdige prisma een regelmatige zeszijdige dubbelpyramide en in de tweede figuur in een gelijkhoekig halfregelmatig zeszijdig prisma een lichaam (12, 24, 14) begrensd door twee gelijkzijdige driehoeken, zes gelijkbeenige driehoeken, zes gelijkbeenige trapezia.

b. *Hellende cellen.* De zeven gevallen beantwoordende aan de

breuken 0, $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$, . . . , $\frac{6}{12}$ zijn hier alle voorgesteld. In het met nul overeenkomende geval is de doorsnee met $C_8^{(2)}$ een lijn, hier een vertikale, de doorsnee met $C_{16}^{(2\sqrt{2})}$ een punt, hier het bovenste der beide uiteinden dier lijn. In de gevallen $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{12}$ vindt men een in een driezijdig prisma beschreven onregelmatig achtvlak, begrensd door twee gelijkzijdige driehoeken van ongelijke grootte en tegengestelde orientatie en door zes gelijkbeenige driehoeken van tweederlei soort; steeds is de kleinste der beide gelijkzijdige driehoeken ingeschreven in het bovenvlak van het driezijdige prisma, terwijl de grootste er een loodrechte doorsnee van vormt achtereenvolgens op $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$, 0 van de hoogte aangebracht. In de gevallen $\frac{5}{12}$, $\frac{6}{12}$ eindelijk vindt men een gelijkhoekig halfregelmatig en een regelmatig zeszijdig prisma, waarin lichamen (12, 24, 14) beschreven zijn, die weer door twee gelijkzijdige driehoeken, zes gelijkbeenige driehoeken, zes gelijkbeenige trapezia begrensd worden. In tegenstelling met het boven beschreven lichaam (12, 24, 14) zijn de twee gelijkzijdige driehoeken van deze nieuwe niet gelijk maar tegengesteld georienteerd. [1])

4. Voor we er toe overgaan door het snijden van het net (C_{16}) min of meer regelmatige ruimtevullingen af te leiden, wenschen we een enkel woord te zeggen omtrent de bij de op plaat II voorgestelde doorsneden der cel C_{16} optredende diagonaalvlakken. In mijn in het Verslag van de Octobervergadering opgenomen mededeeling „Over groepen van polyeders met diagonaalvlakken, afgeleid uit polytopen" is verklaard, dat een niet door een ribbe van C_{16} gaande ruimte deze cel snijdt volgens een veelvlak met de eigenschap door elke ribbe een diagonaalvlak toe te laten en men alleen dan een doorsnee verkrijgen kan, waarbij door een of meer ribben twee diagonaalvlakken gaan, als men uitgaat van een snijruimte, die een of meer ribben von C_{16} bevat. Vooral moet hier thans worden uitgelegd,

[1]) In het opstel „Regelmässige Schnitte und Projectionen des Achtzelles, Sechszehnzelles und Vierundzwanzigzelles, u.s.w." (Verhandelingen, eerste sectie, deel II, N°. 2, 1894) bepaalde ik mij in hoofdzaak tot centrale doorsneden en voegde ik slechts incidenteel iets toe omtrent doorsneden met niet door het middelpunt gaande evenwijdige ruimten. Door de middelste figuren der derde en vijfde kolom van plaat II dezer nieuwe studie worden de niet geheel juiste figuren 11 en 13 van dien vorigen arbeid verbeterd.

waarom deze bijzonderheid zich — zooals daar reeds vermeld werd — bij geen der doorsneden van de vier hoofdgroepen voordoet.

Een eenvoudige beschouwing van plaat II is voldoende om in te zien, dat al de daar voorgestelde doorsneden van C_{16} — dus niet alleen die der vier met de assen OE_{16}, OK_{16}, OF_{16}, OR_{16} in verband staande doch ook die van de laatste kolom — hierin met elkaar overeenstemmen, dat er door elke ribbe een enkel diagonaalvlak gaat en dit diagonaalvlak zich bij evenwijdige verplaatsing der snijruimte evenwijdig aan zich zelf verplaatst. Als voorbeeld wijzen we op de figuren der vierde kolom, waar een zeshoek $MABNCD$ zijn halve reis als lijn MN aanvangt en als ruit $MANC$ eindigt.

De verklaring, *waarom* er geen in twee diagonaalvlakken liggende ribben optreden bij doorsneden met ruimten door ribben van C_{16}, is nu gemakkelijk uit plaat I af te lezen. Zij komt hierop neer, dat de ruimten door ribben van C_{16}, die deze cel niet geheel aan dezelfde zijde laten, bij de doorsneden loodrecht op OR_{16} of OF_{16} niet voorkomen, bij de doorsneden loodrecht op OE_{16} of OK_{16} door het middelpunt O gaan en bij de doorsneden onder het hoofd $(3,1,1,1)OK_8$ een zijvlak bevatten. Als de snijruimte behalve de ribbe AB — zie de tweede figuur der mededeeling in October — ook het middelpunt O der cel bevat, vallen de snijpunten S_{24}, S_{13} in O samen en vindt men dus in stede van twee diagonaalvlakken ABS_{13}, ABS_{24} een enkel diagonaalvlak ABO, dat ook de overstaande ribbe bevat en C_{16} en haar doorsnee snijdt volgens een vierkant; dit gebeurt bij de laatste figuren van de eerste en derde kolommen der plaat II en wel voor de eerste met elk, voor de laatste met één diagonaalvlak, het horizontaal voorgestelde. In het met het breuksymbool $\frac{4}{12}$ overeenkomende geval van de laatste kolom van plaat II is de daar als grondvlak verschijnende driehoek OPQ een zijvlak van C_{16} en gaat er door elke ribbe van dit zijvlak dus bovendien nog slechts een diagonaalvlak.

5. Ter bepaling van de door de snijding van het net (C_{16}) in de snijruimte ontstane ruimtevulling kan men verschillende wegen inslaan, waarvan enkele een meer theoretisch, andere een meer practisch karakter dragen. De meer theoretische komen in hoofdzaak hierin met elkaar overeen, dat men uit de doorsnee van de snijruimte met een bepaalde C_{16} afleidt, hoe de snijruimte de overige cellen van het net (C_{16}) moet aandoen. Zoo kan men de op de snijruimte loodrecht staande assen van alle cellen C_{16} projecteeren op de als as van projectie aangenomene en uit de breuk behoorende bij de C_{16}

van deze as de bij alle overige cellen C_{16} behoorende breuken trachten te vinden; deze handelwijze is in de tweede mededeeling op het net (C_8) toegepast en kan derhalve hier goede diensten bewijzen, omdat de lichamelijk omschreven cellen $C_8^{(2)}$ van de hellende zestiencellen een net (C_8) vormen. Dikwijls echter is het practischer van een der bij de doorsnijding optredende lichamen uit te gaan, te onderzoeken welke andere bij dit geval mogelijke lichamen een zijvlak vertoonen, dat in vorm en grootte met een der zijvlakken van het lichaam van uitgang overeenkomt, en na te gaan of men zoodoende, hetzij met behulp van deze twee lichamen alleen, hetzij met behulp van nog andere eveneens mogelijke, tot een ruimtevulling kan geraken.

Ruimtevullingen loodrecht op OR_8. Denkt men zich in een driedimensionale ruimte een net van kuben met de ribbe twee, die afwisselend uit witte en zwarte materie bestaan en dus een driedimensionaal dambord met een oneindig aantal vakjes vormen, en beschrijft men in alle witte kuben een rechtsch, in alle zwarte kuben een linksch tetraeder, dan wordt de ruimte tusschen deze viervlakken opgevuld door regelmatige achtvlakken en ontstaat het gemengde net van tetraeders en octaeders met gelijke lengte $2\sqrt{2}$ van ribbe. Beschrijft men in alle witte kuben de aan hoekpunten en ribben afgeknotte viervlakken van de tweede, in alle zwarte kuben de aan hoekpunten en ribben afgeknotte viervlakken van de vierde der vijf figuren van de tweede kolom van de tweede plaat, dan wordt de overblijvende ruimte opgevuld door regelmatige achtvlakken van tweederlei grootte, nl. met ribben $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $\frac{3}{2}\sqrt{2}$. Beschrijft men in *alle* kuben de door de derde der vijf figuren voorgestelde combinatie van kubus en achtvlak in evenwicht, dan wordt de overblijvende tusschenruimte opnieuw door regelmatige achtvlakken van een zelfde grootte, ditmaal met ribben $\sqrt{2}$ opgevuld. Deze bekende uitkomsten worden onmiddellijk verkregen met behulp van de methode der aaneenpassing, als men slechts bedenkt, dat twee lichamelijk ingeschreven cellen, waarvan de doozen $C_8^{(2)}$ een gemeenschappelijken grenskubus hebben, door elke ruimte loodrecht op de ruimte van dien kubus gesneden worden volgens lichamen, die elkaars spiegelbeeld zijn met betrekking tot het vlak van doorsnee der beide ruimten als spiegel, waaruit onmiddellijk volgt, dat van de vijf figuren der tweede kolom de eerste en de laatste, en evenzoo de tweede en de voorlaatste, bij elkaar behooren, terwijl de middelste op zich zelf staat. Uit de aaneenpassing, die hier op een opvulling der tusschenruimten neer-

komt, wordt dan afgeleid, dat bij het paar uiterste figuren der tweede kolom het paar uiterste figuren der eerste, dat bij de middelste figuur der tweede kolom de middelste figuur der eerste behoort, terwijl aan de twee overige figuren der tweede kolom de twee hier niet geteekende tusschenstanden met de breuken $\frac{1}{8}$ en $\frac{3}{8}$ van de eerste beantwoorden.

Is het punt O (fig. 5) het middelpunt en OR een as OR_8 van een der cellen $C_8^{(2)}$, en neemt men op deze als as van projectie beschouwde lijn een schaalverdeeling aan met O als oorsprong van tellen en de halve ribbe van $C_8^{(2)}$ als eenheid, dan projecteeren de hoekpunten der cellen $C_8^{(2)}$ — en dus ook de middelpunten der cellen $C_8^{(4)}$ — zich in de punten met een oneven aantal geheelen tot afstand van O. Ligt nu de projectie P van de snijruimte op deze as tusschen den oorsprong en het punt 1 in en stelt $1-2x$ den afstand OP voor, dan beantwoordt de doorsnee van alle cellen $C_8^{(2)}$ aan de breuk x, terwijl aan de beide reeksen van cellen $C_8^{(4)}$, wier middelpunten zich in de punten -1 en $+1$ projecteeren de breuken $y = \frac{x}{2}$ en $y' = \frac{x+1}{2}$ toekomen. Wijl nu de breuk x van een positief ingeschreven C_{16} voor een negatief ingeschreven C_{16} van teeken omkeert, d.i. in $1-x$ overgaat, behooren de breuken x en $1-x$ van de vijf figuren der tweede kolom bijeen en beantwoorden hieraan de breuken $\frac{1}{2}x$ en $\frac{1}{2}(x+1)$ van de eerste kolom. Deze uitkomst stemt met het bovenstaande overeen; bovendien volgt er nog uit, dat het de voorkeur verdient te zeggen, dat met de tweede en vierde der vijf figuren van de tweede kolom niet geteekende tusschenstanden met de breuksymbolen $\frac{1}{8}$ en $\frac{5}{8}$ van de eerste kolom overeenkomen.

Natuurlijk is langs dezen weg tevens aangegeven, hoe de ruimtevulling er uitziet als x een willekeurige waarde heeft; daar dit onmiddellijk volgt uit het bovenstaande, gaan we hierop niet verder in.

Ruimtevullingen loodrecht op OF_3. De boven verkregen uitkomst — dat van de vijf figuren der tweede kolom de even ver van het midden af staande bij elkaar behooren — geldt ook voor dit geval. Dit blijkt, onafhankelijk van vorige beschouwingen, gemakkelijk als volgt. Zijn PX_1, PX_2, PX_3, PX_4 (fig. 6) de vier in een hoekpunt P

samenkomende ribben eener $C_8^{(2)}$, PQ en PR de op X_1PX_2 en X_2PX_4 beschreven vierkanten, F, G, O de middelpunten van die zijvlakken en van de achtcel, dan is $FPGO$ een vierkant en projecteert zich het net (C_8), waartoe de cel $C_8^{(2)}$ behoort, op het vlak van het vierkant PR als een vlakvulling van vierkanten (fig. 7), terwijl de snijruimte loodrecht op de diagonaal PR van het vierkant zich als een loodlijn op die lijn PR projecteert. We drukten dit in de tweede mededeeling uit door te zeggen, dat het vraagstuk van de doorsnijding van een vierdimensionaal lichaam door een driedimensionale ruimte hier twee afmetingen verloren heeft. Is nu van de lijnen loodrecht op de diagonaal PR a de lijn door R, b de lijn, die de zijden RS, RT van het vierkant RU in S_1, T_1 in stukken verdeelt tot elkaar staande als een tot drie, en c de lijn door de middens S_2, T_2 dier zijden, dan slaat de stand a der snijruimte op de vereeniging der eerste en vijfde figuur van kolom vier der tweede plaat de stand b op die van de tweede en vierde figuur, de stand c op die van de derde figuur.

Een tweede opmerking heeft betrekking op den stand der in de derde en vierde kolom verkregen doorsneden. De eerste en derde figuur van kolom drie zijn in *wezen* gelijk aan de eerste en vijfde figuur van kolom vier; evenzoo stemmen de middelste figuren van beide kolommen in *wezen* overeen. Doch in *stand* is er verschil. In de figuren van kolom drie is de as MN met de periode vier vertikaal, in de figuren van kolom vier is die as MN horizontaal. Dit is niet toevallig. Wijl de beide kolommen de doorsneden met de polair omschreven $C_8^{(4)}$ en de lichamelijk omgeschreven $C_8^{(2)}$ in dezelfde orientatie voorstellen, volgt er uit, dat de assen MN van de doorsneden der rechtopstaande zestiencellen en die van een bepaalde der beide groepen van hellende zestiencellen loodrecht op elkaar staan; dit eischt dan verder, dat de assen MN der doorsneden van drie tot verschillende groepen behoorende zestiencellen twee aan twee loodrecht op elkaar staan. We verifieeren dit door nog te bewijzen, dat de assen MN behoorende tot de doorsneden van twee hellende zestiencellen van verschillend soort loodrecht op elkaar staan. Daartoe merken we op, dat de grensruimten $P(X_1X_2X_4)$ en $P(X_2X_3X_4)$ van fig. 6 evenwijdig zijn aan OF — omdat de aan OF evenwijdige lijn GP in $P(X_2X_4)$ ligt — en de snijruimten loodrecht op OF dus loodrecht op die grensruimten der $C_8^{(2)}$ staan. Wijl de zestiencellen ingeschreven in $C_8^{(2)}$ en een dier beide aangrenzende achtcellen elkaars spiegelbeelden zijn met betrekking tot

de gemeenschappelijke grensruimte der beide achtcellen, zijn de doorsneden der beide zestiencellen met de loodrecht op die grensruimte staande snijruimte elkaars spiegelbeelden ten opzichte van het vlak van doorsnee van snijruimte en grensruimte, d. i. ten opzichte van een der opstaande zijvlakken van het rechthoekige vierzijdige prisma met een vierkant tot basis, dat de doorsnee van $C_8^{(2)}$ vormt. Wijl de as MN van de figuren der vierde kolom met elk dier zijvlakken een hoek van 45° maakt, staat ze loodrecht op haar spiegelbeeld.

In het eerste der drie gevallen — dat van de eerste en laatste figuur van de derde kolom — treedt slechts een lichaam op, de vierzijdige dubbelpyramide, waarvan de basis een vierkant is met de zijde $2\sqrt{2}$ en de geheele hoogte eveneens $2\sqrt{2}$ bedraagt. Het blijkt onmiddellijk als volgt, dat dit niet geheel regelmatige achtvlak een ruimtevulling levert. Beschouwt men een net van kuben met $2\sqrt{2}$ tot ribbe, verdeelt men elk dier kuben in zes gelijke vierzijdige pyramides met een der zijvlakken tot grondvlak en het kubusmiddelpunt tot gemeenschappelijken top en vereenigt men daarna elk paar dier pyramides met gemeenschappelijke basis tot een dubbelpyramide, dan verkrijgt men het bedoelde net, dat naar de richting van de assen dier pyramides met de periode vier uit drie even sterk vertegenwoordigde groepen van lichamen bestaat. We merken op, dat het regelmatig achtvlak geen ruimtevulling levert, doch — zoo als nu hier blijkt — wèl het lichaam, dat ontstaat door het regelmatig achtvlak zoo samen te drukken, dat de afstanden van de punten der begrenzing tot een vlak door vier der zes hoekpunten tot een bedrag van $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ maal de oorspronkelijke waarden worden verkleind.

Ook in het derde van de drie gevallen — dat van de middelste der vijf figuren van de vierde kolom — treedt slechts een lichaam op, nl. de kubus met de ribbe $\sqrt{2}$, die op twee tegenoverstaande zijvlakken een vierzijdige pyramide met de hoogte $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ draagt. Gemakkelijk ziet men als volgt in, dat dit lichaam werkelijk in staat is de ruimte te vullen. Men neme een net van kuben met de ribbe $\sqrt{2}$, onderstelle dat het middelpunt van een der kuben oorsprong is van een rechthoekig coördinatenstelsel met assen evenwijdig aan de kubenribben en verdeele elken kubus, waarvan het middelpunt òf louter even, òf louter oneven veelvouden van $\sqrt{2}$ tot coördinaten heeft, in zes gelijke vierzijdige pyramides. Dan levert toevoeging van elk dier pyramides aan den aangrenzenden kubus de gezochte ruimtevulling. Van deze geven de beide figuren 8^a en 8^b de doorsneden met vlakken $u = 2k\sqrt{2}$ en $u = (2k+1)\sqrt{2}$, als u een der drie coördinaten voorstelt; daarin zijn de in de richting van de as met

de periode vier verloopende vezels der combinatie (10, 20, 12) aangegeven en doorsneden loodrecht op die as door jaarringen en mergstralen aangeduid.

Wil men op overeenkomstige wijs het tweede geval — dat van de tweede en vierde figuur der vierde kolom — behandelen, dan kan men eveneens weer van een net van kuben, met een ribbe $2\sqrt{2}$, uitgaan. Vervormt men dit net door in deze kuben concentrische en gelijkstandige kuben met een ribbe $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ te beschrijven en zich de begrenzing der oorspronkelijke kuben weg, die der nieuwe echter doorgetrokken te denken, waardoor een gemengde ruimtevulling van kuben en rechthoekige parallelopipeda ontstaat, gekenmerkt door de ribbendrietallen (1, 1, 1), (3, 3, 3) en (1, 1, 3), (1, 3, 3) in $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ als eenheid, dan behoeft men slechts op de kuben van beiderlei grootte de verdeeling in zes gelijke pyramides toe te passen en deze pyramides bij de aangrenzende parallelopipeda te voegen, om de verlangde ruimtevulling te doen ontstaan. Hier geven de figuren 9^a en 9^b duidelijkheidshalve de aan de figuren 8^a en 8^b beantwoordende doorsneden aan.

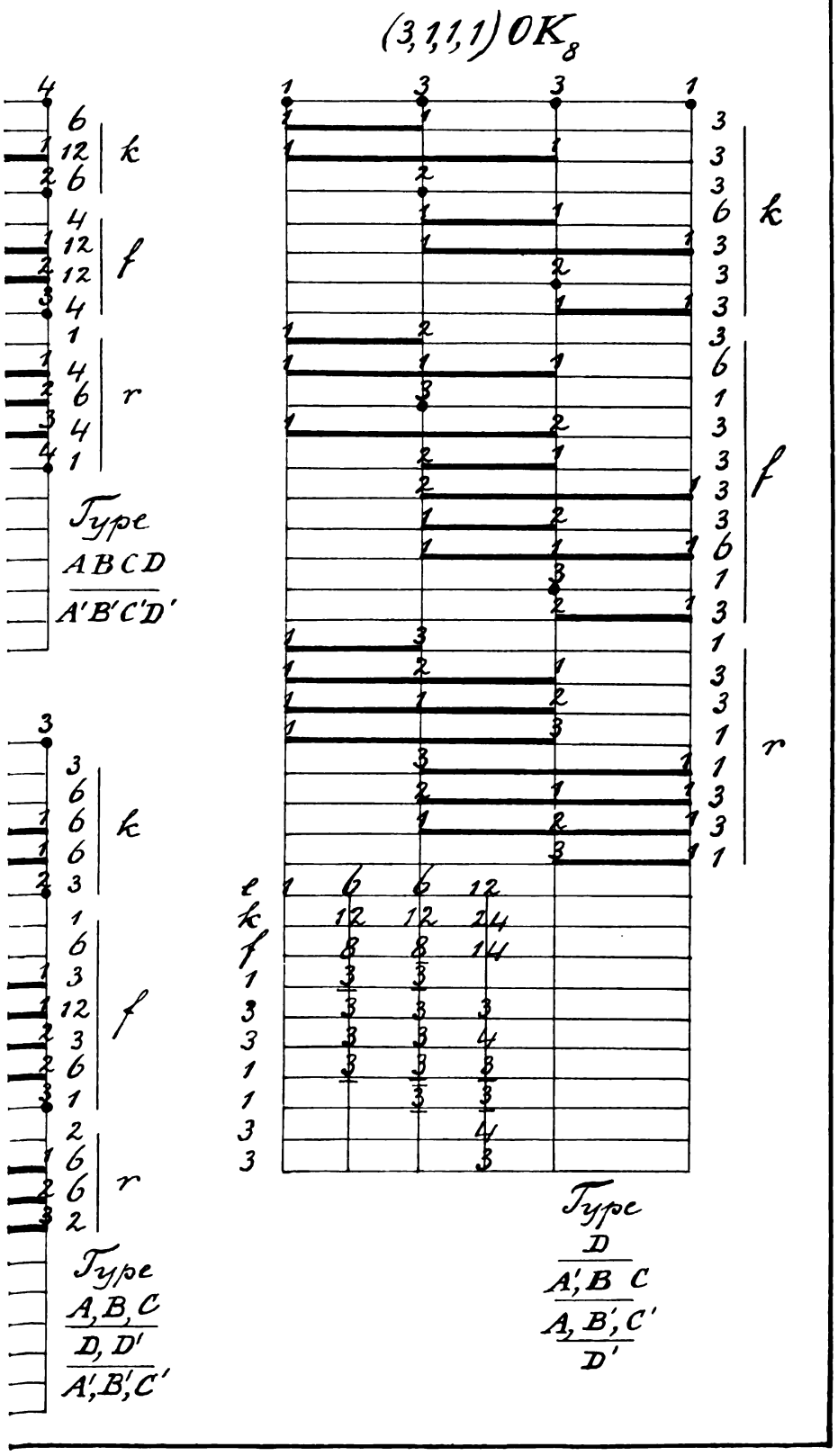
In het algemeen bestaat dus de hier optredende ruimtevulling uit twee verschillende vormen, die elk in drie verschillend georienteerde standen voorkomen; in twee bijzondere gevallen heeft men slechts met een enkel in drie standen optredend lichaam te doen.

Ruimtevullingen loodrecht op OK_8. — Hier verliest het vraagstuk van de bepaling der doorsnee van het net (C_8) een enkele afmeting en volgt dus uit de beschouwing van de doorsnee van een driedimensionaal kubennet met een vlak loodrecht op een diagonaal, dat hier telkens drie doorsneden bij elkaar behooren, wier kenmerkende breuken $\frac{1}{3}$ verschillen. Daarbij moet dan nog op twee punten worden gelet. Eerstens moet worden opgemerkt, dat de drie aan de breuken a, $a+\frac{1}{3}$, $a+\frac{2}{3}$ beantwoordende doorsneden der $C_8^{(2)}$ niet altijd drie doorsneden van een lichamelijk ingeschreven zestiencel leveren. Neemt men eenvoudigheidshalve a tusschen de grenzen 0 en $\frac{1}{3}$ aan, dan zullen er drie doorsneden der $C_{16}^{(2\sqrt{2})}$ voorkomen, als a tusschen $\frac{1}{12}$ en $\frac{3}{12}$ ligt, d.i. dus in de helft der mogelijke gevallen. Ten

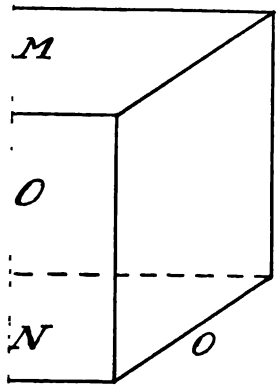
tweede moet men in het oog houden, dat elk der twee of drie doorsneden van zestiencellen voorkomt in twee verschillende orientaties, die elkaars spiegelbeelden zijn met betrekking tot het middelvlak der prismatische doorsnee van de lichamelijk omgeschreven $C_8^{(2)}$. Staat nl. de snijruimte loodrecht op de lijn van O naar het midden K_8 van de ribbe PQ der aangenomen achtcel met O tot middelpunt, dan behoeft men slechts twee lichamelijk aan elkaar grenzende achtcellen uit het net te beschouwen, waarvoor de verbingslijnen der middelpunten equipollent is met PQ, om in te zien, dat deze achtcellen gesneden worden volgens twee congruente prisma's met gemeenschappelijk grondvlak, terwijl de doorsneden der ingeschreven hellende zestiencellen symmetrisch met betrekking tot dit grondvlak gelegen figuren zijn. Let men alleen op den vorm, dan heeft men dus met twee of drie, let men ook op de orientatie, dan heeft men met vier of zes lichamen te doen.

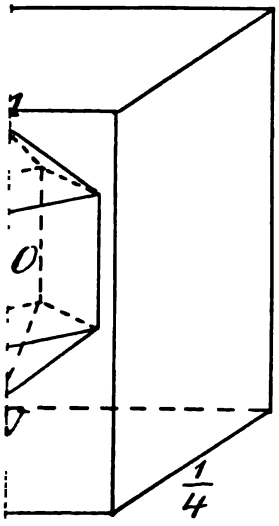
Ontdoet men het vraagstuk van de doorsnijding van het stelsel der ten deele elkaar doordringende cellen $C_8^{(4)}$, die polair omgeschreven zijn aan de rechtopstaande zestiencellen, van de eene overtollige afmeting, dan vindt men een stelsel van kuben met de ribben vier, waarvan de hoekpunten van een kubennet met de ribbe twee de middelpunten zijn, terwijl de ribben met die van de kuben van het net evenwijdig loopen. Dit stelsel moet dan door een vlak loodrecht op een diagonaal gesneden worden. Hieruit volgt dan met behulp eener eenvoudige figuur, dat aan de drie doorsneden a, $a + \frac{1}{3}$, $a + \frac{2}{3}$ van het net $C_8^{(2)}$ de zes doorsneden $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2} + \frac{1}{6}$, . . . , $\frac{a}{2} + \frac{5}{6}$ van het stelsel $C_8^{(4)}$ beantwoorden. Maar van deze zes verschillende doorsneden van $C_8^{(4)}$ geven er slechts twee aanleiding tot doorsneden met rechtopstaande zestiencellen, nl. die, wier breuken tusschen $\frac{2}{6}$ en $\frac{4}{6}$ begrepen zijn. Zoo vindt men als de meest regelmatige van de hier optredende ruimtevullingen de twee in het volgende schema door vette cijfers aangegevene:

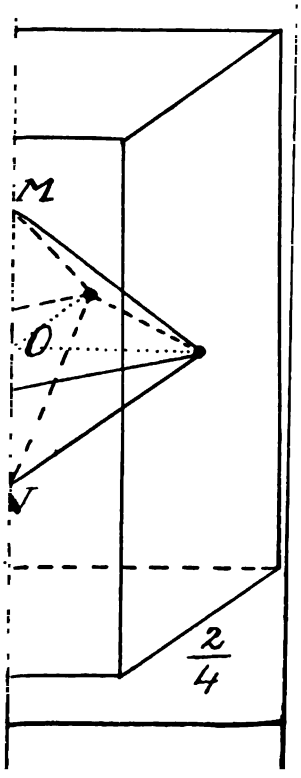
In $C_8^{(4)}$ . . . $0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \mathbf{\frac{3}{6}}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$	In $C_8^{(4)}$ . . . $\frac{1}{12}, \frac{3}{12}, \mathbf{\frac{5}{12}}, \mathbf{\frac{7}{12}}, \frac{9}{12}, \frac{11}{12}$
In $C_8^{(2)}$ . . . $0, \mathbf{\frac{1}{3}}, \mathbf{\frac{2}{3}}$	In $C_8^{(2)}$ . . . $\mathbf{\frac{1}{6}}, \mathbf{\frac{3}{6}}, \mathbf{\frac{5}{6}}$


(3,1,1,1) OK8
k
f
r
Type
A B C D
A' B' C' D'
Type
A, B, C
D, D'
A', B', C'
Type
D
A', B C
A, B', C'
D'

0) OK_{16}







Van deze ruimtevullingen bestaat de eerste uit regelmatige zeszijdige dubbelpyramides, (laatste figuur van de vijfde kolom van plaat II) en, als men slechts op den vorm let, een enkel ander lichaam, een onregelmatig achtvlak (het achtvlak der zesde kolom met OPQ tot grondvlak), terwijl de tweede in die onderstelling uit drie verschillende lichamen opgebouwd wordt. De figuren 10 en 11 geven van beide een projectie op het grondvlak der prisma's van doorsnee met de insluitende achtcellen.

Uit de hier eenigermate als bladvulling optredende fig. 12, die de doorsneden van een kubus door vlakken loodrecht op een inwendige diagonaal doet zien, is ten slotte af te leiden, dat de lijnen PQ, RS TU van de drie figuren der vijfde kolom — en van de laatste drie figuren der zesde kolom — van plaat II dezelfde lengte hebben.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan: „*Bijdrage tot de theorie der binaire mengsels.*" XI. (Vervolg.)

Wij zullen er nu toe overgaan eenige eigenschappen te onderzoeken van de meetkundige plaats der snijpunten van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$, in de eerste plaats als die meetkundige plaats een gesloten figuur is, geheel gelegen bij volumes grooter dan b. Schrijven wij:

$$(v - b)^2 + x(1 - x)\left(\frac{db}{dx}\right)^2 = x(1 - x)\frac{c}{a}v^2$$

onder de gedaante:

$$v^2\left\{1 - x(1 - x)\frac{c}{a}\right\} - 2vb + \left\{b_1^2 + x(b_2^2 - b_1^2)\right\} = 0 \quad . \quad . \quad (\varphi)$$

De gedaante van den derden term in deze vergelijking blijkt slechts af te hangen van de eerste macht van x, doordat $b^2 + x(1-x)\left(\frac{db}{dx}\right)^2$ kan geschreven worden: $b_1^2 + 2xb_1\frac{db}{dx} + x^2\left(\frac{db}{dx}\right)^2$ en daarbij gevoegd $x(1-x)\left(\frac{db}{dx}\right)^2$ De derde term wordt dan gelijk aan: $b_1^2 + \frac{db}{dx}\left(2b_1 + \frac{db}{dx}\right)x$, waarin $\frac{db}{dx} = b_2 - b_1$ is. Stellen wij $x(1-x)\frac{c}{a} = A$, dan wordt de vergelijking (φ)

$$v^2(1 - A) - 2vb + b_1^2 + x(b_2^2 - b_1^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (\varphi')$$

Zoeken wij de punten dezer lijn, waarin de raaklijn evenwijdig

aan de x-as is, en dus waarin $\frac{dv}{dx} = 0$ is, dan vinden wij een tweede vergelijking door φ' naar x te differentieeren en v standvastig te houden, en wel:

$$-v^2 \frac{dA}{dx} - 2v(b_2 - b_1) + b_2^2 - b_1^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\varphi'')$$

Door v uit (φ') en (φ'') te elimineeren, wordt een vergelijking verkregen alleen in x — en bij de waarden van x, welke aan die resulteerende vergelijking voldoen, zal $\frac{dv}{dx} = 0$ zijn. Wij zullen een resulteerende vergelijking in x evenwel op een eenigzins andere wijze zoeken.

Trekt men $x(\varphi'')$ van (φ') af, dan verkrijgt men:

$$v^2 \left\{ 1 - A + x \frac{dA}{dx} \right\} - 2vb_1 + b_1^2 = 0,$$

en deze laatste vergelijking optellende bij (φ'') verkrijgt men:

$$v^2 \left\{ 1 - A - (1 - x) \frac{dA}{dx} \right\} - 2vb_2 + b_2^2 = 0.$$

Bijgevolg is:

$$\frac{b_1}{v} = 1 \pm \sqrt{\left\{ A - x \frac{dA}{dx} \right\}}$$

en

$$\frac{b_2}{v} = 1 \pm \sqrt{\left\{ A + (1 - x) \frac{dA}{dx} \right\}}.$$

Nu is $\frac{b_1}{v}$ echter zeker kleiner dan 1, bijgevolg kan in de uitdrukking voor $\frac{b_1}{v}$ alleen het teeken — voor het wortelteeken behouden worden. En voorloopig onbeslist latende of $v > b_2$ of $v < b_2$ is, vinden wij als wij $\frac{b_2}{v}$ deelen door $\frac{b_1}{v}$:

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{\left\{ A + (1 - x) \frac{dA}{dx} \right\}}}{1 - \sqrt{\left\{ A - x \frac{dA}{dx} \right\}}}$$

of

$$n - 1 - n \sqrt{\left\{ A - x \frac{dA}{dx} \right\}} \mp \sqrt{\left\{ A + (1 - x) \frac{dA}{dx} \right\}} = 0 \qquad (\varphi''')$$

Nu is

$$A + (1 - x)\frac{dA}{dx} = (1 - x)^2 \frac{c}{a}\left\{1 - \frac{x}{a}\frac{da}{dx}\right\}$$

en

$$A - x\frac{dA}{dx} = x^2 \frac{c}{a} 1 + \frac{1-x}{a}\frac{da}{dx}$$

Het eerste lid van vergelijking (φ''') wordt voor $x = 0$:

$$n - 1 \mp \sqrt{\frac{c}{a_1}}$$

of

$$n - 1 \mp \frac{n - 1}{\sqrt{(1 + \varepsilon_1)}}$$

en dus, hetzij het teeken — of het teeken + gekozen wordt, steeds positief, als, zooals in het beschouwde geval, de grootheid ε_1 positief is. Voor $x = 1$ wordt het eerste lid van (φ''') gelijk aan

$$(n - 1) - n\sqrt{\frac{c}{a_2}}$$

of

$$n - 1 - \frac{n - 1}{\sqrt{(1 + \varepsilon_2)}}.$$

Deze waarde zou negatief zijn, als, zooals in een volgend geval ondersteld zal worden ε_2 negatief is — maar is ook positief, als, zooals nu het geval is, ε_2 positief is. Is voor $x = 0$ en $x = 1$ het teeken van de waarde van het eerste lid van (φ''') verschillend, dan zal er een waarde van x tusschen 0 en 1 zijn die aan (φ''') voldoet. Maar in ons geval heeft het eerste lid van (φ''') voor $x = 0$ en $x = 1$ hetzelfde teeken. Daaruit volgt natuurlijk niet, dat er geen wortel voor (φ''') bestaat, maar alleen dat deze vergelijking òf geen wortels heeft, of een even aantal. Geen wortels heeft deze vergelijking, als de meetkundige plaats imaginair is — maar bestaat zij, zooals het geval is, wanneer $1 > \frac{\sqrt{\varepsilon_1} + n\sqrt{\varepsilon_2}}{n-1}$ is, en als de meetkundige plaats een gesloten figuur is, dan moeten er ook twee zijn. Stelt men de waarde van het eerste lid van (φ''') grafisch voor tusschen $x = 0$ en $x = 1$, dan begint en eindigt de kromme, welke deze waarde voorstelt, positief. Gaat deze kromme naar negatieve waarden, dan moet zij, tenminste tweemaal een ordinaat gelijk aan 0 hebben, en dus ook een minimumwaarde aannemen. Bijgevolg zal, als er twee waarden van x zijn, welke aan (φ''') voldoen, de vergelijking welke verkregen wordt door (φ''') naar x te differentieeren, een wortel moeten hebben. Nu is $\frac{d(\varphi''')}{dx}$ gelijk aan:

$$-\frac{n}{2}\frac{-x\frac{d^2A}{dx^2}}{\sqrt{\left\{A-x\frac{dA}{dx}\right\}}}\mp\frac{1}{2}\frac{(1-x)\frac{d^2A}{dx^2}}{\sqrt{\left\{A+(1-x)\frac{dA}{dx}\right\}}}.$$

En voor de minimumwaarde van (φ''') moet deze uitdrukking dus gelijk 0 zijn.

Deze uitdrukking is gelijk 0, als $\frac{d^2A}{dx^2}=0$ is, of als

$$\frac{nx}{\sqrt{\left(A-x\frac{dA}{dx}\right)}}=\pm\frac{1-x}{\sqrt{\left\{A+(1-x)\frac{dA}{dx}\right\}}}$$

is. Dit laatste kan alleen het geval zijn, als in het tweede lid het teeken $+$ behouden blijft, en $-$ verworpen. Dit beteekent, dat in de uitdrukking:

$$n=\frac{1\pm\sqrt{\left\{A+(1-x)\frac{dA}{dx}\right\}}}{1-\sqrt{\left\{A-x\frac{dA}{dx}\right\}}}$$

in den teller van het tweede lid alleen het teeken $+$ moet gelden, of dat $\frac{b_2}{v}>1$ is. Dus als de gesloten kromme beperkt blijft tot volumes, welke kleiner zijn dan b_2.

Zoeken wij de waarde van x welke voldoet aan:

$$\frac{n^2x^2}{A-x\frac{dA}{dx}}=\frac{(1-x)}{A+(1-x)\frac{dA}{dx}}$$

dan zal (φ'''), bij substitutie van deze waarde van x, negatief moeten zijn, daar (φ''') voor $x=0$ en $x=1$ positief is gebleken te zijn.

Voor het bestaan toch van 2 wortels der vergelijking $\varphi'''=1$, is het niet voldoende dat φ''' een minimumwaarde bezit, maar is het noodig dat deze minimumwaarde negatief is.

Substitueert men in

$$n-1-n\sqrt{\left\{A-x\frac{dA}{dx}\right\}}-\sqrt{\left\{A+(1-x)\frac{dA}{dx}\right\}}$$

de waarde van

$$\sqrt{\left\{A-x\frac{dA}{dx}\right\}}=\frac{nx}{1-x}\sqrt{\left\{A+(1-x)\frac{dA}{dx}\right\}},$$

dan moet:

$$n-1-\frac{n^2x+(1-x)}{1-x}\sqrt{\left\{A+(1-x)\frac{dA}{dx}\right\}}$$

negatief zijn.

Nu vinden wij uit de voorwaarde, waaronder φ''' een minimumwaarde heeft:

$$\frac{dA}{dx} = A\frac{(1-x)^2 - n^2x^2}{x(1-x)\{1-x+n^2x\}}$$

en

$$A + (1-x)\frac{dA}{dx} = A\frac{(1-x)^2}{(1-x+n^2x)x(1-x)} = \frac{c}{a}\,\frac{(1-x)^2}{1-x+n^2x}$$

Bijgevolg moet

$$(n-1) - \sqrt{\frac{c}{a}\{1-x+n^2x\}}$$

negatief zijn.

Schrijft men nu $a = a_1(1-x) + a_2x - cx(1-x)$ en $\frac{a_1}{c} = \frac{1+\varepsilon_1}{(n-1)^2}$ en $\frac{a_2}{c} = n^2\frac{1+\varepsilon_2}{(n-1)^2}$, dan moet:

$$(n-1) - (n-1)\sqrt{\frac{1-x+x^2x}{(1-x)(1+\varepsilon_1)+xn^2(1+\varepsilon_2)-(n-1)^2x(1-x)}}$$

negatief zijn. Dit zal het geval zijn, als onder het wortelteeken de teller grooter is dan de noemer, of als

$$(1-x)(1+\varepsilon_1) + n^2x(1+\varepsilon_2) - (n-1)^2x(1-x) < 1-x+n^2x$$

of

$$(1-x)\varepsilon_1 + n^2x\varepsilon_2 - (n-1)^2x(1-x) < 0$$

of

$$\frac{\varepsilon_1}{(n-1)^2} - x\left\{1 + \frac{\varepsilon_1 - n^2\varepsilon_2}{(n-1)^2}\right\} + x^2 < 0.$$

De uiterste waarden van x van de gesloten kromme worden gegeven door de vergelijking:

$$\frac{\varepsilon_1}{(n-1)^2} - x\left\{1 + \frac{\varepsilon_1 - n^2\varepsilon_2}{(n-1)^2}\right\} + x^2 = 0.$$

Is het eerste lid dezer vergelijking negatief, dan liggen de waarden van x, welke aan dezelfde waarde voldoen, dichter bij een, gelijk verwacht moest worden.

Wij hebben de voorwaarde, dat φ''' negatief zij in haar minimumwaarde teruggebracht tot:

$$\frac{\varepsilon_1}{(n-1)^2} - x\left\{1 + \frac{\varepsilon_1 - n^2\varepsilon_2}{(n-1)^2}\right\} + x^2 = -\Delta$$

als Δ een positieve grootheid is. Zal dit voor bestaanbare waarden van x het geval zijn (ε_1 en ε_2 positief) dan moet

$$\left\{1 + \frac{\varepsilon_1 - n^2\varepsilon_2}{(n-1)^2}\right\}^2 > \frac{\varepsilon_1}{(n-1)^2}$$

of

$$1 - \frac{\sqrt{\varepsilon_1} + x\sqrt{\varepsilon_2}}{n-1} > 0$$

Deze voorwaarde is vervuld, als de punten, waarvan ε_1 en ε_2 de coördinaten zijn, liggen in het gebied, waarvoor de beschouwde meetkundige plaats een gesloten kromme is.

Wat wij tot hiertoe hebben aangetoond laat zich aldus samenvatten. Wij hebben uit $(\varphi''') = 0$ afgeleid $\frac{(d\varphi''')}{dx} = 0$, en de voorwaarde opgemaakt, waaronder φ''' door de substitutie van $\frac{d\varphi'''}{dx} = 0$ negatief wordt. Strikt genomen behoort nu nog te worden aangetoond, dat $\frac{d\varphi'''}{dx} = 0$ bestaanbare wortels heeft — en bovendien dat de waarde dier wortels met het verkregen resultaat in overeenstemming is. Gaan wij daartoe na wat omtrent de waarde van x volgt, welke voldoet aan de vroeger verkregen vergelijking afgeleid uit $\frac{d\varphi'''}{dx} = 0$, namelijk:

$$\frac{dA}{dx} = A\,\frac{(1-x)^2 - n^2x^2}{x(1-x)\,[1-x+n^2x]}$$

Nu is $\frac{dA}{dx} = \frac{c[a_1(1-x)^2 - a_2x^2]}{a^2}$ en $A = \frac{cx(1-x)}{a^2}$ en na herleiding vinden wij:

$$\frac{-a_1n^2 + a_2}{c} = (1-x)^2 - n^2x^2$$

of

$$\frac{n^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(n-1)^2} = (1-x)^2 - n^2x^2$$

Het tweede lid dezer vergelijking heeft voor x tusschen 0 en 1 een waarde n welke voortdurend daalt en tusschen 0 en $-n^2$ ligt. Er zal dus een wortel zijn, als $\frac{n^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(n-1)^2} < 1$ en $> -n^2$ is. Of als

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

en

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 + (n-1)^2$$

Trekken wij twee lijnen, onder een hoek van 45° met de assen, door de punten P en Q, dan beteekent $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 + (n-1)^2$ en $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 - \frac{(n-1)^2}{x^2}$, dat voor alle punten tusschen deze twee lijnen

$\frac{dA}{dx}$ één bestaanbaren wortel heeft tusschen $x = 0$ en $x = 1$. Beperken wij ons tot positieve waarden van ε_1 en ε_2, dan omvat deze ruimte een zeer groot gedeelte van de eerste parabool, en daarenboven de ruimte die ik door OPQ zal aanduiden, tusschen de parabool en de assen. Stellen wij $(1-x)^2 = \frac{n^2\varepsilon_2+k}{(n-1)^2}$ en $n^2x^2 = \frac{n^2\varepsilon_1+k}{(n-1)^2}$, dan zullen, bij behoorlijke bepaling van k, deze twee vergelijkingen voor de waarde van x van den wortel gelden. De voorwaarde voor de bepaling van k brengen wij, door toepassing van $(1-x)+x=1$, onder de gedaante

$$\frac{n\sqrt{\left(\varepsilon_2+\frac{k}{n^2}\right)}}{n-1}+\frac{\sqrt{\varepsilon_1+\frac{k}{n^2}}}{n-1}=1$$

Waren nu voor het binair mengsel ε_1 en ε_2 zoodanig dat

$$\frac{n\sqrt{\varepsilon_2}}{n-1}+\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{n-1}=1$$

is, dan ligt het punt $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ op de parabool, en reduceert de geheele meetkundige plaats zich tot één punt. Maar dan blijkt dat voor den wortel van $\frac{d(\varphi''')}{dx}=0$ de grootheid $k=0$ moet zijn, en dat de waarde van x voor dezen wortel samenvalt met het punt, waarin de geheele meetkundige plaats is samengetrokken. Heeft ε_1 en ε_2 een zoodanige waarde, dat $\frac{n\sqrt{\varepsilon_2}}{n-1}+\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{n-1}<1$ is, dan ligt het punt $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ in de ruimte OPQ, en bestaat er een meetkundige plaats tusschen twee waarden x_1 en x_2. Vermeerderen wij dan ε_1 en ε_2 beide met $\frac{k}{n^2}$, dan kan $\frac{k}{n^2}$ zoo gekozen worden, dat aan den eisch van $\frac{d(\varphi''')}{dx}=0$ voldaan wordt, en dus aan:

$$\frac{n\sqrt{\varepsilon_2+\frac{k}{n^2}}}{n-1}+\frac{\sqrt{\varepsilon_1+\frac{k}{n^2}}}{n-1}=1$$

De vermeerdering van ε_1 en ε_2 met een gelijk bedrag, beteekent natuurlijk een verschuiving van het punt $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ in een richting, welke een hoek van 45° met de assen maakt, en wel zoo, dat de projectie van de verschuiving op elk der assen gelijk is aan $\frac{k}{n^2}$. Wij onderstellen k positief. De waarde van k vinden wij dus, door n^2 het bedrag te nemen dat de projecties van het punt in de genoemde

richting vergroot moeten worden om op de parabool te komen. Ligt het punt $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ in OPQ dan is k positief. Maar voor punten binnen de parabool is k negatief. Maar daar voor het geval, dat de gesloten meetkundige plaats bestaat, het punt $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ binnen OPQ moet liggen, hebben wij alleen met positieve waarde van k te doen. Wij hebben dus $x > \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{n-1}$ en $1 - x > \frac{n\sqrt{\varepsilon_2}}{n-1}$, en daar voor de waarden van x van de punten der meetkundige plaats de vergelijking geldt:

$$\frac{\frac{\varepsilon_1}{(n-1)^2}}{x} + \frac{\frac{n^2\varepsilon_2}{(n-1)^2}}{1-x} = 1$$

vinden wij na substitutie van $x > \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{n-1}$ en $1 - x > \frac{n\sqrt{\varepsilon_2}}{n-1}$

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{n-1} + \frac{n\sqrt{\varepsilon_2}}{n-1} < 1$$

een betrekking, die voor punten van de ruimte OPQ, beneden de parabool, dan ook bestaat.

Maar nu moet nog over de vergelijking, welke de waarde van x geeft voor de punten, waar $\frac{dv}{dx} = 0$ voor de gesloten kromme, deze opmerking gemaakt worden. Wij vonden voor deze vergelijking (φ''') den volgenden vorm:

$$n - 1 - n\sqrt{\left\{A - x\frac{dA}{dx}\right\}} \mp \sqrt{\left\{A + (1-x)\frac{dA}{dx}\right\}} = 0$$

of

$$(n-1) - nx\sqrt{\frac{c}{a}\left\{1 + \frac{1-x}{a}\frac{da}{dx}\right\}} \mp (1-x)\sqrt{\frac{c}{a}\left\{1 - \frac{x}{a}\frac{da}{dx}\right\}} = 0.$$

Zoeken wij de waarde van $\frac{a + (1-x)\frac{da}{dx}}{a}$ en van $\frac{a - x\frac{da}{dx}}{a}$, dan vinden wij daarvoor $\frac{a_2 - c(1-x)^2}{a}$ en $\frac{a_1 - cx^2}{a}$. Deze grootheden moeten positief zijn, omdat zij onder het wortelteeken voorkomen. En dit geeft een beperking voor de waarden van x, waarbij $\frac{dv}{dx} = 0$ kan zijn. Als $a_2 > c$ is, is de eerste der genoemde waarden voor alle waarden van $x = 0$ tot $x = 1$ positief. De grootheid $\frac{a_2}{c}$ is gelijk

aan $\frac{n^2(1+\varepsilon_2)}{(n-1)^2}$ en dus voor positieve ε_2 zeker grooter dan 1. De grootheid $a_1 - cx^2$ is positief, zoolang $x^2 < \frac{a_1}{c}$, en negatief voor $x^2 > \frac{a_1}{c}$. Is $\frac{a_1}{c} < 1$, dan kunnen dus waarden van x, welke dicht bij 1 liggen, niet voorkomen. Dit zal het geval zijn, zoodra $1 > \frac{a_1}{c}$ of $1 > \frac{1+\varepsilon_1}{(n-1)^2}$, of $n^2 - 2n > \varepsilon_1$. Stelt men de grootste waarde van x, waarbij nog $\frac{dv}{dx} = 0$ kan voorkomen $= x_g$, dan is $1 + \varepsilon_1 = x_g^2 (n-1)^2$ $\varepsilon_1 = x_g^2 (n-1)^2 - 1$, welke waarde voor ε_1 positief zijn moet.

Nu kunnen wij er toe overgaan aan te toonen, dat het minimum van (φ''') niet kan gegeven worden door den tweeden factor van $\frac{d(\varphi''')}{dx} = 0$, n.l. door $\frac{d^2A}{dx^2} = 0$; maar tegelijk dan ook een bewijs leveren voor de stelling, dat $\frac{dv}{dx} = 0$ alleen kan voorkomen bij volumes kleiner dan b_2. De grootheid $A = \frac{x(1-x)c}{a}$ begint met een waarde $= 0$ bij $x = 0$, en eindigt evenzeer met 0 bij $x = 1$. Er is dus een maximumwaarde, en uit $\frac{dA}{dx} = \frac{c\,[a_1(1-x)^2 - a_2x^2]}{a^2}$ vinden wij die bij $\frac{x}{1-x} = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}$. Bij die maximumwaarde van A is $\frac{d^2A}{dx^2} < 0$, en men zou licht geneigd zijn te vermoeden, dat dit over het geheele beloop van $x = 0$ af tot $x = 1$ toe het geval zal zijn. Toch is dit niet altijd het geval. In sommige gevallen komt er bij zekere waarde van x een buigpunt in de lijn, welke A voorstelt, en bij grootere waarde van x is $\frac{d^2A}{dx^2}$ dan positief. Rekenen wij $\frac{d^2A}{dx^2}$ uit, dan kunnen wij die grootheid onder den volgenden vorm brengen:

$$\frac{d^2A}{dx^2} = -\frac{2c}{a^3}\left\{a_1a_2 - c\,[a_1(1-x)^2 + a_2x^2]\right\}$$

En nu is het dus de vraag of $a_1a_2 - [a_1(1-x)^2 + a_2x^2]$ gelijk 0 kan zijn. Voor $x = 0$ is deze grootheid $a_1\,[a_2 - c]$ en daar $\frac{a_2}{c} = \frac{n^2(1+\varepsilon_2)}{(n-1)^2}$ is, zal bij positieve ε_2 de waarde van $a_2 - c$ zeker

positief zijn. Bijgevolg is $\frac{d^2A}{dx^2}$ voor $x=0$ negatief. Bij $x=1$ is deze grootheid $a_2(a_1-c)$ en daar $\frac{a_1}{c}=\frac{1+\varepsilon_1}{(n-1)^2}$ is, en $\frac{a_1}{c}-1=\frac{1+\varepsilon_1}{(n-1)^2}-1$, zullen wij bij kleine waarde van ε_1 en groote waarde van n daar een negatieve waarde voor kunnen bekomen. Zoodra $\varepsilon_1 < n^2-2n$ is, komt dit geval voor. Dan is er een waarde van x, waarbij $\frac{d^2A}{dx^2}$ het negatieve teeken verwisselt met het positieve. Nu hebben wij echter hierboven gezien, dat als $\varepsilon_1 < n^2-2n$ is, de waarde van $(\varphi''')=0$ niet over de geheele breedte van $x=0$ tot $x=1$ bestaanbaar is. En nu is het de vraag welke waarde van x grooter is; of de waarde waarbij φ''' onbestaanbaar wordt, of de waarde van x waarbij $\frac{d^2A}{dx^2}=0$ wordt. Wij kunnen dat onmiddellijk beslissen, door $x_g=\sqrt{\frac{a_1}{c}}$, de grenswaarde voor (φ''') bestaanbaar, te substitueeren in $\frac{d^2A}{dx^2}$. Wij vinden dan

$$\frac{d^2A}{dx^2}=-2\frac{c^3}{a^3}\left\{\frac{a_1}{c}\frac{a_2}{c}-\left[\frac{a_1}{c}(1-x)^2+\frac{a_2}{c}x^2\right]\right\}=$$

$$=-2\frac{c^3}{a^3}\left\{x_g^2\frac{a_2}{c}-x_g^2(1-x_g)^2-x_g\frac{a_1}{c}\right\}$$

of

$$\frac{d^2A}{dx^2}=-\frac{2c^3}{a^3}x_g^2(1-x_g)\left\{\frac{a_2}{c}-(1-x_g)\right\}$$

Daar $\frac{a^2}{c}>1$ is, en à fortiori $>(1-x_g)$, vinden wij $\frac{d^2A}{dx^2}$ nog negatief.

Ten slotte zullen wij nog door gebruik te maken van de verkregen waarden verifieeren kunnen, dat ook als de functie (φ''') niet over de geheele breedte van $x=0$ tot $x=1$ bestaanbaar is, en als dus onze conclusie dat deze functie een minimumwaarde, welke negatief is, moet bezitten, niet meer als bewezen mag beschouwd worden, er toch in dat geval evenzeer een wortel is voor $\frac{d(\varphi'')}{dx}=0$ bij een waarde van x, die kleiner is dan x, en die dus voor (φ''') de vroegere beteekenis heeft.

Voor den wortel van $\frac{d(\varphi''')}{dx}=0$ geldt de vergelijking:

$$\frac{a_2 - n^2 a_1}{c} = (1-x)^2 - n^2 x^2 \text{ (zie pag. 444)}$$

en als $\frac{a_1}{c} = x_g^2$ gesteld wordt geldt dus ook:

$$\frac{a_2}{c} - (1-x_g)^2 = (1-x)^2 - (1-x_g)^2 + n^2 (x_g^2 - x^2)$$

of

$$\frac{a_2}{c} - (1-x_g)^2 = (x_g - x)\{2 + (n^2-1)(x_g + x)\}$$

en daar $\frac{a_2}{c} - (1-x_g)^2$ positief is, moet dus ook $(x_g - x)$ positief zijn of de wortel van $\frac{d(\varphi''')}{dx} = 0$ ligt bij kleinere waarde van x dan die van het eindpunt van (φ'''). Bij het eindpunt is $(\varphi''') = 0$. Bij $x = 0$, is (φ''') positief. Bij de tusschen inliggende minimumwaarde is (φ''') dus negatief.

Aan de functie $\varphi''' = 0$, de betrekking, welke de waarde van x leert kennen voor de punten, waarin $\frac{dv}{dx}$ voor de gesloten kromme gelijk 0 is, moet ook voldaan worden door de waarde van x van het punt, waarin de gesloten kromme tot een enkel punt is samengetrokken. Wij hebben om dat aan te toonen in:

$$(n-1) - nx\frac{c}{a}(1-x)\sqrt{\left[\frac{a_2}{c(1-x)^2} - 1\right]} - (1-x)\frac{xc}{a}\sqrt{\frac{a_2}{cx^2} - 1} = 0$$

de waarde $x = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{n-1}$ en $(1-x) = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{n-1}$ te substitueeren, waarbij blijkt dat dan aan deze vergelijking voldaan wordt. Dat wij alleen het teeken — voor den derden term behouden is in overeenstemming met ons besluit dat voor de geheele kromme $v < b_2$ is. En dat voor het geisoleerde punt, — het punt, waarin de geheele kromme zich heeft samengetrokken, — ook aan $\frac{dv}{dx} = 0$ moet voldaan worden, volgt uit de omstandigheid, dat voor zulk een punt $\frac{dv}{dx}$ een willekeurige waarde heeft. De grootheid $\frac{a}{cx(1-x)} = \frac{1}{A}$ is gelijk aan

$$\frac{a_1(1-2(+a_2x - cx(1-2)}{cx(1-x)} = \frac{a_1}{cx} + \frac{a_2}{c(1-x)} - 1 = \frac{1+\varepsilon_1}{(n-1)\sqrt{\varepsilon^1}} + \frac{n(1+\varepsilon_2)}{(n-1)\sqrt{\varepsilon_2}} - 1$$

of

$$\frac{a}{cx(1-x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} + \frac{n}{\sqrt{\varepsilon_2}}}{n-1}$$

Verder is $\sqrt{\frac{a_2}{c(1-x)^2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_2}}$ en $\sqrt{\frac{a_1}{cx^2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_1}}$.

Deze waarden substitueerende vinden wij:

$$(n-1) - \frac{(n-1)}{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} + \frac{n}{\sqrt{\varepsilon_2}}} \left[\frac{n}{\sqrt{\varepsilon_2}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\right] = 0$$

Schrijven wij de vergelijking der gesloten kromme onder de volgende gedaante:

$$\left(\frac{v}{b}\right)^2 (1-A) - 2\frac{v}{b} + (1+B) = 0,$$

door B voorstellende $\frac{\left(\frac{db}{dx}\right)^2 x(1-x)}{b^2} = \frac{(n-1)^2 x(1-x)}{(1-x)^2 + 2nx(1-x) + n^2x^2}$.

Zoeken wij de punten dezer kromme, waarvoor $\frac{d\frac{v}{b}}{dx} = 0$ is. Een dusdanig punt ligt voor den tak der kleine volumes rechts van het punt, waarvoor $\frac{dv}{dx} = 0$ is, en voor den tak der grootere volumes links. Als voorwaarde vinden wij, door de vergelijking der kromme, in den laatst gegeven vorm naar x te differentieeren, en $\frac{v}{b}$ constant te houden:

$$-\left(\frac{v}{b}\right)^2 \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx} = 0,$$

of

$$\frac{v}{b} = + \frac{\sqrt{\frac{dB}{dx}}}{\sqrt{\frac{dA}{dx}}},$$

waaruit blijkt, dat voor zulke punten $\frac{dA}{dx}$ en $\frac{dB}{dx}$ hetzelfde teeken zullen moeten hebben. Nu is $\frac{dA}{dx} = \frac{c\{a_1(1-x)^2 - a_2x^2\}}{a^2}$ en voor $\frac{dB}{dx}$

vinden wij de waarde $\frac{(n-1)^2\{(1-x)^2-n^2x^2\}}{(1-x+nx)^4}$. Dus $\frac{1-x}{x} \lessgtr \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}$ moet gepaard gaan met $\frac{1-x}{x} \lessgtr \frac{1}{n}$; of gelijktijdig moet gelden $\frac{x}{1-x} \lessgtr \frac{1}{n}$ en $\frac{x}{1-x} \lessgtr \frac{1}{n}\sqrt{\frac{1+\varepsilon_1}{1+\varepsilon_2}}$. Waar het van afhangt of $\frac{dB}{dx}$ en $\frac{dA}{dx}$ positief of negatief zijn, zien wij in als wij de verkregen waarde van $\frac{v}{b}$ in de vergelijking der kromme substitueeren. Schrijven wij deze als volgt:

$$\left(\frac{v}{b}-1\right)^2 = A\left(\frac{v}{b}\right)^2 - B$$

dan vinden wij

$$\left(\sqrt{\frac{\frac{dB}{dx}}{\frac{dA}{dx}}}-1\right) = \pm\sqrt{\frac{A\frac{dB}{dx}-B}{\frac{dA}{dx}}}$$

of

$$\left(\sqrt{\frac{\frac{dB}{dx}}{\frac{dA}{dx}}}-1\right) = \sqrt{\frac{A^2}{\frac{dA}{dx}}\frac{d\left(\frac{B}{A}\right)}{dx}}$$

En daar $\frac{B}{A} = \frac{(b_2-b_1)^2}{c}\frac{a}{b^2}$ is, en $\frac{a}{b^2} = 27\,p_{kr}$ is, blijkt $\frac{dA}{dx}$ en dus ook $\frac{dB}{dx}$ hetzelfde teeken te bezitten als $\frac{dp_{kr}}{dx}$. Is dus $\frac{a_2}{b_2^2} > \frac{a_1}{b_1^2}$ of $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ dan is $\frac{dA}{dx}$ en $\frac{dB}{dx}$ positief en omgekeerd. De lijn die in fig. 36 den hoek der assen middendoor deelt of in fig. 37 het punt O' met het punt O verbindt geeft scheiding tusschen $\varepsilon_2 \gtrless \varepsilon_1$. Voor $\frac{dp_{kr}}{dx} > 0$, is $p_{kr_2} > p_{kr_1}$ of $\frac{a_2}{b_2^2} > \frac{a_1}{b_1^2}$ en $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Voor alle punten, rechts van deze lijn gelegen, is dit het geval — en omgekeerd. Voor de punten van die lijn zelve is $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ of $\frac{dp_{kr}}{dx} = 0$. Maar dan is ook $\frac{dA}{dx}$ en $\frac{dB}{dx} = 0$ en dus $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{n}$, of wat dan hetzelfde is, $\frac{x}{1-x} = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{1+\varepsilon_1}{1+\varepsilon_2}}$.

Maar, gelijk reeds hierboven is opgemerkt, dit eischt dat in de formule $a_{12}^2 = l^2 a_1 a_2$ de waarde l^2 grooter is dan 1. Voor $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ is $l^2 n^2 (1 + \varepsilon_1)^2 = \left[n + \frac{1 + n^2}{2} \varepsilon_1 \right]^2$ of $l n (1 + \varepsilon_1) = n + \frac{1 + n^2}{2} \varepsilon_1$.
Wij hebben dan:

$$l = \frac{1 + \frac{1 + n^2}{2n} \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1}$$

of

$$l - 1 = \frac{(n - 1)^2}{2n (1 + \varepsilon_1)} \varepsilon_1 .$$

Nu geldt voor de ruimte OPQ, beneden de parabool,

$$(1 + n) \sqrt{\varepsilon_1} \leqq n - 1$$

en dus ε_1 kan als grootste waarde gelijk worden aan $\left(\frac{n - 1}{n + 1}\right)^2$ en bijgevolg $(l - 1)_{max} = \frac{(n - 1)^4}{4n (n^2 + 1)}$. Voor niet zeer groote waarde van n is $l - 1$ slechts klein. Bijvoorbeeld voor $n = 2$ is $l - 1 = \frac{1}{40}$ Voor $n = 3$ is $l - 1 = \frac{2}{15}$. Maar bij groote waarde van n is dit niet meer het geval. Wij behoeven echter in geen geval te vreezen, dat l zoo groot zal worden, dat $a_1 + a_2 - 2 a_{12} < 0$ zou worden. Opdat $c > 0$ zij, moet gelden:

$$2 a_{12} < a_1 + a_2$$

of

$$2 l \sqrt{a_1 a_2} < a_1 + a_2$$

of

$$2 l < \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} + \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}$$

of

$$2 l < \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2}} + n \sqrt{\frac{1 + \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_1}} .$$

of in ons geval

$$2l < n + \frac{1}{n}$$

of

$$(l - 1) < \frac{(n - 1)^2}{2n}$$

Nu is

$$(l-1) = \frac{(n-1)^2}{2n} \frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}.$$

Bijgevolg blijft ook $(l-1)_{max}$ beneden de waarde, welke $a_1 + a_2 - 2a_{12}$ gelijk 0 zou maken.

Maar nu, alvorens over te gaan tot het vergelijken van de hier verkregen uitkomsten met die van het experiment, schijnt mij de tijd gekomen om de vraag te stellen, of het wegvallen van de snijding van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ inderdaad met zich medebrengt het wegvallen van de complicatie in de spinodale lijn — en of dus de temperatuur, waarbij de beide genoemde krommen elkander raken, ook tegelijk de temperatuur is, waarbij het paar *heterogene* plooipunten, in de spinodale lijn aanwezig, samenvallen. Bij het tot elkander naderen van de snijpunten der beide krommen zullen zeker ook de beide *heterogene* plooipunten tot elkander naderen. Maar daaruit behoeft niet te volgen, dat als de snijpunten samenvallen ook het paar plooipunten samenvalt. En à priori is het onwaarschijnlijk, dat dit het geval zou zijn. Het al of niet bestaan van snijpunten hangt alleen af van eigenschappen van de beide krommen, zonder dat een derde kromme $\frac{d^2\psi}{dxdv} = 0$ daarop eenigen invloed kan uitoefenen. Maar de loop der spinodale lijn is het resultaat van eigenschappen èn van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ èn van $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ èn van $\frac{d^2\psi}{dxdv} = 0$; reeds daaruit laat zich verwachten, dat als de krommen $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ elkander raken, de twee *heterogene* plooipunten op de spinodale lijn aanwezig zullen zijn, en zich op zekeren afstand van elkander zullen bevinden. Is dit zoo, dan beteekent dit, dat de temperatuurgrenzen voor het ontstaan en voor het verdwijnen der heterogene plooipunten wijder uiteenliggen dan de temperaturen, waarbij de twee krommen $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ beginnen en ophouden elkander te snijden; en à fortiori is dit het geval met de temperatuurgrenzen voor het zich al of niet vertoonen op de binodale lijn, en dus ook met de temperatuurgrenzen voor het bestaan van driephasendruk. En dat dit zoo is, is in te zien als men nauwkeuriger nagaat de eigenaardigheden, welke voorkomen in den loop der spinodale lijn in het geval dat de beide krommen elkander nog snijden. Denken wij ons de omstandigheden zooals in fig. 12 Dl. XV p. 930, Bijdrage III,

[illegible]

tegelijk daar een buigpunt bezit, maar op een q-lijn welke links van deze gelegen is, en waar ook p een grootere waarde heeft; terwijl dat plooipunt, daar $\frac{d^2v}{dx^2}_p$ steeds positief is, beneden het buigpunt der q-lijn moet liggen. Natuurlijk, maar dat is voor ons betoog niet noodig, dat er nu, ook aan de linkerzijde van $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, nog een tweede plooipunt aanwezig moet zijn, opdat voor punten der spinodale lijn met zeer kleine x, de raking der p- en q-lijnen weder zoodanig geschieden moet dat de p-lijn weder geheel aan dezelfde zijde der q-lijn blijft, welke wij ook nu de benedenzijde kunnen noemen. In dat tweede plooipunt moet dus de p-lijn, van rechts komende, eerst boven de q-lijn, welke zij raken zal, loopen, om van af het raakpunt er beneden te gaan loopen. Wat voor ons betoog wel essentieel is, is de omstandigheid, dat het eerst genoemde plooipunt, het bovenste van het paar heterogene plooipunten, dat ik in een vroegere Bijdrage het realiseerbare genoemd heb, al verdient het dien naam eerst ten volle, wanneer het ook boven de binodale gelegen is, ligt op een isobare van hooger bedrag van den druk, dan de waarde van p welke in het punt aanwezig is, waarin $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ het kleinste volume heeft. En denken wij nu het geval, dat de geheele gesloten kromme, waarvan hierboven sprake was, zich tot een enkel punt heeft samengetrokken, en de snijding der beide krommen $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ is weggevallen, en de q lijn in dat enkele punt evenwijdig aan de x-as loopt en daar een buigpunt bezit, dan bestaat dat realiseerbare plooipunt nog, en dus ook het andere, het verborgene. A fortiori is dat het geval, als de gesloten kromme nog bestaat, en de snijding der beide krommen, $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ alleen daarom weggevallen is, omdat zij elkander raken. Want dan zal de q lijn, welke door het raakpunt gaat, nog de punten met maximum en minimumvolume bezitten, en liggen beneden de q lijn, waar deze zijn samengevallen.

Wij zijn dus gerechtigd tot de volgende grafische voorstelling. Nemen wij een x-as en een p-as. Stellen wij een figuur samen, ten eerste aangevende de drukking langs den vloeistoftak der lijn $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ en ten tweede de drukking langs den vloeistoftak der spinodale lijn. Wij zullen om de redeneering niet al te veel te onderbreken de andere takken met stilzwijgen voorbij laten gaan, en ons daarenboven

beperken tot ons geval, waarin $T_{k_2} > T_{k_1}$ is. Dan is de eerstgenoemde lijn een voortdurend dalende lijn. Zijn de temperaturen laag — volgens de benaderde toestandsvergelijking beneden $^{27}/_{32}\, T_k$ — dan zijn al de punten dezer lijn beneden de x-as gelegen. Maar daar wij ons alleen willen bezighouden met den relatieven stand der twee voor te stellen krommen, zien wij van de absolute hoogte, waarop wij ze geteekend denken, af. De tweede lijn begint en eindigt even hoog als de eerste en blijft steeds daarboven. Deze is dus in hoofdzaak eveneens een sterk dalende lijn. Zijn er nu op de eerste lijn twee punten, aangevende de snijpunten der lijn $\frac{dp}{dv} = 0$ met $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$, dan zal de tweede lijn niet meer voortdurend dalen, maar een minimum- en een maximumwaarde voor p bezitten. De minimumwaarde bij een waarde van x, welke kleiner is dan de waarde van x van het eerste snijpunt, en de maximumwaarde bij een waarde van x, die grooter is dan die van het tweede snijpunt. Deze minimum- en maximumwaarden zijn die van het paar *heterogene* plooipunten. Zijn de twee snijpunten op de eerstgenoemde lijn samengevallen, dan is op de tweede minimum- en maximumdruk nog aanwezig. En eerst bij een temperatuur, waarbij er of nog geen sprake is van raking der beide krommen $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$, of waarbij die raking al lang voorbij is, zal de complicatie in den gang der p lijn voor de spinodale verdwenen zijn. Op het oogenblik van het verdwijnen, bezit deze p lijn in het punt, waarin maximum- en minimumdruk samenvallen, een horizontale raaklijn en een buigpunt. Teekende men verder in zulk een figuur nog een derde lijn, aangevende de drukking langs de binodale, dan zou die derde lijn een ingewikkelde gedaante bezitten — maar daaromtrent vergenoeg ik mij met te verwijzen naar een paar Mededeelingen voorkomende in Verslag K. A. v. W. van het jaar 1905.

Maar uit dit alles besluiten wij dan verder, dat het niet noodig is dat de twee krommen $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ en $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ elkander snijden, voor het optreden van het paar heterogene plooipunten op de spinodale lijn. Als zij maar dicht genoeg tot elkander naderen, kan de spinodale lijn de beschreven complicatie reeds bezitten, en kan er zelfs driephasendruk aanwezig zijn.

Hieruit volgt dat de aanwezigheid der heterogene plooipunten voor mengsels, waarvan de eigenschappen der componenten, worden voorgesteld behalve door n, door positieve ε_1 en ε_2, niet beperkt blijven voor ε_1 en ε_2 tot de ruimte OPQ beneden de parabool. Maar dat

deze ruimte moet uitgebreid worden met een gedeelte van de parabool zelve — een gedeelte dat in de nabijheid van den top gelegen is. De theoretisch juiste gedaante van dat gedeelte kan alleen bepaald worden door onderzoek van de spinodale lijn zelve. Maar bij de bezwaren, die dat onderzoek medebrengt, zal ik mij hier vergenoegen met een aanwijzing van de wijze, waarop ik, voor mij zelven, mij een denkbeeld heb willen vormen van de juistheid mijner verwachtingen, dat dit gedeelte weder approximatief zou begrensd zijn door een parabool, die, vergeleken bij de vorige, verschoven zou zijn in de richting der as, al mag het volgende als niet veel meer beschouwd worden dan een zeker soort van empirische berekening. Wanneer de kromme $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ geheel ligt binnen $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$, maar in de nabijheid van de laatste kromme, dan zullen twee andere krommen n.l. $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ bij lagere temperatuur en $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ bij een andere nog lagere temperatuur, snijding en raking kunnen vertoonen in de ruimte buiten $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$, waar de spinodale ligt en waar het paar heterogene plooipunten aanwezig is, op zekeren afstand van elkander of samenvallend.

Neemt men in $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$ de lagere temperatuur $T' = \frac{T}{k}$ en in $\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$ de waarde der lagere temperatuur $T'' = \frac{T}{k'}$, dan wordt door eliminatie van T verkregen de vergelijking, die met kleine verandering overeenkomt met (2) van Bijdrage X:

$$v^2 \left\{ 1 - x(1-x)\frac{k'}{k}\frac{\frac{d^2a}{dx^2}}{2a} \right\} - 2bv + \left\{ b^2 + x(1-x)\left(\frac{db}{dx}\right)^2 \right\} = 0.$$

Behandelt men nu deze vergelijking op dezelfde wijze als in Bijdrage X met (α) is geschied, dan verkrijgt men voor het geval dat de gesloten kromme zich tot één punt samentrekt, tot voorwaarde:

$$n - 1 = \sqrt{\left(\varepsilon_1 - \frac{k' - k}{k}\right)} + n\sqrt{\left(\varepsilon_2 - \frac{k' - k}{k}\right)}.$$

Dus dezelfde parabool van vroeger, alleen in de richting der beide assen, verschoven met een bedrag gelijk aan $\frac{k' - k}{k}$.

De waarde van T waarbij de nagebootste plooipunten in deze berekening samenvallen is nu k of k' maal hooger.

(Wordt vervolgd)

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan van den Heer A. KEESING; *„Over plooipuntstemperaturen van het stelsel water-phenol"*.

(Medeaangeboden door den Heer P. ZEEMAN).

Het stelsel water-phenol bezit volgens waarnemingen van LEHFELDT, V. D. LEE en SCHREINEMAKERS bij lage temperaturen maximum druk. Theoretisch was dus een minimum kritische temperatuur te verwachten, maar daar water vaker abnormale afwijkingen vertoont, was een beslissend onderzoek wenschelijk. Met het oog op de hooge kritische temperaturen der componenten (water 365°,0 volgens CAILLETET en COLARDEAU, of 364°,3 volgens BATTELLI; phenol 419°,2 volgens RADICE) en de onmogelijkheid om glazen proefbuizen te gebruiken, (glas lost bij die hooge temperatuur in water op) had een dusdanig onderzoek voor zoover bekend vroeger niet plaats gehad. Experimenteerende op soortgelijke wijze als door SCHAMHARDT [1]) is aangegeven, ben ik er in geslaagd in dezen tot een voorloopig resultaat te komen.

Daar ik geen CAILLETET buis, doch kleine gesloten proefbuisjes van *kwarts* noodig had, waarin druk noch volume geregeld konden worden, gebruikte ik een kookvat, dat ook van onderen van glas was, en dat op geasbesteerd ijzergaas rustte. Dientengevolge kon één der beide nickeline-draadwikkelingen, n.l. die, welke SCHAMHARDT bezigde om zijn kookvloeistof te verwarmen, vervallen, en door eenen BUNSEN'schen brander worden vervangen. De tweede wikkeling, waarmee hij de uitstraling bij temperaturen tusschen 200° en 300° voldoende vermocht tegen te gaan, bleek echter onvoldoende voor temperaturen tusschen 350° en 400°. Een tweede asbestlaag om de draadwikkeling heen gaf eenige verbetering, maar afdoende bleek de uitstraling pas tegengegaan toen ik een van binnen verzilverden glazen cylinder, waarin een tweetal aflezingsspleten waren opengehouden, rond om de aldus omwikkelde kookbuis plaatste. Deze cylinder, met een diameter 5 centimeter grooter dan die van de kookbuis, was aan boven- en onderzijde door asbestwol afgesloten.

Het vinden van een kookvloeistof ging niet zonder bezwaren, daar in de Phys. Chem. tabellen van LANDOLT-BÖRNSTEIN geen kookvloeistoffen boven 360° opgegeven worden. Ik gebruikte *benzidine*, een inactieve stof, die bij 1 atmosfeer druk by $\pm$ 400° met kleurloozen damp kookt. Men neme echter in acht dat:

1°. Chemisch zuivere benzidine worde gebruikt, daar onzuivere

---

[1]) H. C. SCHAMHARDT. Isothermen van mengsels van benzol en aether. Ac. Proefschr. pag. 12 –16.

benzidine onregelmatig kookt, en kookvat, kwartsbuis en thermometer met een taaie, teerachtige, de waarneming geheel belemmerende laag overdekt, die ik door langdurig koken met water en benzol ten deele slechts kon verwijderen,

2°. onder stikstof gekookt worde, daar zuivere benzidine door de zuurstof van de lucht spoedig verontreinigd wordt,

3°. de kookvertraging, die de vloeibare benzidine bijwijlen $1^1/_2$ decimeter in de kookbuis doet opstijgen, worde tegengegaan door een flinke hoeveelheid glaswol.

Bij het gebruik van benzidine bleek een koeler overbodig, daar de damp in de vernauwing van het kookvat condenseerde.

Daar de benzidine onder stikstof verwarmd werd, had ik een stikstof-reservoir noodig. Daarvoor diende een 100 L. mandflesch, welke gevuld werd met stikstof, verkregen uit een verzadigde oplossing van gelijke gewichtsdeelen kaliumnitriet en ammoniumchloride. Was het reservoir eenmaal gevuld, dan kon de stikstof, door het toelaten van water, uit de mandflesch gedreven en via een droogtoestel naar de kookbuis gevoerd worden. De druk in het reservoir werd door een manometer gemeten.

De eigenlijke experimenten begonnen met de vulling van het stikstof-reservoir. Daarna werd phenol en water in de gewenschte verhouding afgewogen, bijeengevoegd en in een spiritusvlam verwarmd. De temperaturen waarbij water en phenol niet mengen bleken dan overschreden, en er ontstond een homogene vloeistof. Een aan de eene zijde gesloten, en aan de andere zijde tusschen gloeiende koolspitsen capillair uitgetrokken dikwandig kwartsbuisje werd nu in de vrije vlam verwarmd, en de lucht onder de phenolwater oplossing uitgedreven; de vloeistof steeg dan op in het buisje, dat voor ruim $^1/_3$ gevuld werd, en daarna in het koolspitsenlicht dichtgesmolten. Het kwarts bleek hierbij zeer geschikt materiaal te zijn. Het is even helder en doorzichtig als glas, doch kan, als het warm is, in koud water worden afgekoeld zonder te barsten; het kan in een vrije vlam worden verwarmd en is bestand tegen hooge drukken, zooals de kritische druk van water, n.l. 200 atmosferen. Het nemen van beveiligingsmaatregelen was dus, achteraf gezien, wellicht minder noodzakelijk.

Thermometer en kwartsbuis werden door middel van koperdraadjes bevestigd in een gaatje van de glazen buis, die de luchtdichtafsluitende caoutchouc stop van het kookvat doorboort. De toestellen werden met stikstof gevuld, de druk in het kookvat tot ongeveer 30 c.M. gereduceerd, de gasbrander aangestoken, en om de vijf minuten een

lamp ingezet van den lampenweerstand, waarmede de voor uitstraling noodige stroom geregeld werd. Na een uur wees de thermometer ongeveer 350° aan. Zoodra deze temperatuur constant was geworden, wat ook bleek uit het eindigen der kookverschijnselen in het kwartsbuisje, werd geleidelijk stikstof toegelaten. De meniscus begon dan langzamerhand flauwer te worden. Door de achter de spleet geplaatste gloeilampjes leek de binnenwand van het kwartsbuisje een lichtstreep, waarin de meniscus een keepje maakte. Door het oog vóór dit keepje heen en weer te verplaatsen, kon ik het aanwezig-zijn van den vloeistofspiegel zoo lang mogelijk constateeren. De temperatuur, waarop de meniscus verdween, werd genoteerd; evenzoo de temperatuur waarop, na drukverlaging in het kookvat, de vloeistofspiegel wederkeerde.

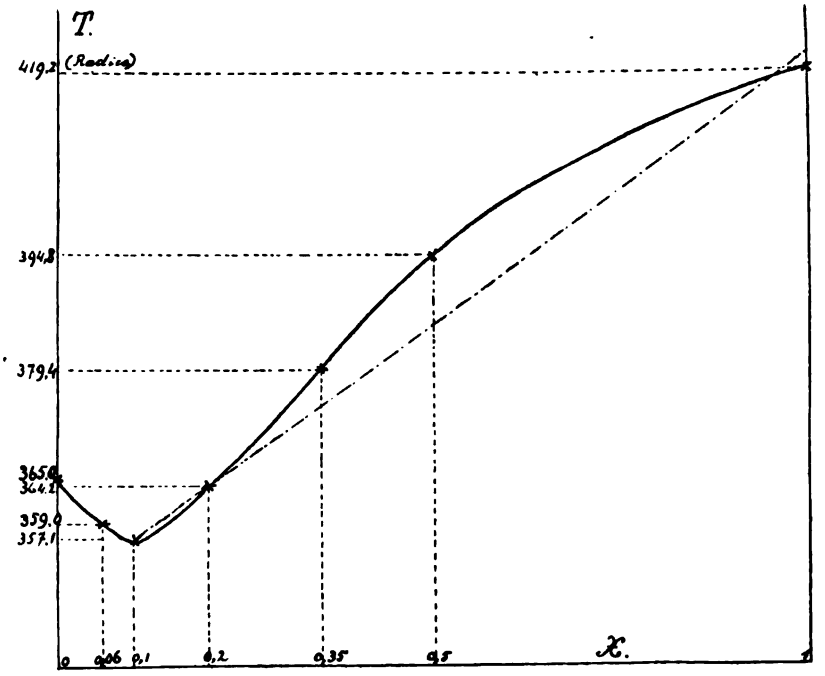
Eerst werd bepaald de T_k van het mengsel $x = 0{,}1$; dit gaf, vergeleken met de waarnemingen van CAILLETET en COLARDEAU, een *daling* van 8° in de kritische temperatuur. Er moest dus stellig een minimum in de Tx plooipuntslijn aanwezig zijn.

Om te zien of de daling zich zou voortzetten, werd vervolgens $x = 0{,}2$ bepaald; gevonden werd ± 364°; de T_k, alhoewel stijgende, was nog *beneden* de waarde, door CAILLETET voor $x = 0$ aangegeven. Om de plaats van het minimum nauwkeuriger te bepalen werden vervolgens onderzocht de eerste component ($x = 0$) en het mengsel $x = 0{,}06$; ten slotte ook, met het oog op den loop van de plooipuntslijn voorbij het minimum, $x = 0{,}5$ en $x = 0{,}35$.

De waarnemingen zijn in de onderstaande tabel vereenigd; ze zijn herleid op een door de Reichsanstalt geijkten thermometer, die bij 300° geen afwijking vertoont, doch bij 400° één graad te laag wijst.

X	De meniscus verdween bij	De meniscus kwam terug bij	De meniscus verdween ten tweede male bij	De meniscus kwam wederom terug bij
0	365.0	363.9	365.0	364.2
0.06	359.0	358.5	359.0	358.4
0.1	357.0	356.0	357.1	356.0
0.2	364.2	363.0	364.1	363.3
0.35	379.4	378.0	379.3	378.0
0.5	394.8	393.8	394.8	393.9
1	419.2 volgens Radice			

Grafisch voorgesteld krijgen wij de volgende Tx projectie van de plooipuntslijn:



Uit deze graphische voorstelling volgt:

1°. dat het stelsel water-phenol inderdaad een minimum plooipuntstemperatuur bezit,

2°. dat deze gelegen is in de buurt van $x = 0{,}1$. Nu heeft SCHREINEMAKERS gevonden dat het mengsel $x = 0{,}011$ maximumdruk bezit bij 56°, het mengsel $x = 0{,}015$ bij 75° en $x = 0{,}019$ bij 90°. Deze waarnemingen wijken af van de theorie, daar het maximumdrukpunt zich bij hoogere temperatuur niet naar rechts, doch naar links beweegt. Kiezen wij echter één van SCHREINEMAKERS' waarnemingen, onverschillig welke, dan is wederom in overeenstemming met de theorie het feit dat de minimum plooipuntstemperatuur gelegen is bij een x die *grooter* is dan die van de mengsels, waarbij nog maximum druk mogelijk is.

3°. Daar de uiteinden der ordinaten behoorende bij de abscissen $x = 0.1$, $x = 0.2$ en $x = 1$ nagenoeg op een rechte lijn liggen, terwijl die behoorende bij $x = 0.35$ en $x = 0{,}5$ daarvan duidelijk verwijderd zijn, moet er besloten worden tot de aanwezigheid van een *buigpunt* in de Tx projectie der plooipuntskromme. Het is questieus of hieraan al dan niet physische beteekenis kan worden gehecht.

Ten slotte dien ik te vermelden dat ik bij deze waarnemingen nog geen electromagnetische roerinrichting gebruikt heb, waartoe echter zal kunnen worden overgegaan zoodra een kwartsroerder van voldoend kleine doorsnee gereed is.

Amsterdam, *Natuurkundig Laboratorium.*

Plantkunde. — De Heer S. H. Koorders biedt een mededeeling aan: *Enkele systematische en plantengeographische opmerkingen over de javaansche Casuarinaceae, vooral van 's Rijks Herb. te Leiden en Utrecht.* (Bijdrage tot de kennis der Flora van Java. N°. III). [1])

§ 1. Casuarina equisetifolia, Forst.

§§ 1. Geogr. verspreiding buiten Java: Volgens Hook, Flora Br. Ind. V. 598: in Voor-Indië aan de Oostzijde van de golf van Bengalen, ten Zuiden van Chittagong, in den Maleischen Archipel, in Polynezië en in Australië. In 's Rijks Herb. te Leiden zag ik evenwel o.m. ook specimina uit Madagaskar, Mauritius, Bourbon en Senegambië, zonder dat evenwel uit de herbariumetikette met zekerheid bleek, dat het wildgroeiende exemplaren waren. In Herb. Leiden ligt de soort ook uit Hawai en Nieuw-Holland, waarbij één van twee, naar mij schijnt, geheel gelijke specimina (van Sieber) uit Nieuw-Holland door Miquel als *C. equisetifolia* Forst. en een ander voor *C. leptoclada* Miq. gedetermineerd is. In Diels [Die Planzenwelt von West-Australiën südlich des Wendekreises (1906)] wordt alleen het voorkomen van eenige andere *Casuarina*-Arten, niet echter van *C. equisetifolia* vermeld. Prof. Dr. L. Diels had de welwillendheid mij ter zake het volgende mede te deelen. „Casuarina equistifolia kommt in West-Australiën sicher nicht vor. Ob er in Ost-Australiën wächst habe ich persönlich nicht festgestellt, da ich mich dort nur kürzere Zeit aufhielt. Das von Ihnen erwähnte Exemplar, leg. Sieber, stammt aus der Gegend von Sydney, denn dort hat Sieber gesammelt." (Diels msc. 21. IV. 1908). Uit den Maleischen Archipel zag ik *C. equisetifolia* buiten Java o.m. van de volgende plaatsen in Herbaria te Leiden en Utrecht vertegenwoordigd: [1]) Sumatra (leg. Korthals; Teijsmann & de Vriese). Timor (Forbes n. 3746), Molukken (Reinw.), Noord-Nieuw-Guinea (Expeditie Wichmann, determ. Valeton). De Sumatraansche exemplaren van Korthals hebben meestal 8 tanden, zooals Miquel reeds bij die specimina aanteekende. In N. O. Celebes werd de soort in wildgroeienden toestand niet gevonden; dáár vond ik alleen *C. Rumphiana* Miq. in het wild [2]).

§§ 2. Geogr. verspreiding en standplaatsvoorwaarden op Java: Door mij is *C. equisetifolia* in Java nergens wild-

[1]) Vervolg van Verhand. Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam. Tweede Sectie. Dl. XIV. (1908). N°. 4.

[2]) Koorders, S. H., Eerste Overzicht d. Flora N. O. Celebes (1898) 616; vergel. Koorders en Valeton. Bijdrage Booms. Java X. (1904) 172 (Mededeelingen Lands Plantent. n°. 19 en 68).

groeiend aangetroffen behalve in West-Java in het Z. W. der residentie Banten in de afdeeling Tjaringin bij het dorp Tjemara en aldaar uitsluitend op zandig zeestrand, op een landtong (= oedjoeng, maleisch) op 0 M. zeehoogte, op die plaats gezellig groeiend.

Dit dient ter verbetering van de in KOORD en VALETON Booms. Java X (1904) p. 273 (regel 12 van boven) vermelde onjuiste opgave „*Tjemara (Banten) altit.* 200 *M. supra mare.*"

JUNGHUHN zegt in zijn Java. I. 2de uitg. (1853) 272: „Hielden wij ons bezig met eene beschouwing van Soematra, dan zouden wij onder de groepsgewijs in de strandbosschen groeiende boomen een plaats behooren in te ruimen aan de Tjemara laoet: *Casuarina equisetifolia* Forst (*muricata* Roxb); nergens echter heb ik de strand-Casuarina op Java aangetroffen, hoewel mij door inboorlingen is verzekerd, dat zij op eenige plaatsen aan de noorderkust van Krawang wordt gevonden" (JUNGHUHN l.c.). Het bleek mij echter, dat JUNGHUHN er vermoedelijk later in geslaagd is deze soort op Java wildgroeiend en wel op den Lawoe te vinden, hoewel ik in geen publicatie over deze geographisch interessante vondst iets kon vinden. Mijn meening grondt zich op een eigenhandig door JUNGHUHN als volgt geëtiketteerd specimen *Casuarina equisetifolia, E monte Lawú ubi sponte crescit*". Dat specimen moet blijkens een eigenhandig door MIQUEL geschreven determinatie-etikette inderdaad voor *C. equisetifolia* FORST. gehouden worden. Ik vond dit specimen in 's Rijks Herbarium te Leiden, geregistreerd als H. L. B. n. 10 (899—173). De juistheid der determinatie van JUNGHUHN en van MIQUEL kan ik bevestigen, want ik vond aan de jonge twijgen van dit reeds vruchtdragende JUNGHUHN'sche exemplaar bij 14 onderzochte bladkransen 7 vaginaaltanden in 13 gevallen en 6 vaginaaltanden in 1 geval, en bij de vrucht 12 overlangsche rijen. Er kan dus geen twijfel zijn, dat dit JUNGHUHN'sche exemplaar van het Lawoe-gebergte niet volkomen conspecifisch is met de strand-Casuarina (*C. equisetifolia* FORST.), temeer omdat ook alle overige kenmerken, bijv. de diep-gegleufde $^1/_2$—$^3/_4$ cm. lange en $^1/_2$ mm. dikke intermodien, enz. volkomen met die soort overeenstemmen. Dit is het eerst waargenomen phytogeographisch zeer interessante geval, dat de strand Casuarina, (*C. equisetifolia*) in het gebergte van Java wildgroeiend voorkomt. De, naar ik vermoed, boven 1600 meter gelegen zeehoogte van deze vindplaats is echter door JUNGHUHN op zijne boven geciteerde etikette niet vermeld. De overige door mij in 's Rijks Herb. te Leiden en Utrecht aangetroffen javaansche exemplaren zijn: „Java aan het strand bij Batavia en Anjol (leg. JUNGH.); Java (KORTH.; REINW.; TEIJSM.). In het Herb. te Buitenzorg liggen blijkens KOORD. en VALETON

[Bijdr. Booms. Java X (1904) 271] eenige exemplaren van het Rahoen-Idjen-gebergte in Oost-Java, die meestal 8 vaginaal tanden bezitten. Deze Idjen-plateau-exemplaren schijnen mij toe wellicht met evenveel recht tot *C. equisetifolia* gebracht te kunnen worden als zulks reeds door MIQUEL (zie boven) voor de meestal 8-tandige strand-Casuarina van Sumatra's Westkust en in KOORD. en VALETON (l. c. 271) voor de meestal 7—8-tandige strand-Casuarina van Z.W. Banten in West-Java gedaan is geworden. Indien de soortgrenzen tusschen *C. montana* en *C. equisetifolia* zóó getrokken worden als hier aangeduid is, dan is de verspreiding op Java voor *C. equisetifolia* als volgt: West-Java: in het Z.W. der residentie Banten bij het dorp 0 M. zeehoogte op zandig zeestand op een smallen landtong (= oedjoeng) aan den zoom der branding, gezelliggroeiend (Herb. Kds in Mus. Bot. Hort. Bogor.). Midden-Java: op den Lawoe samen met *C. montana* wildgroeiend (JUNGHUHN). Oost-Java: op het Rahoen-Idjen-gebergte ook samen met *C. montana* wildgroeiend (Herb. Kds in Mus. Hort. Bogor.). — Standplaatsvoorwaarden: Uitsluitend op constant-waterarme of physiologisch-droge (keukenzoutrijke) gronden. Ontbreekt geheel op vruchtbare gronden, vermoedelijk omdat zij aldaar door andere soorten verdrongen wordt. Hoewel bij voorkeur op zandig zeestrand wildgroeiend en dan bijna altijd homogene boschjes vormende, wordt zij in de javaansche Rhizophoren-wouden steeds gemist. Zij verdraagt direct zonlicht zeer goed, maar veel schaduw zeer slecht. Op kalkrijke gronden en in de javaansche djatiwouden is zij nog niet wildgroeiend waargenomen. Ook in de heterogene altijd groene schaduwrijke wouden, zoowel in het lage binnenland als in de bergstreken wordt de soort geheel gemist. Zij kan zich blijkbaar alleen op de genoemde ongunstige standplaatsen in den strijd met andere soorten handhaven.

§ 2. **Casuarina equisetifolia Forst. var. longiflora,** MIQ.! Regensburg. Flora (1865) p. 17; MIQ.! in DC. Prodr. XVI. 2 (1868) 339; BOERLAGE! Handleid. Flora N. I. III. 1. (1900) 404; KOORD. en VALETON Bijdr. Booms. Java X. (1904) 272.

Voor deze varieteit gaf MIQUEL l. c. als diagnose o. a. „amentis masculis elongatis glabris; . . . vaginis 7-dentatis" en als vindplaats „Java" (BLUME!) zonder meer. Uit het door mij in 's Rijks Herb. te Leiden en Utrecht aangetroffen authentieke materiaal bleek mij het volgende. Het aantal vaginaaltanden bedraagt weliswaar soms 7, zooals MIQUEL l.c. aangeeft, maar dikwijls ook 6 en voorts soms ook 8. De mannelijke katjes zijn door het volkomen gemis van beharing

en door de soms bijzonder groote lengte nl. 40—50 mm. kenbaar. Op de authentieke etikette staat als groeiplaats alleen met de hand van BLUME geschreven: „in Javae oriental. montibus".

Een zonder verdere aanwijzingen in 's Rijks Herb. te Leiden door mij aangetroffen specimen, dat in 1867 door TEYSMANN aan HASSKARL gestuurd was geworden en dat blijkens de door HASSKARL daarbij geschreven opmerking van een in den Hortus Bogor. staand exemplaar afkomstig was [in Herb. Lugd. Bat. sub n. 48 (899,173)] verschilt zóó weinig van het bovengenoemde authentiek, dat ik vermoed, dat ook het authentiek van *C. equisetifolia* FORST. van *longiflora* MIQ. van een gekweekt exemplaar van den Buitenzorgschen Hortus afkomstig is. Beide specimina gelijken veel op *C. equisetifolia* FORST., maar verschillen door de volkomen kale mannelijke katjes duidelijk van het type dezer soort. Het aantal vaginaaltanden van dit TEYSMANN'sche specimen bedraagt 7—8, terwijl het bij het authentiek 6—8 bedraagt.

Voorts bleek mij, dat geen enkel ander der talrijke javaansche Casuarina-specimina van het Leidsche en Utrechtsche Herbarium tot deze varieteit behoort. Door mij werd deze varieteit niet wildgroeiend op Java gevonden.

Een en ander samenvattend acht ik het waarschijnlijk, dat hier voor *Casuarina equisetifolia* var. *longiflora* MIQ. een dergelijke schrijffout van BLUME oorzaak is van het zoogenaamd wildgroeiende voorkomen op Java als vroeger voor een andere in den Hortus Bogor. gekweekte japansche boomsoort plaats had [1]) en dat dus deze varieteit voor de flora van Java geschrapt moet worden.

§ 3. **Casuarina montana**, JUNGH.! ex MIQ. Fl. Ind. Bat. I. 1. (1855) 875 (cum descript.); JUNGH.! Java I. ed. 2. (1853) 551—554, 631—639, 663; *C. montana*, LESCHEN. ex MIQ.! in ZOLL. Verzeichn. (1854) 86 (nomen tantum); *C. montana*, MIQ.! in *A DC.* Prodr. XVI. 2. (1868) 335; Klustr. Arch. Ind. (1871) 9. tab. 7. *f.* 1 et 2; KOORD. et VAL. Bijdr. Booms. Java X. (1904). 273!; *C. Junghuhniana*, MIQ! Plantae Junghuhnianae I. (1854) 7; MIQ.! Fl. Ind. Bat. I. 1. (1855) 874; JUNGH.! l.c. (1853) 551.

Uit bovenstaand literatuuroverzicht blijkt, dat deze soort volgens de nieuwste nomenclatuurregels niet, zooals in KOORD. en VAL. l.c. als *C. montana* MIQ. en evenmin, zooals als in den Index Kewensis als *C. montana* LESCHEN., maar als *C. montana* JUNGH. aangeduid moet worden.

---

[1]) Vergel. over de verspreiding van *Quercus Pinanga* BL. en KOORD in VALETON Bijdr. Booms. Java X (in Meded. Lands Plant. LXVIII 1904) p. 65 en in KOORD. Bijdrage N. 1. t. d. kennis d. Flora v. Java in Verslag Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam 28 Maart 1908 p. 813.

§§ 1. Geograph. verspreiding buiten Java: Bangka (TEIJSMANN n. 7650); Timor (ZIPP.; TEIJSM.; FORBES n. 3512); Molukken (REINW. n. 1504). — Bij het authentiek van ZIPPEL (in H. L. B.) vond ik aan jonge twijgen van bloeiende takken 10—11 vaginaaltanden en meestal 11 tanden; internodiën 1—1½ mm. in diam. en ca. 1 cm. lang. —

Twee uit Timor afkomstige, door MIQUEL eigenhandig als *C. montana* gedetermineerde vruchtdragende specimina hebben 11—12 tanden, evenals de var. *validior* MIQ. maar dunne internodiën, die aan de var. *tenuior* MIQ. beantwoorden. — Het vruchtdragende Molukken-exemplaar van REINWARDT (zonder nadere vindplaats) heeft constant 10 vaginaaltanden en beantwoordt, ook wat den diameter der internodien aangaat, aan de var. *tenuior*. — Het vruchtdragende Bangka-specimen draagt van de hand van SCHEFFER den manuscriptnaam *C. equisetifolia* FORST. var. *bancana*; het is gekenmerkt door het bezit van constant 9 vaginaaltanden, vruchtkegels met ca. 18 overlangsche rijen en rolronde, niet diep-gegleufde internodien van ½—¾ mm. diam. en ca 1 cm. lengte. Dit Bangka-specimen kan m.i. van sommige exemplaren der javaansche *C. montana* var. *tenuior* MIQ. niet gescheiden worden. — *C. montana* var. *validior* MIQ. vond ik in de Herb. te Leiden en Utrecht niet uit streken buiten Java vertegenwoordigd. Ook heb ik van de var. *validior* nooit exemplaren, gezien, die buiten Java verzameld waren.

§§ 2. Verspreiding op Java. De var. *validior* MIQ. vond ik in 's Rijks Herb. te Leiden en Utrecht door de volgende specimina vertegenwoordigd: 1) door JUNGHUHN blijkens zijn eigenhandige aanteekening op den Kawi-top verzameld [de aan het herbariumspecimen blijkbaar later, buiten JUNGHUHN om, aangehechte tweede etikette „Oengaran" kan m. i. niet bij dit authentiek specimen behooren, want op den G. Oengaran komt geen enkele *Casuarina* wildgroeiend voor]; 2) specimina van Java (zonder nadere aanwijzingen) van TEYSM. & DE VRIESE en 3) een vruchtdragend specimen van Java, met de aanwijzing „Alpes orientales" (leg. WAITZ). In Herb. Kds is de var. *validior* MIQ. alleen van den G. Wilis van 2000 m. zeehoogte en G. Ardjoeno van 2100—2400 m. zeehoogte vertegenwoordigd; alleen deze Ardjoeno-exemplaren zijn zeer karakteristiek, maar voor deze Wilis-specimina staat de determinatie der varieteit niet geheel vast. Bij het authentiek van JUNGHUHN (in H. L. B.) van den Kawi-top vond ik internodiën van ca. 1 cm. lengte en 1—1½ mm. diam., en 10—11 vaginaaltanden. Het specimen van WAITZ had meestal 11 vaginaaltanden. De javaansche exemplaren van var. *tenuior* MIQ. vond ik in de Herb. te Leiden en Utrecht alleen

vertegenwoordigd door een paar specimina van KORTHALS en van TEYSM. & DE VRIESE van „Java" (zonder nadere aanwijzing) en door een vruchtdragend specimen (Kds. 37348 β Comm. ex museo bot. Hort. Bogor.) in Oost-Java op den Tengger bij Ngadisari op 2000 m. zeegoogte in Oct. 1899 vruchtdragend verzameld. In de uitgestrekte hooggebergte-Casuarina-wouden van den Rahoen-Idjen in Oost-Java vond ik uitsluitend var. *tenuior* MIQ., terwijl de var. *validior* aldaar geheel en al scheen te ontbreken. Op den G. Wilis in Midden-Java vond ik in de Casuarina-wouden bijna uitsluitend var. *tenuior* MIQ. dáár echter ook in klein aantal eenige exemplaren van var. *validior* MIQ. maar de voor den Kawitop karakteristieke vorm met $1^1/_2$ mm. dikke internodiën werd op den G. Wilis evenmin gevonden. En de jongste twijgen van de dáár (mt Wilis) voorkomende var. *validior* MIQ hadden hoogstens 1 mm. middellijn. JUNGHUHN (Java. I (1853) p. 551) vermeldt, dat *C. montana* het eerst voorkomt op den Lawoe en van dáár verder oostwaarts de toppen van alle bergen, welke hooger rijzen dan 1500 m. overdekt, maar in West-Java geheel ontbreekt. De juistheid hiervan kan ik op grond van mijne waarnemingen bevestigen. Wat de verticale verspreiding van *C. montana* var. *tenuior* MIQ. op het Wilis-gebergte met den top Dåråwati in de residentie Madioen betreft laat ik hier volgen, wat hierover in 1894 door mij geplubliceerd is geworden in een artikel „Over de samenstelling van eenige bosschen in de residentie Madioen" (in Tijdschr. v. Nijverh. en Landb. in N. Indië XLVIII (1894) afl. 4 p. 18—22 en wel in het hoofdstuk „[Naar den top van den Wilis. Beklimming van den Dåråwati]: „Om 7'' = 1670 Meter houdt het hoogstammige gemengde schaduwrijke bosch plotseling op, althans op den rug, want in de dalen zet het zich verder noordwaarts voort en komen wij in een klein alang-alang-veld met verstrooid staande jonge boompjes van *Albizzia montana* BENTH. en onmiddellijk hierop aanschouwen wij de eerste individuen van *Casuarina montana* JUNGH".

„Van af dit punt ± 1700 Meter is de bergrug, die naar den Dåråwati-top voert, bergopwaarts geheel alleen met deze boomsoort begroeid. Langs de hellingen (en zelfs tot vlak bij den rug) groeien hier echter andere boomsoorten tot op een hoogte van 2000 Meter. Eerst op die hoogte worden ook in de dalen *Casuarina's* gevonden." [KOORD. l. c. (1894) p. 19—20 v. d. separaatafdruk]. Hieruit blijkt, dat *Casuarina montana* var. *tenuior* op den G. Wilis niet beneden 1650 m. zeehoogte, maar van dáár af tot op den hoogsten top, op ruim 2550 meter zeehoogte voorkomt. Deze en de thans volgende gegevens dienen ter vervanging van de in KOORD. en VALETON Bijdr. Boomsoorten Java X (1904) p. 274 regel 17 van boven gepubliceerde

cijfers der verticale verspreiding. Ik kan hier nog bijvoegen, dat ik ook op mijn na genoemd jaar (1894) in de residentie Madioen ondernomen reizen *C. montana nergens beneden* 1650 m. zeehoogte wildgroeiend heb aangetroffen. Interessant is, dat deze boomsoort hier bijna van af het punt, waar zij het eerst voorkomt, dadelijk woudvormend optreedt en boven 2000 m. niet alleen alle hooger gelegen ruggen, maar ook de dalen, bijna zonder andere boomsoorten bedekt. In de djatibosschen van Madioen, evenals van andere deelen van Java heb ik *C. montana* en *C. equisetifolia* slechts hier en daar gekweekt (bijv. bij pasanggrahans, aan wegen, enz.), maar nooit wildgroeiend waargenomen. Op het Idjen-plateau in de residentie Besoeki daalt *C. montana* var. *tenuior* ook nog iets beneden de hoogtegrens van 1500 m. Aan den benedenzoom van de verspreiding groeit *C. montana* var. *tenuior* uitsluitend op den drogen bergrug terwijl zij aldaar in de ravijnen en op de vochtigere plekken door andere boomsoorten geheel verdrongen wordt. Op den Tengger noteerde ik in 1899 het volgende over de var. *tenuior:* Kruinhoogte tot 35 m. bij $1^1/_2$ m. stammiddellijn; de boomen op steile rotsen van 2000 m. zeehoogte dikwijls slechts 20 m. met 30 cm. stammiddellijn. Hier op den Tengger vooral woudvormende tusschen 2200—2800 m., echter op de N.O. zijde van dit gebergte tot op 1600 m. op de ruggen afdalende.

Niettegenstaande de volwassen boomen sterke schaduw niet goed verdragen, is zulks bij zeer jonge individuen wèl het geval. Dit blijkt uit de volgende door mij in 1891 gemaakte aanteekening [1]: „Boompjes van *Albizzia moluccana* Benth., die na een boschbrand van Augustus 1891 op den Wilis (in Midden-Java) op ongeveer 1800 M. zeehoogte opgeschoten waren, hadden toen ik op 15 October 1891 dezen berg beklom, een hoogte van 1½—2 M. en stonden zóó dicht, dat deze uit zaad natuurlijk opgeschoten Albizziaboschjes op kweekbeddingen geleken. Daaronder in vrij dichte schaduw, stonden talloze, ca. 0.2 m. hooge, uit „zaad" natuurlijk opgeschoten plantjes van *Casuarina montana*". De verspreiding en de standplaatsvoorwaarden kunnen als volgt voor *C. montana* var. *tenuior* gekarakteriseerd worden: Buitengewoon groot weerstandsvermogen tegen waterarmoede, tegen heftige winden en tegen de sterke directe insolatie der alpine regio, maar alleen in de allereerste jeugd (*niet* later) weerstandsvermogen tegen beschaduwing. In Midden-Java op 1650—3000 m. en in het oostelijkste deel van Oost-Java op ca 1400—3000 m. zeehoogte zeer algemeen, maar westelijk van den G. Lawoe, ook op den G. Oengaran [in strijd met de onjuiste opgave in MIQUEL (Flora Ind. Bat. I. 875)] in het wild geheel ontbrekend.

[1]) Vergel. KOORD. en VALETON Bijdr. Booms. Java II. (1895) 294.

§ 4. Verspreidingsmiddelen van Casuarina equisetifolia en C. montana.

Beide soorten schijnen niet alleen voor verspreiding door wind, maar, niettegenstaande de negatieve resultaten der drijfproeven van GUPPY (zie hieronder), ook voor verspreiding door zeestroomingen goed ingericht te zijn.

Bij de door mij bij javaansche exemplaren onderzochte gevleugelde nootjes vond ik de volgende afmetingen. Bij *C. equisetifolia* FORST.: nootjes $1^1/_2$ — 2 mm. lang en 1 — $1^1/_2$ mm.. breed, zijdelings afgeplat, met een 5 mm. langen en 3 mm. breeden, omgekeerd eivormigen, zeer dunnen vleugel. Bij *C. montana* var. *tenuior* MIQ.: nootjes $1^1/_2$ — $1^3/_4$ × 1 — $1^1/_2$ mm., zijdelings sterk afgeplat, met eivormigen, zeer dunnen 2 — $2^1/_4$ mm. langen en $1^1/_2$ — $1^3/_4$ mm. breeden vleugel.

GUPPY vond bij zijne bekende drijfproeven met vruchten en zaden, dat de vruchtkegels van *Casuarina equisetifolia* FORST. hoogstens 1 of 2 dagen op een $3^1/_2$ procentige keukenzoutoplossing blijven drijven. Maar voor de bekende, zeer verre overzeesche verspreiding dezer boomsoort is deze drijftijd niet toereikend. Toen ik de proef van GUPPY herhaalde, kon ik echter slechts de geringe drijfduur van de afzonderlijke vruchtkegels bevestigen. Evenwel vond ik nog, dat de drijfduur op een dergelijke keukenzoutoplossing voor de uit den vruchtkegel (bijv. door drogen) bevrijde nootjes zóó veel grooter is, dat de zeer verre verspreiding hierdoor volkomen opgehelderd wordt, indien men slechts veronderstelt, dat de kiemkracht door een verblijf van 1 maand in zeewater niet geschaad wordt. Hierover zijn echter, zoover mij bekend is, nog geen proeven gedaan. Intusschen meen ik op grond van den anatomischen bouw der nootjes met een zeer groote mate van waarschijnlijkheid te mogen veronderstellen, dat de embryo voldoende tegen het binnendringen van het zeewater beschermd is. Bij eenige drijfproeven vond ik, dat na een maand van nootjes van *C. equisetifolia* FORST. nog 100% en van *C. montana* JUNGH. var. *tenuior* MIQ. nog ruim 75% op een $3^1/_2$ procentige keukenzoutoplossing bleven drijven.

Behalve door wind- en waterverspreiding der nootjes kan zoowel *C. equisetifolia* als ook *C. montana* zich door worteluitloopers verspreiden. Deze laatste worden bij deze soorten echter zelden meer dan 10 m. ver van den hoofdstam gevonden. Wanneer de hoofdstam (bijv. tengevolge van brand) afsterft kan, bijv. bij *C. montana*, vaak waargenomen worden, hoe een jong boschje rondom den dooden hoofdstam uit deze wortelloten voortgesproten is.

De verspreiding over zeer groote overzeesche afstanden geschiedt echter

zonder twijfel bij *Casuarina montana* en *C. equisetifolia* bijna uitsluitend door middel van de gevleugelde nootjes eerst door windtransport, daarna door zeestroomingen.

§ 5. Over een monstruositeit van Casuarina.

In 's Rijks Herb. te Leiden vond ik een herbarium-specimen, dat door BOERLAGE geetiketteerd was als eene door JUNGHUHN in Java verzamelde monstruositeit [in H. L. B. sub. n. 50 (899—173)]. Het bleek mij een vruchtdragende, heksenbesemachtige, misvormde tak van *Casuarina montana* var. *tenuior* MIQ. Behalve de genoemde afwijkende vertakking vertoont dit specimen de bijzonderheid, dat de as van alle daaraan zittende vruchtkegels doorgegroeid is. Daarbij geeft deze doorgegroeide as het aanzijn aan de heksenbesemachtig-vertakte, monstrueus-verdikte twijgen met monstrueus-ontwikkelde bladscheden. Er bevonden zich aan den bedoelden tak ook een groot aantal normaal-gebouwde jonge twijgen en daardoor was mij de determinatie mogelijk. Deze laatste hebben gewone cylindervormige internodiën van ca. 1 cm. lengte bij $^3/_4$ — 1 mm. diam. en meestal 10 zelden 11 vaginaaltanden, zooals bij genoemde varieteit zeer dikwijls voorkomt. Een fungus of een andere oorzaak voor het ontstaan van deze heksenbesems heb ik niet aan het bedoelde herbarium-specimen kunnen ontdekken.

§ 6. Phyllogenetische opmerking over Casuarina montana Jungh. en C. equisetifolia Forst.

In 's Rijks Herb. te Leiden en in Utrecht vond ik herbarium-specimina van jonge zaadplanten en van zeer jonge, uit slapende knoppen onstane loten.

Bij een der eerstbedoelde specimina vond ik een aanteekening van de hand van MIQUEL, waaruit bleek, dat die jonge zaailingen gekweekt waren uit zaad van *Casuarina montana*, dat in 1846 uit Java in Holland in den Hortus te Rotterdam ingevoerd was. Die zaailingen bezitten aan de jongste twijgen internodiën van ongeveer 2 mm. lengte bij $^1/_3$ mm. diam. met 4—5 diepe gleuven en van de 24 door mij onderzochte bladscheeden bedroeg het aantal vaginaaltanden even dikwijls 4 als 5, maar nooit meer en nooit minder. Intusschen blijkt uit de bijbehoorende aanteekening van MIQUEL, dat hij wel meestal 4—5 vaginaal tanden, maar ook 6 tanden waargenomen heeft. De tanden zijn smal lanceolat en lang-fijn-toegesplitst. De stammetjes dezer zaailingen zijn slechts $2^1/_2$—3 mm. in diam. MIQUEL heeft er nog eigenhandig op vermeld: „Casuarina montana (*non* alior)" en onderaan ook *C. Brunoniana*. De soort *C. Brunoniana*, welke door MIQUEL opgesteld was geworden op grond van jonge

kasplanten uit den Rotterdamschen en den Berlijnschen Hortus, is later gebleken niets anders te zijn dan de zeer afwijkende steriele jeugdvorm („Jugendform") van *Casuarina equisetifolia* en *C. montana*. Uit twee authentieken van deze soort (*C. Brunoniana* MIQ.) in het Herbarium te Utrecht kon ik zien, dat MIQUEL zelf zijne *C. Brunoniana* ingetrokken heeft en wel gedeeltelijk als *C. equisetifolia*, gedeeltelijk als *C. montana* beschouwd heeft. Het komt mij echter mogelijk voor, dat al de door MIQUEL als *C. Brunoniana* benoemde specimina slechts tot *C. montana* JUNGH. behooren. Want daarmede stemmen ook de door MIQUEL voor *C. equisetifolia* gedetermineerde „jeugd"-exemplaren goed overeen. Van jonge zaailingen, die met zekerheid van *C. equisetifolia* afkomstig zijn, heb ik hier geen onderzoekingsmateriaal ter beschikking. En op Java heb ik ook slechts bij jonge zaailingen van *C. montana* en wel bij de var. *tenuior* het constant afwijkend gering aantal vaginaaltanden geconstateerd. Dat aantal bedraagt voor die aldaar door mij onderzochte zeer jonge zaailingen van *C. montana* ook slechts 4—6, evenals bij de hierboven bedoelde door MIQUEL onderzochte zaailingen-specimina van *C. Brunoniana* in het Utrechtsche Herbarium.

Aan een herbarium specimen (Herb. Kds 37348 β in Herb. Lugd. Bat.) van *Casuarina montana* var. *tenuior* Miq., dat in Oct. 1899 op 2000 m. zeeh. bij Ngadisari op den Tengger in Oost-Java verzameld was, is door mij het volgende waargenomen: Het exemplaar bestaat uit gewone vruchtdragende oude takken, benevens uit eenige, jonge steriele loten, die zich na het bij den grond afkappen van een der oude dikke stammen blijkbaar uit slapende knoppen hebben ontwikkeld. Deze jonge loten waren gekenmerkt door internodiën van $^1/_2$ mm. diam. met 5—6 diepe overlangsche gleuven en slechts 5—6 (nooit meer) vaginaaltanden. Daarentegen hadden de jongste twijgen, die ontstaan waren aan de gewone opgaande oudere takken van hetzelfde boomindividu, cylinderronde, niet-diep-gesleufde internodiën $^3/_4$—1 mm. diam. met 9—10 vaginaaltanden. Voor de volledigheid dient nog als morphologisch-onbelangrijke, maar physiognomisch-opvallende bijomstandigheid vermeld te worden, dat een groot aantal der jongste twijgen van deze jonge worteluitloopers aan hun topeinde dikwijls tot eivormige of onregelmatig gevormde, ca 3—5 mm. lange en ca $2^1/_2$—3 mm. dikke, stengeltop-gallen misvormd waren. In die gallen kon ik in de meeste gevallen nog het insect, dat de misvorming veroorzaakt had, constateeren. Het behoeft hier wel niet gezegd te worden, dat de bovenbeschreven morphologisch-afwijkende bouw der twijgen uitsluitend betrekking heeft op normaal gebouwde, niet door gallen ziekelijk-misvormde twijgen van meerbedoelde, uit

adventiefknoppen ontstane jonge loten. Verder zij nog aangestipt, dat ik in het Rijks Herbarium te Leiden een door TEYSMANN en DE VRIESE in 1859—1860 in Java? (zonder nadere vindplaatsaanwijzingen) verzameld en door MIQUEL als „*Casuarina equisetifolia* FORT., *monstrosa?*" geëtiketteerd specimen aantrof, dat mij geheel gelijk schijnt aan de door mij hierboven beschrevene, gedeeltelijk door stengel top-gallen misvormde jonge wortelloten van de gewone javaansche *Casuarina montana* var. *tenuior* MIQ. Het aantal vaginaaltanden bedraagt bij dit door MIQUEL onderzochte specimen (ook bij de niet door gallen aangetaste jongste twijgen) constant slechts 6—7, nooit meer.

Resumeerende blijkt, (wanneer wij daarbij de hierbovenbedoelde door gallen misvormde twijgen geheel buiten beschouwing laten) in het kort het volgende:

1. Bij deze zeer jonge zaailingen van *Casuarina montana* var. *tenuior* MIQ. zijn sommige internodien van 4, andere van 5—6 diepe overlangsche gleuven voorzien, terwijl het aantal vaginaaltanden 4—6, (nooit meer), bedraagt en in de jongste stadiën slechts 4.

2. Zeer jonge, uit adventiefknoppen der stambasis ontwikkelde loten van *Casuarina montana* var. *tenuior* hadden dergelijke diepgegleufde internodiën met 5—6 (nooit meer) vaginaaltanden als de sub. 1 genoemde jonge zaailingen.

3. Het schijnt, dat bij de hier behandelde soort (*C. montana*) de jongste ontwikkelingsstadiën der zaailingen phyllogenetisch-oudere ontwikkelingsphasen vertoonen als de onderzochte, uit adventiefknoppen voortgesproten jonge stamloten.

4. De bouw der sub 1 bedoelde zaailingen schijnt er op te wijzen, dat zoowel *Casuarina equisetifolia* FORST., alsook *C. montana* JUNGH. beide mutanten zijn van stamvormen, met vierhoekige internodiën met 4 diepe overlangsche gleuven en 4 vaginaaltanden. Zulke m. i. phyllogenetisch-oudere vormen (bijv. *C. nodiflora* FORST. en *C. sumatrana* JUNGH.) komen thans nog levend, o.a. in Australië, op Sumatra, Borneo, Celebes en in de Molukken voor, maar ontbreken thans levend in Java, en zijn, zoover mij bekend is, ook in fossielen toestand nog niet op Java aangetroffen.

5 Van de twee op Java wildgroeiende soorten van *Casuarina* schijnt *C. montana* JUNGH. phyllogenetisch-jonger dan *C. equisetifolia* FORST. en is de eerstgenoemde soort vermoedelijk een mutant, die slechts binnen het gebied van den Maleischen Archipel in stand gebleven en uit de laatstgenoemde soort ontstaan is.

6. Vermoedelijk is de in Java endemische *C. montana* var. *validior* MIQ. een slechts op Java in stand gebleven uit *C. montana* var. *tenuior* MIQ. ontstane mutant.

Plantkunde. — De Heer W. BURCK biedt eene mededeeling aan: *„Over de biologische beteekenis der nectarafscheiding in de bloem".*

In een artikel in het Recueil des travaux botaniques Néerlandais vol. IV. [1]) heb ik uitvoerig toegelicht, dat DARWIN, die in 1859 het vermoeden had uitgesproken, dat een kruisbevruchting een noodzakelijke voorwaarde was voor het behoud van de soort en toen ook meende, dat over 't algemeen de bloemen op zoodanige wijze waren ingericht, dat door hare structuur een kruisbevruchting werd verzekerd, althans bevorderd, in de latere jaren niet op dit standpunt was blijven staan. Uit zijn latere geschriften toonde ik aan, dat zijne veeljarige waarnemingen en cultuurproeven hem meer en meer tot het inzicht hadden gebracht, dat aan de zelfbevruchting een veel grootere beteekenis moest worden toegeschreven dan hij zich had voorgesteld en dat hij aan het eind van zijne studiën er niet ver meer van verwijderd was, om op de vraag, of de structuur van de bloem op de bevordering der kruisbevruchting wijst, een ontkennend antwoord te geven. Ik wees er verder op, dat sedert dien tijd waarnemingen aan een aantal tropische planten, wier bloemen steeds gegesloten blijven, bij welke derhalve de mogelijkheid tot kruising is uitsloten, geleerd hebben, dat er van een natuurwet in den zin als door DARWIN vermoed, ook geen sprake kan zijn en dat de tegenwoordige inzichten omtrent den bouw van de celkern en de rol, die haar moet worden toegekend in het leven der plant, en de nieuwere denkbeelden omtrent het wezen der bevruchting, ook de meening, dat een kruisbevruchting voor de soort voordeeliger zou zijn, niet toelaten.

Wanneer wij nu dit denkbeeld prijsgeven en vasthouden aan de grondstelling, o. a. in 1849 door GÄRTNER uitgesproken, dat alleen door zelfbevruchting de goede eigenschappen der soort behouden blijven, daar kruising tot bastaardvorming aanleiding kan geven, die de vruchtbaarheid van de plant doet verminderen, dan volgt daaruit, dat de bloemenbiologie, die in hare beschouwingen van de tegenovergestelde meening is uitgegaan, haren grondslag verloren heeft en opnieuw zal moeten worden opgebouwd. Met onze beschouwingen over de beteekenis van de eigenschappen van het bloemdek: vorm en afmetingen, kleur en geur, over het verschijnsel der nectar-afscheiding en over verschillende inrichtingen van de bloem: dioecie, monoecie, heterogamie, dichogamie, herkogamie, zelfsteriliteit, die wij hebben gemeend te kunnen verklaren als nuttige aanpassingen

[1]) Men vindt daarvan een uittreksel in het Biolog. Centralblatt. Bd. XXVIII. N°. 6. 1908.

aan bezoekende insecten ter verzekering der kruisbevruchting, zijn we op een dwaalspoor terecht gekomen; ze moeten op andere wijze verklaard kunnen worden. Ik toonde reeds in mijne vorige verhandeling aan, dat diklinie en herkogamie door sprongvariatie te verklaren zijn en dat protandrie en protogynie geen aanpassings- maar organisatiekenmerken genoemd moeten worden.

Omtrent het verschijnsel der zelfsteriliteit bepaalde ik er mij toe er op te wijzen, dat hier eerder gedacht moest worden aan de gevolgen der hybridiseering, dan aan een bijzondere aanpassing.

Om nu tot een beter begrip te komen van de eigenschappen van het bloemdek, moeten wij, met terzijdestelling van de beschouwingen der laatste eeuw, ons weer aansluiten bij de meening der oudere biologen, die aan de bloemkroon de rol toeschreven van orgaan ter bescherming der geslachtswerktuigen.

We hebben ons nu af te vragen, in hoever de geslachtsorganen, niet alleen gedurende hun aanleg en ontwikkeling, maar ook tijdens den bloei, bescherming van de zijde van het bloemdek noodig hebben, en waar we tot dusverre gewoon waren verband te zoeken tusschen de verschillende eigenschappen van het bloemdek en zijn beteekenis als inrichting tot het aanlokken van insecten, zullen we thans diezelfde eigenschappen en vooral den vorm, de afmetingen, den stand en de verspreiding van aetherische dampen hebben te toetsen aan de vraag, hoe zij kunnen geacht worden van beteekenis te zijn voor een orgaan, dat bestemd is om de geslachtsorganen te beschermen tegen nadeelige invloeden van buiten. Meer dan we tot nu toe in de bloemenbiologie gewoon waren, zullen we onze aandacht hebben te wijden aan den anatomischen bouw en de physische en chemische eigenschappen van 't bloemdek, aan de wijze waarop de bloembladen in den knop ten opzichte van elkander geplaatst zijn, aan de onderlinge vergroeiingen en het voorkomen van schubben, haren en klieren, aan de afscheiding van water, honig, slijm etc. En waar we dan, als grondslag voor onze beschouwingen, de bescherming der generatieorganen op den voorgrond plaatsen, zullen we tevens moeten onderzoeken of ook niet de *nectarafscheiding* daarmee in verband moet worden gebracht.

Te eerder ligt dit laatste voor de hand omdat er een onmiskenbare overeenkomst bestaat tusschen de afscheiding van nectar in de periode van den bloei en die van water of slijmerig vocht in de z.g. waterkelken, welk proces beschouwd wordt als een middel tot bescherming der geslachtsorganen.

Omtrent die waterafscheiding breng ik in herinnering, dat Treub 20 jaar geleden, het eerst de aandacht heeft gevestigd op het merk-

waardige verschijnsel, dat de bloemknoppen van *Spathodea campanulata* BEAUV., een tropische *Bignoniacee*, gevuld zijn met een waterachtig vocht, afgescheiden door een groot aantal klieren, die den binnenwand van den kelk bekleeden, zoodat de bloembladen, meeldraden en vruchtbeginsels zich ontwikkelen onder bescherming van dit vocht. Het afgescheiden vocht bevat sporen van chloriden, carbonaten, nitraten en sulphaten van Kalium, Natrium en Calcium, het reageert alcalisch en bevat sporen van Ammonia. Suiker werd daarin niet gevonden.

Een dergelijke waterafscheiding in den gesloten bloemknop is later ook bij andere planten waargenomen. Ik herinner hier aan de mededeelingen van: LAGERHEIM, GREGOR KRAUS, HALLIER, KOORDERS, SHIBATA en SVEDELIUS, wier onderzoekingen ik hier ter plaatse niet nader wil uiteenzetten omdat het mijn voornemen is, binnen kort, mijne eigene waarnemingen op dit gebied bekend te maken. Daaruit zal blijken, dat het verschijnsel niet tot de Tropen beperkt is, maar ook hier bestudeerd kan worden.

Alleen wil ik hier op den voorgrond brengen, dat alle natuuronderzoekers, die zich met dit onderwerp hebben bezig gehouden, zich hebben aangesloten bij de meening van TREUB, dat de waterafscheiding te beschouwen is als een middel om de geslachtsorganen te beschermen tegen de nadeelige gevolgen van een te sterke transpiratie, en dat mijne persoonlijke waarnemingen, vooral hier te lande, mij het verband hebben leeren kennen tusschen de water- en de nectarafscheiding en bij mij langzamerhand de overtuiging hebben gevestigd, dat ook de nectarafscheiding dient ter bescherming der geslachtsorganen.

Ik wil den gedachtengang, waarvan ik bij mijn onderzoek ben uitgegaan, in enkele woorden uiteenzetten.

De waarnemingen aan de planten met waterkelken en vooral de uitvoerige onderzoekingen van KOORDERS hebben ons geleerd, dat reeds vóór den aanleg der kroon en der geslachtsorganen, de nog zeer jeugdige kelk, die bij al deze planten in zijn ontwikkeling de overige bloemdeelen ver vooruit ijlt, nu eens door al of niet werkzame klieren, dan weer door eene dichte bekleeding met luchtvoerende haren, of door beide middelen, tegen de gevaren, verbonden aan de blootstelling aan de lucht, beschermd wordt. Het laat zich begrijpen, dat dit jeugdig orgaan, waarin de vaatbundels nog pas in aanleg zijn en dat derhalve niet in staat is om het waterverlies wegens transpiratie naar den eisch te dekken, voor zoover het niet door schutbladen omgeven is, eene bijzondere, tijdelijke bescherming noodig heeft.

Nu zien we in een meer gevorderd stadium, waarin de kelk reeds een zekere afmeting verkregen heeft en zijn anatomische bouw zijn voltooiing nadert, diezelfde klieren optreden aan den *binnenwand*, en door hunne werkzaamheid de holte van den kelk min of meer met water vullen; die waterafscheiding dient tot ondersteuning van den kelk in zijn functie van beschermend orgaan voor de overige, thans in aanleg verkeerende, bloemdeelen.

Later, in de oudere bloemknoppen, wanneer meeldraden en vruchtbeginsels in hunne werking reeds belangrijk gevorderd zijn, ziet men diezelfde klieren optreden aan den buiten- en binnenwand van de *kroon*. De eerste, de *buitenwand*-klieren, treden voornamelijk in werking in de korte periode tusschen het openbersten van den kelk en het geheel uitgroeien van de bloembladen tot hunne volle grootte om deze — tijdelijk derhalve — te beschermen tegen te sterke transpiratie [1]. De beteekenis der *binnenwand* trichomen is dan deze, dat zij juist in diezelfde periode de geslachtsorganen in een vochtige ruimte houden.

Wanneer we nu zien, dat de bloem van af de eerste ontwikkelingstoestanden tot aan het oogenblik van ontluiking, door verschillende middelen zorgvuldig tegen transpiratie wordt beschermd, dan rijst vanzelf de vraag of bij de ontluiking en tijdens den duur van den bloei, de geslachtsorganen onder zulke bijzonder gunstige omstandigheden verkeeren, dat ze geen bescherming meer behoeven?

Dit is stellig niet het geval; het vruchtbeginsel verkeert tijdens den bloei niet onder gunstige omstandigheden.

Met de ontluiking toch is de bloem een tijdperk ingetreden, waarin de meeldraden en vruchtbeginsels — uitzonderingen daargelaten — hun hoogste punt van ontwikkeling hebben bereikt, voor verderen groei geen voedsel meer behoeven en in een toestand van rust verkeeren: de vruchtbeginsels, wachtende op de bevruchting, om, ten gevolge van dien prikkel tot nieuw leven te worden gewekt; de meeldraden, in een toestand van rijpheid, wachtende op het openspringen na de verdamping van het overtollige water uit de helmknoppen.

Geheel anders is de toestand waarin zich bij en na de ontluiking het bloemdek en vooral de kroon bevindt, die bij het uiteenwijken der kelkbladen meestal nog, op verre na niet, hare definitieve grootte heeft bereikt. In een zeer kort tijdsbestek groeit zij tot de normale afmetingen uit, om dan verder gedurende den ganschen duur van

[1]) Deze meening zal later door voorbeelden nader bevestigd worden; ik zal aantoonen, dat in dat stadium bij talrijke bloemen, in de nog geheel gesloten bloemkroon, water of nectar gevonden wordt.

den bloei, de zetel te zijn van physiologische processen van verschillenden aard, deels ter omzetting van het, tijdens het knopleven in haar weefsel vastgelegd, materiaal voor eigen onderhoud, deels tot de voortdurende vorming van de aetherische dampen, die de bloem in dat tijdperk uitwasemt; zeer vaak ook tot de vorming van nectar enz. Bedenken wij dan daarbij, dat de aanzienlijke hoeveelheid water, die de kroon, door transpiratie, aan de lucht verliest, voortdurend door nieuwen toevoer wordt gedekt, terwijl omgekeerd de helmknoppen minder water uit den bloembodem ontvangen, dan zij afstaan, dan wordt het duidelijk, dat de voedingsstroom zich in hoofdzaak beweegt in het bloemdek.

Deze overweging geeft aanleiding tot de vragen: over welke middelen het ovarium beschikt om tijdens den toestand van rust, de nadeelige gevolgen eener te sterke transpiratie te ontgaan en of wellicht de nectarafscheiding als een zoodanig beschermingsmiddel te beschouwen zou zijn.

Ik meen op deze laatste vraag een bevestigend antwoord gekregen te hebben en hoop, dat ik er in moge slagen mijne overtuiging ingang te doen vinden.

Ik wil een beschrijving van de bloem en de nectarafscheiding bij *Fritillaria imperialis* vooraf laten gaan.

Fritillaria imperialis draagt groote, met de opening naar beneden gekeerde, klokvormige bloemen, bestaande uit een perigonium van 2 kransen van drie bladeren, een bovenstandig vruchtbeginsel met langen stijl en driedeeligen stempel en 6 lange meeldraden, wier helmdraden geheel in de klok zijn besloten, doch wier helmknoppen zich daar buiten bevinden. De stijl is in den regel iets langer, zoodat de stempels zich nog onder de helmknoppen, buiten de bloem bevinden. Het cilindervormige vruchtbeginsel is voor de waarneming verborgen; het is geheel omgeven door de vleezige helmdraden, die een nauwsluitende koker daaromheen vormen.

Eerst wanneer de bevruchting heeft plaats gevonden en het bloemdek verwelkt is, richten zich de bloemen op; de vruchten staan later rechtop.

Elk perigonium-blad draagt dicht aan de basis een groot, schotelvormig, glanzend-wit nectarium, dat door een opstaanden rand omgeven is en dat, zoolang de bloei duurt, zware droppels vocht afscheidt.

Het geheele perigonium is buitengewoon rijk aan glucose, niet alleen tijdens den bloei, maar reeds veel eerder, wanneer de bloem nog niet een derde gedeelte van hare normale grootte heeft bereikt.

De doorsnee door het middengedeelte van een volwassen perigoniumblad, ongeveer ter halver hoogte, leert, dat het mesophyll — hier ter plaatse 13 à 14 cellen dik — uit dunwandige cellen bestaat, die groote intercellulaire ruimten tusschen zich open laten. De vaatbundels, die het blad doorloopen, zijn sterk ontwikkeld en nemen nagenoeg de geheele dikte van het bloemblad in. Nergens in de doorsnee wordt amylum gevonden, doch het geheele mesophyll is zeer rijk aan glucose; amylum komt uitsluitend voor in 't nectarium. Maakt men een doorsnee door 't nectarium, dan laten zich daarin, reeds bij zwakke vergrooting, 4 verschillende deelen onderscheiden: eerstens het eigenlijke honig-afscheidende weefsel van 3 à 4 cellen dikte, uit kleinere, nauw aan elkander sluitende, dicht met plasma gevulde cellen met groote kernen opgebouwd. Daaronder vindt men een weefsel van 8 of meer cellagen dikte, uit grootere cellen samengesteld met zeer duidelijke intercellulaire tusschenruimten; deze cellen zijn volgepropt met talrijke, kleine zetmeelkorrels. Naar buiten of beneden toe volgt dan de streek der vaatbundels, waar het mesophyll ook nog zetmeel bevat. Eindelijk gaat dat laatste weefsel geleidelijk over in het chromatophorenhoudende, dat weer uit belangrijk kleinere cellen bestaat en naar buiten wordt afgesloten door een, uit tafelvormige cellen opgebouwde epidermis, wier buitenwand, daar ter plaatse, veel dikker is dan elders aan 't perigonium.

Het onder de honigafscheidende oppervlakte verzamelde amylum vindt men reeds in de doorsnee van zeer jonge nectariën, in knoppen van bijv 2.5 cm. lengte.

Dat dit het materiaal is waaruit later nectar zal gevormd worden treedt aan 't licht bij het onderzoek van nectariën, die reeds enkele dagen honigdroppels gevormd hebben; men neemt dan een duidelijke vermindering van het zetmeel waar, terwijl aan het eind van den bloei geen amylum meer gevonden wordt.

De doorsnee van den helmdraad leert ons, dat hij door een vaatbundel van betrekkelijk geringe dikte wordt doorloopen en dat overigens het weefsel is opgebouwd uit waterheldere, groote cellen, die eene zeer sterke reactie geven met FEHLING's vloeistof, op glucose, terwijl het weefsel naar buiten wordt afgesloten door een kleincellige epidermis met betrekkelijk dikken buitenwand, die een korrelige cuticula vertoont. Door de insluiting door glucoserijke helmdraden, moge het ovarium niet zoo volledig tegen de nadeelige gevolgen van de blootstelling aan de lucht worden beschermd als een onderstandig vruchtbeginsel door den bloembodem, zij valt toch in werkelijkheid daarmee te vergelijken; in elk geval ondervindt het ovarium daardoor een zeer belangrijke bescherming tijdens zijn ontwikkeling.

Het is niet zonder belang hier op te merken, dat de meeldraden het ovarium nog blijven omsluiten, wanneer de helmknoppen zijn afgevallen. De helmdraden blijven in hunne oorspronkelijke positie en frisch, zoolang de bloei duurt.

De nectar-afscheiding begint kort nadat de perigoniumbladeren uit elkander wijken en de toppen der helmknoppen uit de bloem te voorschijn komen.

De afscheiding is zeer overvloedig. In den regel vindt men bij planten in de open lucht de nectariën met zware droppels behangen. Plaatst men een afgesneden bloeiende plant in een glas water, onder een hooge stolp — in een matig vochtige ruimte derhalve, waardoor de verdamping beperkt wordt — dan ziet men de droppels, nu en dan, naar beneden vallen. Worden in potten gekweekte planten, tegen den tijd der bloemontluiking, in een donkere kamer geplaatst, dan blijkt, dat de nectarafscheiding geheel onafhankelijk is van 't licht, en dag en nacht doorgaat. Wordt de nectar met de pipette weggenomen, dan hernieuwen zich de droppels in het donker, even goed en even snel als in 't licht. Dagen achtereen kan men op die wijze den nectar verwijderen; telkens komen nieuwe droppels terug. Men kan daaruit afleiden, dat de verdamping van den nectar, bij bloemen in de open lucht, vrij aanzienlijk is, en dat de nectariën voortdurend in functie blijven, zoo lang de bloei duurt.

Fritillaria imperialis behoort tot die planten, bij welke het openspringen der helmknoppen afhankelijk is van waterverlies door transpiratie. Mogen ook bij vele families als de *Papilionaceae*, *Antirrhineae*, *Rhinanthaceae*, *Malvaceae* e.a. de helmknoppen in hun openspringen onafhankelijk zijn van den hygroscopischen toestand van de lucht en, in een vochtige bloem, even goed hun stuifmeel aan de oppervlakte kunnen brengen als aan de droge lucht, bij *Fritillaria* is dit niet het geval. Wel is waar, bevat het weefsel van den helmdraad — zooals zoo even reeds gezegd is — een gansch niet geringe hoeveelheid glucose, doch is blijkbaar de osmotische werking, die ze uitoefent op de onttrekking van water uit de helmknoppen, niet voldoende om deze te doen openspringen. Wordt een jonge bloem in een vochtige glazen doos opgesloten, of een afgesneden plant onder een hooge stolp, in een slechts matig vochtige omgeving geplaatst, dan blijven de helmknoppen gedurende den ganschen duur van den bloei gesloten, terwijl ze in de open lucht bij droog, helder voorjaarsweer, vaak reeds op den eersten dag openspringen, hetgeen vooraf wordt gegaan door een gewichtsverlies van 90% aan water. Er volgt uit deze proef, dat de helmknoppen in de vrije natuur kunnen openspringen omdat ze onder uit de bloem te voorschijn komen,

Ware dat niet het geval, waren de helmdraden enkele centimeters korter, dan zou de vochtige lucht, binnen de bloem, een beletsel zijn voor het openspringen der helmknoppen. Dat er zich tijdens den bloei een sterke waterstroom door de vaatbundels der perigonium-bladen beweegt en deze een voortdurenden toevoer van water ontvangen, die opweegt tegen het verlies, dat zij door transpiratie lijden, behoeft evenmin betoog, als 't feit, dat die waterstroom zich van de meeldraden heeft afgewend. Ware dit laatste niet het geval. dan zou er van het openspringen der helmknoppen geen sprake zijn.

Ik kom nu tot de conclusie, dat de *Fritillaria*-bloem te beschouwen is als een klok, waarin de lucht, tijdens den bloei, voortdurend wordt vochtig gehouden door de verdamping van 6 groote droppels vocht, afgescheiden door even zooveel, boven in de klok geplaatste nectariën, wier verdampingsverlies, zoolang de bloei duurt, nacht en dag wordt gedekt door nieuwen vochttoevoer,

Binnen in die vochtige klok, bevinden zich het ovarium en de meeldraden, die tijdens den bloei in een rusttoestand verkeeren en geen of slechts een geringen toevoer van water uit den bloembodem ontvangen en die, voor zoover ze in de klok besloten zijn, — en dat geldt het ovarium in zijn volle lengte en de meeldraden met uitzondering der helmknoppen — tegen uitdroging worden beschermd door de vochtige omgeving, waarin ze zich bevinden, terwijl de, buiten de klok hangende, helmknoppen, aan waterverlies door verdamping zijn blootgesteld.

Blijkens de analyse van Bonnier is de nectar zeer rijk aan water en bevat deze hoogstens 5—7% suiker. Ware er in 't geheel geen suiker in 't vocht aanwezig, dan zou men niet aarzelen om de nectariën van *Fritillaria* als perigonium-hydathoden, den kelk-hydathoden van *Spathodea campanulata* en soortgelijke planten, ter zijde te stellen.

Een inrichting, als de bloem van *Fritillaria* ons te aanschouwen geeft, waar de nectar niet in directe aanraking komt met het ovarium, maar buiten de geslachtsorganen wordt aangetroffen — een nectarafscheiding, die ik kortheidshalve een peripherische wil noemen —, is niet de meest algemeene. Wel is waar zijn er een aantal planten te noemen, wier bloemen in dit opzicht met die van *Fritillaria* overeenstemmen: *Trollius*, *Abulilon*, *Lilium*, *Helleborus*, doch wordt bij de meeste planten de nectar op zoodanige plaats in de bloem afgescheiden, dat het ovarium daardoor direct bevochtigd wordt, zooals bij de Labiaten, Boragineen, Solaneen en andere plantenfamilies. In tegenstelling van de peripherische, wil ik deze een centrale nectarafscheiding noemen. Zeer vaak ook treedt de nectar op meer dan ééne plaats

in de bloem naar buiten; in die gevallen vinden wij dan een combinatie der peripherische en der centrale.

Bij talrijke planten wordt de bevochtiging van het ovarium aanzienlijk verhoogd door een dichte bekleeding met zachte haren of dicht vilt, welke bekleeding op verschillende wijze met nectar wordt gedrenkt. Die nectar wordt nu eens afgescheiden door den ovariumwand en stijgt dan tusschen de haren op — zooals het geval is o.a. bij de meeste soorten van *Verbascum* en bij *Helianthemum vulgare*, die men, zeer ten onrechte, nectarlooze planten genoemd heeft — òf het bekleedsel bestaat zelf uit glucose-secerneerende haren, een geval, dat zich o. a. bij de soorten van *Paeonia* voordoet, almede planten, die minder juist tot de nectarlooze gerekend worden. Maar vaak ook wordt de nectar, die de ovarium-bekleeding drenkt, uit den bloembodem aangevoerd, zooals o. m. het geval is bij *Pulsatilla* en andere Ranunculaceen, die nog ter sprake zullen komen. Vooral waar zulke bekleede ovaria dicht op elkaar staan — bij *Pulsatilla* bijv., waar elke bloem ± 100 vruchtbeginsels telt — kan men zich licht voorstellen, dat, door de verdamping van den nectar aan de lucht, de vruchtbeginsels voortdurend in een vochtige omgeving blijven. Ik meen, dat men mag aannemen, dat niet alleen de nectar door voortdurende afscheiding steeds op nieuw wordt toegevoerd — hetgeen zich trouwens bij vele planten laat constateeren —, maar ook, dat de nectar bij verhoogde concentratie, zoowel door wateronttrekking aan de lucht als aan het ovarium zelf, nimmer opdroogt. Die ovarium-bevochtiging herinnert ons levendig aan sedert lang bekende middelen ter bescherming van een orgaan tegen een te sterke transpiratie, n.l. aan een bekleeding met was, of met slijmsecerneerende klieren. En nu wijs ik er ook op, dat er onder de nectarlooze planten, inderdaad eenige voorkomen, waar het ovarium beschermd wordt òf door was: *Papaver*, *Eschscholtzia*, *Glaucium* e.a. òf door slijm: *Lysimachia*-soorten, *Ononis spinosa*, *Verbascum Blattaria* e.a. Dat deze planten nectar kunnen ontberen, wordt daardoor begrijpelijk. Bij *Verbascum Blattaria* bijv. is het vrij diep verborgen ovarium van onder tot boven bezet met samengestelde klieren, die in bouw overeenkomen met de lupuline en *Ribes*-klieren, die voortdurend een laagje slijm over het ovarium uitstorten.

Dit is te meer opvallend en van beteekenis, omdat bij alle overige *Verbascum*-soorten — zooals ik zooeven reeds meedeelde — het ovarium met een glucose-rijk vilt bekleed is. Hier vinden wij dus bij verschillende soorten van 't zelfde geslacht twee verschillende beschermingsmiddelen, waaraan dezelfde biologische beteekenis moet toegeschreven worden.

Ik wil nu het bovenstaande, omtrent het voorkomen van nectarafscheiding op verschillende plaatsen in de bloem, nader toelichten met eenige mededeelingen omtrent de *Ranunculaceae* en *Malvaceae*.

Beschouwen wij in de eerste plaats de bloem van *Trollius europaeus* L.

Bij *Trollius* vormen de 11 of 13 groote, halfbolvormige kelkbladen, wier randen over elkander grijpen, een nagenoeg kogelvormig omhulsel om de geslachtsorganen. De, meestal 10, gele, spatelvormige bloembladen secerneeren honig op het midden der binnenvlakte. De meeldraden, ongeveer 160 in getal, omgeven in talrijke kransen de ± 30 vruchtbeginsels. Tot op een kleine opening na, die naar boven gekeerd is, zijn de bloemen gesloten; alleen de stempels komen geheel of ten deele aan 't licht.

In het begin van den bloei, bevinden zich de helmknoppen ongeveer ter zelfde hoogte als de stempels en worden de vruchtbeginsels door de meeldradenzuil omgeven en beschermd.

Later is dit niet meer in die mate het geval, alhoewel toch altijd enkele of meerdere kransen der binnenste meeldraden, wier helmknoppen vaak niet tot volledige ontwikkeling komen, hunne plaats behouden.

Evenals bij *Fritillaria* bevinden zich dus bij *Trollius* de vruchtbeginsels in een vochtige ruimte en even als daar, worden ze bovendien nog van ter zijde door de helmdraden beschermd. Maar, wanneer nu bij *Fritillaria* de vochtigheid van de bloem voor de helmknoppen geen beletsel is om open te springen, omdat zij zich buiten de bloem bevinden, is dit bij *Trollius*, wier helmknoppen evenzeer, in hun openspringen, van verdamping van het overtollige water aan de lucht afhankelijk zijn, wel het geval; hier zijn de meeldraden in hun geheel, binnen het bloemdek opgesloten.

Dit nu geeft ons de verklaring van het opvallend verschijnsel, dat de meeldraden, te beginnen met die van den buitensten krans en dan vervolgens van de peripherie naar binnen toe, daarmee voortgaande, kort na het ontluiken zich verlengen en naar binnen buigen, tot hunne helmknoppen zich in de nabijheid van de opening bevinden; die der meer naar binnen gelegen kransen van meeldraden komen dan juist boven de stempels te liggen. Wanneer men een jonge bloem in een gesloten glazen doos legt, dan kan men dit verschijnsel van stap tot stap volgen en tegelijk waarnemen, dat, zoolang de bloem in de glazen doos blijft, de helmknoppen gesloten blijven. In een open doos daarentegen, ziet men de helmknoppen openspringen zoodra ze onder de opening van de bloem gekomen zijn. Men kan dan zien, hoe zij hun stuifmeel op de stempels uitstrooien. Ook de waarneming in het open

veld leert, dat de helmknoppen bij vochtig weer gesloten blijven.

Nergens anders dan aan de bloembladen wordt honig afgescheiden. In hoofdzaak komt dus de bloeminrichting geheel met die van *Fritillaria* overeen. De sluiting der kroon kan moeilijk anders worden verklaard dan als een inrichting tot voorkoming van een spoedige verdamping van den nectar aan de lucht en staat in verband met den opgerichten stand der bloem. [1])

Als tweede voorbeeld van de wijze van nectarafscheiding bij de Ranunculaceen, kies ik nu de bloemen van *Clematis* en *Anemone*, die geen kroonbladen bezitten, waar de kelk de plaats van de kroon inneemt, en waar aan de peripherie der bloem geen nectar wordt waargenomen. Dit is de reden, waarom ze, in de bloemenbiologische literatuur, als nectarlooze planten te boek staan. Dat dit geenszins juist is, blijkt reeds aanstonds, wanneer wij de vruchtbeginsels, die met zijdeglanzende haren dicht bekleed zijn, een oogenblik in een droppel gedistilleerd water op het objectglas afwasschen en daarna dit water met een droppel FEHLING's proefvocht verwarmen; wij krijgen dan een sterke glucose-reactie, ten bewijze, dat het harige bekleedsel van het ovarium met nectar gedrenkt is. Nader onderzoek leert, dat deze nectar afkomstig is uit het interstaminale gedeelte van den bloembodem.

De fijne nectardroppeltjes, hier ter plaatse afgescheiden, worden tusschen de helmdraden en vruchtbeginsels opgezogen en vooral in het harige bekleedsel der vruchtbeginsels vastgelegd.

Ik moet er nu hier aan herinneren, dat reeds vele jaren geleden, BONNIER op de interstaminale nectarafscheiding bij *Anemone nemorosa* de aandacht gevestigd heeft. Hij deelde daaromtrent mee, dat hij den bloembodem rijk aan suiker bevonden had en dat het interstaminale gedeelte met talrijke, dunwandige, papillen bekleed was, waaruit men onder gunstige omstandigheden, fijne nectardroppeltjes naar buiten kon zien komen. Mij heeft nu het onderzoek geleerd, dat, hetgeen BONNIER [2]) heeft opgemerkt, een vrij algemeen verschijnsel in de familie der Ranunculaceen mag genoemd worden: dat n.l. bij vele geslachten, aan dit gedeelte van den bloembodem nectar wordt afgescheiden.

De bloemen van *Anemone* en *Clematis* vormen derhalve, wat de nectarafscheiding betreft, een tegenstelling met hetgeen bij *Trollius* wordt waargenomen. Hier komt de nectar in onmiddellijke aanraking met het ovarium, en het laat zich begrijpen, dat de tallooze, fijne

---

[1]) Ik meen, dat hierin ook de verklaring ligt opgesloten van de gesloten bloemen der Calceolaria's, Fumariaceen, Antirrhineen, Rhinanthaceen e. a.

[2]) BONNIER, G., Les nectaires. Annales des sciences naturelles. Botanique. Tome VIII. 1879. p. 141.

droppeltjes honig, die allerwege tusschen de helmdraden gevonden worden en steeds worden vernieuwd, niet weinig er toe bijdragen om de geheele omgeving der ovaria in een zekeren graad van vochtigheid te houden.

Opmerkelijk is het nu, dat bij vele andere Ranunculaceen de nectar op twee plaatsen in de bloem wordt afgescheiden, en dat we daar eene peripherische en eene centrale secretie kunnen onderscheiden. Er valt bij deze planten op te merken, dat bij enkele geslachten beide nectarafscheidingen voor de plant van nagenoeg gelijke beteekenis zijn, doch dat bij andere geslachten de peripherische sterk op den achtergrond treedt.

De bloem van *Aconitum* moge als voorbeeld dienen van die planten, waar beide afscheidingen voor de bescherming der geslachtsorganen van belang zijn.

Aan het begin van den bloei zijn de 3—5 geheel onbehaarde, vruchtbeginsels nog niet tot volle ontwikkeling gekomen. Zij laten zich ternauwernood waarnemen, daar ze door de talrijke meeldraden worden ingesloten. Die meeldraden onderscheiden zich door verbreede filamenten, die zeer rijk zijn aan glucose en die, dicht tegen de vruchtbeginsels aangedrukt, deze tegen uitwendige invloeden beschermen. Door nectarsecretie, aan het interstaminale deel van den bloembodem, worden de geslachtsorganen vochtig gehouden. [1]) Ook de kelk- en kroonbladen zijn rijk aan glucose.

De twee bovenste bloembladen zijn tot lang-gesteelde nectariën vervormd, die gedurende den bloei een rijkelijke hoeveelheid honig afscheiden. De beide bovenste, donkerblauwe, kelkbladen zijn tot een helmvormige kap vergroeid, die, zoo lang de bloem zich in den knoptoestand bevindt, haar grootendeels omsluit en ook, gedurende den bloei, nog als een beschermend dak voor de beide nectariën en de daaronder liggende geslachtsorganen fungeert, terwijl de overige kelk- en kroonbladen de geslachtsorganen rondom insluiten. Door de nectarafscheiding is de bloem wederom een vochtige kamer geworden, waarin de geslachtsorganen tegen het gevaar van uitdroging worden beschermd. De meeldraden liggen in den beginne met naar onder omgebogen, onopengesprongen helmknoppen, van den ingang der vochtige kamer afgewend. Later richten zij zich op, daarna verlengen zij zich en brengen dan de helmknoppen aan den ingang van de bloem, waar zij hun overmaat van water aan de lucht kunnen afstaan, wanneer althans

---

[1]) Niet zelden kan men met de loupe de nectardroppeltjes op de meeldraden waarnemen; overigens laat de nectar, tusschen de meeldraden, zich langs chemischen weg gemakkelijk aantoonen, wanneer een jonge bloem, ontdaan van kelk en kroon, met water wordt afgespoeld.

deze daartoe niet te vochtig is. Naarmate ze openspringen, buigen ze zich met leege helmknoppen weer naar beneden. Aan deze ombuiging nemen echter de verbreede filamenten geen deel; deze blijven in hunne oorspronkelijke positie, gedurende den ganschen duur van den bloei, de ovaria beschermen. Nu eerst leggen zich de stempels, tot ontwikkeling gekomen, aan den ingang van de bloem.

Wanneer nu aan de kroonnectariën bij *Aconitum* niet veel minder beteekenis moet worden toegeschreven dan aan de nectarsecretie aan den bloembodem, is dit niet — zooals reeds werd opgemerkt — bij alle Ranunculaceengeslachten het geval. Bij *Ranunculus*, *Batrachium* en *Ficaria* is de nectarafscheiding uit de kroonbladnectariën van veel minder beteekenis en die uit den bloembodem stellig van meer belang. Bij *Pulsatilla* treedt de eerste nog meer op den achtergrond en in de geslachten *Paeonia*, *Caltha*, *Anemone* en *Clematis* komen die nectariën niet meer voor; hier is de honig-afscheiding uit den bloembodem geheel op den voorgrond gekomen.

Bij *Caltha palustris* kan men op drie plaatsen in de bloem nectarafscheiding waarnemen: eerstens aan de peripherie van den bloembodem, daar, waar bij verwante *Helleboreae* de gesteelde kroonnectariën geplaatst zijn; ten tweede aan het interstaminale gedeelte van den bloembodem; en ten derde aan den wand van elk vruchtbeginsel. De ovaria zijn bij *Caltha* onbehaard, maar aan beide zijden van elk ovarium vindt men een plek, waar honderden fraaie, zeer dunwandige papillen bijeen staan, die, ieder voor zich, een fijn droppeltje nectar afscheiden, die tot een grooten droppel samenvloeien; deze droppels laten zich tusschen elke twee ovaria, met de loupe, gemakkelijk waarnemen. De wandpapillen vervangen hier de haren bij andere geslachten.

Hoe zeer bij andere geslachten de nectarafscheiding aan de peripherie, op den achtergrond is getreden, laat zich 't beste waarnemen in de geslachten *Ranunculus* en *Pulsatilla*.

De bloem van *Ranunculus acer* bijv. komt met die van *Trollius* overeen, zoowel in den stand der meeldraden ten opzichte van de vruchtbeginsels, als in het verschijnsel van het zich verlengen en naar binnen bewegen der meeldraden; maar de nectarafscheiding, aan den nagel der bloembladen, kan wellicht den eersten dag van den bloei, zoolang de kroon in den klokvorm verkeert, iets ter bescherming der geslachtsorganen door het vochtighouden der kroon, bijdragen, dit is toch in geen geval van belang in het volgend stadium van bloei, waarin de bloemkroon zich uitspreidt. Ware hier geen nectarafscheiding aan het interstaminale gedeelte van den bloembodem,

dan zouden de vruchtbeginsels gevaar loopen, spoedig, wegens uitdroging verloren te gaan.

Bij *Ranunculus auricomus* is de peripherische secretie van nog veel minder beteekenis. Hier ontbreken veelal 1 of 2, soms zelfs alle bloembladen en tegelijk daarmee de nectariën; overigens verkeeren hier de nectariën veelal in een rudimentairen staat.

In het geslacht *Pulsatilla* heeft almede de nectarafscheiding aan de peripherie van de bloem (uit de tot nectariën gemetamorphoseerde helmknoppen van den buitensten krans) weinig te beduiden. Bij *Pulsatilla vulgaris*, *P. pratensis* en *P. vernalis* is waargenomen, dat de nectariën vaak geen nectar meer afscheiden; men vindt hier nectarlooze en nectarhoudende individuen; *P. alpina* is volgens SCHULZ geheel vrij van nectar. Ook in dit geslacht is dus de nectarafscheiding uit den bloembodem van veel meer beteekenis; de talrijke vruchtbeginsels zijn ieder voor zich, gedurende den bloei, als 't ware bekleed met een in glucose gedrenkten mantel.

In de familie der *Malvaceae* komt de ware beteekenis der nectarafscheiding niet minder duidelijk aan 't licht, dan bij de *Ranunculaceae*.

Ik zal daarover in deze mededeeling niet in bijzonderheden kunnen treden, maar toch wil ik er met enkele woorden aan herinneren, dat BEHRENS in 1879 heeft aangetoond, dat, bij *Abutilon*, *Althaea* en *Malva* de bodem van den kelk een nectarium draagt, dat uit een groot aantal, dicht naast elkander staande veelcellige „Sekretions-Papillen" bestaat, die te zamen een groot secerneerend vlak vormen. Elke „Papille" bestaat uit een groot aantal, in eene rij geplaatste, cellen; bij *Abutilon insigne* b.v. uit 12—14. Wat BEHRENS hier meedeelt, geldt voor zoover mijn eigen onderzoek reikt, waarschijnlijk voor alle Malvaceen. Ik vond die nectariën ook in de geslachten *Hibiscus*, *Kitaibelia*, *Malope*, *Anoda* en *Sidalcea*.

Of echter in 't algemeen bij deze planten de nectarafscheiding een constant verschijnsel is, wordt door verschillende schrijvers betwijfeld. Van vele soorten is het niet bekend, dat zij ooit nectar bevatten en van andere soorten zijn de berichten met elkander in strijd; bij enkele zou men meenen, dat ook de individuen van dezelfde soort zich verschillend verhouden. Zoo kon bijv. KIRCHNER bij *Abutilon Avicennae* geen nectar vinden, terwijl diezelfde plant, hier ter plaatse, zoo rijk is aan honig, dat deze zich met het ongewapend oog laat waarnemen. Wat *Hibiscus* betreft, staan ook van dit geslacht de in Europa meest bekende soorten: *H. syriacus*, *H. Trionum*, *H. esculentus* als nectarloos bekend. De grootere *Abutilon*-bloemen zijn echter zeer nectarhoudend, zóó zelfs, dat de nectar door kolibri's wordt weggehaald.

De secretie der kelknectarien laat zich, als peripherische, met

met die der kroonnectarien der Ranunculaceen vergelijken. Het onderzoek heeft mij nu geleerd, dat er in deze familie ook een centrale nectarafscheiding valt waar te nemen, die den indruk maakt voor de meeste geslachten — misschien voor alle behalve *Abutilon* — de belangrijkste te zijn.

Men weet, dat bij de Malvaceen de helmdraden tot een buis met elkander vergroeid zijn. Deze meeldradencilinder, die zich van onderen om het vruchtbeginsel heen uitzet, is aan de basis op een zoodanige wijze met de bloemkroon vergroeid, dat hun gemeenschappelijk weefsel het ovarium insluit en voor het oog verbergt. Maakt men nu het ovarium uit zijn „huisje" vrij, dan vindt men den wand, bij nagenoeg alle Malvaceen, dicht bekleed met nectar-secerneerende trichomen van denzelfden bouw als die, welke het kelknectarium samenstellen (Sekretions-Papillen van BEHRENS), welke trichomen voortdurend een laagje glucose over het ovarium uitstorten. Bij *Hibiscus esculentus* en bij *H. Trionum* zijn zelfs deze ovariumwandtrichomen grooter, dan die van het kelknectarium, en uit niet minder dan 28 cellen opgebouwd. De vruchtbeginsels zijn dus niet alleen in de meeldradenbuis opgesloten, maar bevinden zich voortdurend ook in een, door nectarafscheiding, vochtig gehouden ruimte.

Ik hoop later op deze, ten aanzien der nectarafscheiding buitengewoon interessante familie, uitvoeriger terug te komen.

Alvorens deze mededeeling te sluiten, zou ik nog gaarne op twee belangrijke zaken willen wijzen. In de eerste plaats op de nectarafscheiding bij vele bloemen, wanneer ze nog in den knoptoestand verkeeren. Wij zijn gewoon aan te nemen, dat de secretie eerst een aanvang neemt bij of na de ontluiking, maar op dien regel heb ik talrijke uitzonderingen gevonden. Inzonderheid valt dit verschijnsel waar te nemen bij de Ranunculaceen. De met zijdeglanzende haren bekleede vruchtbeginsels van *Clematis Viticella*, de ovaria van *Paeonia*, *Pulsatilla* en *Aconitum* zijn reeds lang vóór de ontluiking met nectar gedrenkt, en het mag wel met zekerheid worden aangenomen, dat de honigafscheiding hier, reeds in den knop, dient ter bescherming der geslachtsorganen, en alzoo te vergelijken is met de waterafscheiding in de bloemen met waterkelken. Bij de bloemen van *Aconitum* nam ik waar, dat, wel de centrale, maar niet de peripherische nectarsecretie, zich vóór de ontluiking constateeren laat; dit gaf mij den indruk, dat de laatste meer in 't bijzonder dient tot het vochtig houden der bloem tijdens den bloei. Nader onderzoek moet leeren, of dit onderscheid zich ook bij andere planten, met dubbele nectarafscheiding, laat waarnemen.

Maar ook bij andere planten o. a. bij *Melandrium album* (*Lychnis vespertina*), *Hyoscyamus niger*, *Galanthus nivalis*, vele Papilionaceen, *Epilobium angustifolium* kan men rijkelijke nectarafscheiding vinden, vóór dat er van ontluiking sprake is.

In de tweede plaats meen ik, dat het zijn nut kan hebben hier nog even stil te staan bij de z.g. *nectarlooze* planten, omdat men zou kunnen meenen, dat deze toch niet pleiten voor de juistheid of algemeene geldigheid van de boven uitgesproken stelling.

Ik heb nu reeds gelegenheid gehad er op te wijzen, dat men bij enkele planten, die geen nectar bevatten, den wand van 't ovarium bekleed vindt met *was*, en bij andere met *slijmafscheidende klieren*, waaraan dezelfde biologische beteekenis wordt toegeschreven, als ik aan de nectarsecretie meen te moeten toeschrijven. Verder heb ik hierboven reeds een aantal planten genoemd, die als nectarloos te boek staan, doch wel degelijk tot de nectarhoudende gerekend moeten worden n.l. de *Anemone*, *Clematis*, *Pulsatilla* en *Paeonia*-soorten uit de familie der Ranunculaceen, dan *Helianthemum vulgare* en de verschillende soorten van *Verbascum* en *Hibiscus*. Ik wil hier nu nog aan toevoegen, dat zich langs chemischen weg gemakkelijk laat constateeren, dat de z.g. nectarlooze *Rosaceae*: *Rosa*, *Poterium*, *Agrimonia*, *Aruncus* en *Spiraea* ten onrechte tot deze groep gebracht zijn. Wel is hier de nectar meestal moeilijk waartenemen, maar hij is toch even goed aanwezig als bij de andere *Rosaceae*. Wanneer men de bloemen met water uittrekt, zoodat de door verdamping ingedikte nectar in oplossing komt, dan laat zich bij al deze planten de glucose in het water gemakkelijk aantoonen. Eindelijk valt ten deze nog op te merken, dat zeer vele planten geen bijzondere bescherming door nectar noodig hebben, omdat het ovarium, òf door een spoedige bevruchting, vaak reeds in den knop, voortdurend door blijft groeien, òf tijdens den bloei, niet aan de lucht wordt blootgesteld.

Dit laatste is inzonderheid het geval in de geslachten *Plantago*, en *Luzula*, bij *Nymphaea alba*, *Erythraea Centaureum*, *Iuncus*, bij de meeste Gramineen en bij andere windbloemige planten.

Er wordt besloten om wegens het Kerstfeest de Decembervergadering te houden op Donderdag 24 December a. s.

De vergadering wordt gesloten.

(9 December, 1908).

ERRATA.

In het Zittingsverslag van 30 Mei 1908:

p. 89 r. 7 v. b.: inpl. v. 17 Febr. '07 leze men 17 Febr. '08.

p. 93 tabel IV in de 4de kolom: inpl. v. 366.00 leze men 365.99:

p. 95 r. 9 v. b.: inpl. v. J. C. CLAY leze men J. CLAY.
r. 17 v. b.: leze men Med. N°. 99b.

In het Bijvoegsel tot het Zittingsverslag van 27 Juni 1908.

p. 173 r. 9. v. b.: inpl. v. waterstof leze men zuurstof.

BOEKDRUKKERIJ
DE ROEVER KRÖBER & BAKELS
AMSTERDAM.

DUE MAR 13 '55
MDT 10/29/07

3 2044 092 846 518